

УДК 511.21+517.965+517.547.582

MSC2020 11B37 + 33E05

© М. О. Авдеева<sup>1</sup>, В. А. Быковский<sup>1,2</sup>

## Гиперэллиптические системы последовательностей и функций

В работе предлагается метод построения пар голоморфных на всей комплексной плоскости функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям типа теорем сложения для тэта-функций.

**Ключевые слова:** функциональные уравнения, тэта-функции, сигма-функция Вейерштрасса, нелинейные последовательности.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ2024>

### Введение

В работе Гаусса [1, с. 472], датированной 6 августа 1827 г. и опубликованной лишь в 1866 г. в третьем томе собрания сочинений, содержится тождество

$$\begin{aligned} &(\theta, 2\alpha) \cdot (\theta, 2\beta) = \\ &= (2\theta, \alpha + \beta) \cdot (2\theta, \alpha - \beta) + (2\theta, \alpha + \beta + 1/2) \cdot (2\theta, \alpha - \beta + 1/2), \end{aligned}$$

где

$$(\theta, \alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\theta(k+\alpha)^2}.$$

С помощью замены переменных

$$\begin{aligned} q &= e^{\pi i \tau} = e^{-\theta} \quad (\operatorname{Im} \tau > 0), \\ \alpha &= \frac{1}{2\tau}(z + w), \quad \beta = \frac{1}{2\tau}(z - w), \end{aligned}$$

оно преобразуется к виду

$$\vartheta_3(z + w; q) \vartheta_3(z - w; q) = \vartheta_3(2z; q^2) \vartheta_3(2w; q^2) + \vartheta_2(2z; q^2) \vartheta_2(2w; q^2), \quad (1)$$

<sup>1</sup>Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54.

<sup>2</sup>Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136. Электронная почта: [avdeeva@iam.khv.ru](mailto:avdeeva@iam.khv.ru) (М. О. Авдеева), [vab@iam.khv.ru](mailto:vab@iam.khv.ru) (В. А. Быковский).

где  $\vartheta_2$  и  $\vartheta_3$  — две из четырех тета-функций Якоби

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z; q) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{2i(n+\frac{1}{2})z} q^{(n+\frac{1}{2})^2}, \\ \vartheta_2(z; q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i(n+\frac{1}{2})z} q^{(n+\frac{1}{2})^2}, \\ \vartheta_3(z; q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2inz} q^{n^2}, \\ \vartheta_4(z; q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{2inz} q^{n^2}.\end{aligned}$$

Произведя в (1) замену

$$z \rightarrow z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau,$$

с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau; q\right) &= iq^{-\frac{1}{4}} e^{-iz} \vartheta_1(z; q), \\ \vartheta_3(2z + \pi + \pi\tau; q^2) &= q^{-\frac{1}{2}} e^{-2iz} \vartheta_2(2z; q^2), \\ \vartheta_2(2z + \pi + \pi\tau; q^2) &= -q^{-\frac{1}{2}} e^{-2iz} \vartheta_3(2z; q^2)\end{aligned}$$

получим

$$-\vartheta_1(z + w; q) \vartheta_1(z - w; q) = \vartheta_2(2z; q^2) \vartheta_3(2w; q^2) - \vartheta_3(2z; q^2) \vartheta_2(2w; q^2). \quad (2)$$

Еще одна замена

$$z \rightarrow z + \frac{1}{4}\pi, \quad w \rightarrow w + \frac{1}{4}\pi$$

приводит к тождеству

$$\vartheta_2(z + w; q) \vartheta_1(z - w; q) = -\vartheta_1(2z; q^2) \vartheta_4(2w; q^2) + \vartheta_4(2z; q^2) \vartheta_1(2w; q^2),$$

которое в виде

$$H(x, q) \Theta(X, q) - H(x, q) \Theta(x, q) = H\left(\frac{x - X}{2}, \sqrt{q}\right) H\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + X}{2}, \sqrt{q}\right)$$

впервые было опубликовано Якоби [2, с. 257] в 1828 году.

В работе предлагается метод построения более широкого класса тождеств типа (1) и (2) с помощью гиперэллиптических систем последовательностей, введенных в работе [3].

## 1. Гиперэллиптические системы последовательностей

Пусть  $A, B: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  — «две последовательности», отличные «от тождественного нуля». Предположим, что найдутся  $2k_0 + 2k_1$  других последовательностей

$$\begin{aligned} C_1^{(0)}, \dots, C_{k_0}^{(0)}, D_1^{(0)}, \dots, D_{k_0}^{(0)}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \\ C_1^{(1)}, \dots, C_{k_1}^{(1)}, D_1^{(1)}, \dots, D_{k_1}^{(1)}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \end{aligned}$$

для которых при любых целых  $m$  и  $n$  выполняются равенства

$$A(m+n)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k_0} C_j^{(0)}(m)D_j^{(0)}(n), \quad (3)$$

$$A(1+m+n)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k_1} C_j^{(1)}(m)D_j^{(1)}(n). \quad (4)$$

В таком случае назовем пару  $(A, B)$  гиперэллиптической системой с 0-рангом  $k_0 = R_0(A, B)$ , 1-рангом  $k_1 = R_1(A, B)$  и рангом  $k = R(A, B) = \max(k_0, k_1)$ , где  $k_0$  и  $k_1$  — минимально возможные неотрицательные целые числа. Так как  $A$  и  $B$  — не тождественные нули, то  $k \geq 1$ . Равенство  $k_j = 0$  ( $j = 0, 1$ ) означает, что соответствующая левая часть одного из разложений равна нулю при всех целых  $m$  и  $n$ .

**Пример (экспоненциальная система).** Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$  — произвольные комплексные числа и

$$A(n) = \exp(\alpha_1 + \beta_1 n + \gamma n^2), \quad B(n) = \exp(\alpha_2 + \beta_2 n + \gamma n^2).$$

Тогда

$$A(m+n)B(m-n) = C_1^{(0)}(m)D_1^{(0)}(n)$$

с

$$\begin{aligned} C_1^{(0)}(m) &= \exp(\alpha_1 + (\beta_1 + \beta_2)m + 2\gamma m^2), \\ D_1^{(0)}(n) &= \exp(\alpha_2 + (\beta_1 - \beta_2)n + 2\gamma n^2) \end{aligned}$$

и

$$A(1+m+n)B(m-n) = C_1^{(1)}(m)D_1^{(1)}(n)$$

с

$$\begin{aligned} C_1^{(1)}(m) &= \exp(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma + (\beta_1 + \beta_2 + 2\gamma)m + 2\gamma m^2), \\ D_1^{(1)}(n) &= \exp(\alpha_2 + (\beta_1 - \beta_2 + 2\gamma)n + 2\gamma n^2). \end{aligned}$$

*Замечание 1.* Пусть  $(A_1, B_1)$  и  $(A_2, B_2)$  — две гиперэллиптические системы рангов  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда  $(A_1 A_2, B_1 B_2)$  — гиперэллиптическая система и

$$R(A_1 A_2, B_1 B_2) \leq k_1 k_2.$$

Это утверждение легко проверяется путем умножения левых и правых частей разложений (3) и (4).

Если в замечании 1 выбрать в качестве  $(A_2, B_2)$  «экспоненциальную систему», то мы получим следующее утверждение.

*Замечание 2.* Если  $(A, B)$  — гиперэллиптическая система, то для любых комплексных  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$  пара  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ , определенная по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{A}(n) &= \exp(\alpha_1 + \beta_1 n + 2\gamma n^2) A(n), \\ \tilde{B}(n) &= \exp(\alpha_2 + \beta_2 n + \gamma n^2) B(n),\end{aligned}$$

также гиперэллиптическая система, и

$$R(A, B) = R(\tilde{A}, \tilde{B}).$$

*Замечание 3.* Произведя замену  $n \rightarrow -n$  в (3) и  $n \rightarrow -n - 1$  в (4) получим, что  $(A, B)$  и  $(B, A)$  являются одновременно гиперэллиптическими системами одинакового ранга.

*Замечание 4.* Произведя замены  $m \rightarrow -n$  и  $n \rightarrow -m$  в (3), а также замены  $m \rightarrow -n - 1$  и  $n \rightarrow -m - 1$  в (4) получим, что пары  $(A, B)$  и  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  с  $\tilde{A}(n) = A(-n)$  являются одновременно гиперэллиптическими системами одинакового ранга.

**Предложение 1.** Пусть  $k, l, r$  — целые числа с  $k \neq 0$  и  $(A, B)$  — гиперэллиптическая система. Определим пару  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  по формулам

$$\tilde{A}(n) = A(kn + l), \quad \tilde{B}(n) = B(kn + r).$$

Тогда, если  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  — не тождественные нули, то  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  — гиперэллиптическая система и  $R(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq R(A, B)$ .

Доказательство предложения 1. Утверждение непосредственно следует из равенств

$$\begin{aligned}k(m + n) + l &= \left(km + \frac{l + r}{2}\right) + \left(kn + \frac{l - r}{2}\right), \\ k(m - n) + r &= \left(km + \frac{l + r}{2}\right) - \left(kn + \frac{l - r}{2}\right)\end{aligned}$$

для  $l + r \equiv 0 \pmod{2}$  и равенств

$$\begin{aligned}k(m + n) + l &= 1 + \left(km + \frac{l + r - 1}{2}\right) + \left(kn + \frac{l - r - 1}{2}\right), \\ k(m - n) + r &= \left(km + \frac{l + r - 1}{2}\right) - \left(kn + \frac{l - r - 1}{2}\right)\end{aligned}$$

для  $l + r \equiv 1 \pmod{2}$ . □

**Теорема 1.** Пусть  $(A, B)$  — «гиперэллиптическая система» последовательностей. Тогда для некоторого вещественного  $\Delta = \Delta(A, B)$  выполняется оценка

$$|A(m)| + |B(m)| \ll_{A, B} \exp(\Delta m^2).$$

Доказательство. Для любых целых  $m_i$  и  $n_j$  из (3) и (4) следуют равенства

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_0, \dots, m_{k_0} \\ n_0, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} A(m_0 + n_0)B(m_0 - n_0) & \dots & A(m_0 + n_{k_0})B(m_0 - n_{k_0}) \\ \dots & A(m_i + n_j)B(m_i - n_j) & \dots \\ A(m_{k_0} + n_0)B(m_{k_0} - n_0) & \dots & A(m_{k_0} + n_{k_0})B(m_{k_0} - n_{k_0}) \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{A,B}^{(1)} \begin{pmatrix} m_0, \dots, m_{k_1} \\ n_0, \dots, n_{k_1} \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} A(1+m_0+n_0)B(m_0-n_0) & \dots & A(1+m_0+n_{k_1})B(m_0-n_{k_1}) \\ \dots & A(1+m_i+n_j)B(m_i-n_j) & \dots \\ A(1+m_{k_1}+n_0)B(m_{k_1}-n_0) & \dots & A(1+m_{k_1}+n_{k_1})B(m_{k_1}-n_{k_1}) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Переходя, в случае необходимости, от последовательности  $A(n)$  к  $A(n+1)$  и производя замены  $m \rightarrow m+1$  и  $n \rightarrow n+1$ , мы поменяем местами (3) и (4). Поэтому найдутся такие целые  $m_1, \dots, m_{k_0}, n_1, \dots, n_{k_0}$ , для которых

$$\mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_1, \dots, m_{k_0} \\ n_1, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Принимая во внимание предложение 1, мы можем считать, что  $A(0) \neq 0$  и  $B(0) \neq 0$ .

В соответствии с (5), раскладывая определитель по первой строке, получим равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m, m_1, \dots, m_{k_0} \\ m, n_1, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} &= A(2m)B(0)\mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_1, \dots, m_{k_0} \\ n_1, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} - \\ &- A(m+n_1)B(m-n_1)\mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_1, m_2, \dots, m_{k_0} \\ n_1, n_2, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} + \dots + \\ &+ (-1)^{k_0} A(m+n_{k_0})B(m-n_{k_0})\mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_1, m_2, \dots, m_{k_0} \\ m, n_1, \dots, n_{k_0-1} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку

$$|A(2m)| \ll_{A,B} \max_{|l| \leq T} |A(m+l)|^2 \max_{|l| \leq T} |B(m+l)|^2, \quad (7)$$

где  $T = \max\{|m_1|, \dots, |m_{k_0}|, |n_1|, \dots, |n_{k_0}|\}$ .

Если  $k_1 = 0$ , то для любых целых  $m$  и  $n$  выполняется равенство  $A(1+m+n) \times B(m-n) = 0$ , а при  $m = n$   $A(2m+1)B(0) = 0$ . Поскольку  $B(0) \neq 0$ , то  $A(m) = 0$  для всех нечетных номеров, и мы можем написать, что

$$|A(2m+1)| \ll \max_{|l| \leq T+1} |A(m+l)|^2 \max_{|l| \leq T+1} |B(m+l)|^2. \quad (8)$$

Пусть теперь  $k_1 > 0$ . Действуя точно так же, как при доказательстве неравенства (7), с помощью равенства (4) получим оценку (8). По причине симметрии (см. замечание 3) оценки (7) и (8) справедливы при замене  $A$  на  $B$ .

Положим для  $M > 0$

$$G(M) = \max_{|m| \leq M} \max\{|A(m)|, |B(m)|\}.$$

Из (7) и (8) следует неравенство

$$G(2M) \leq QG^4(M + F)$$

с  $F = T + 4$  и положительной константой  $Q = Q(A, B)$ . Итерируя это неравенство для  $M \geq 2$ , получим

$$\begin{aligned} G(M) &\leq QG^4\left(\frac{M}{2} + F\right) \leq Q^{1+4}G^{4^2}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{F}{2} + F\right) \leq \\ &\leq Q^{1+4+\dots+4^{l-1}}G^{4^l}\left(\frac{M}{2^l} + \frac{F}{2^{l-1}} + \dots + \frac{F}{2} + F\right). \end{aligned}$$

Выберем натуральное  $l$  из условия

$$\frac{1}{2}F < \frac{M}{2^l} \leq F.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 4^l &< 4\left(\frac{M}{F}\right)^2, \quad 1 + 4 + \dots + 4^{l-1} = \frac{4^l - 1}{3} < 2\left(\frac{M}{F}\right)^2, \\ G(M) &\leq Q^{2\left(\frac{M}{F}\right)^2} G^{\left(\frac{M}{F}\right)^2}(2F) \leq \exp(\Delta \cdot M^2) \end{aligned}$$

с некоторым  $\Delta = \Delta(A, B)$ . Поэтому

$$|A(m)| + |B(m)| \leq 2G(|m|) \leq 2\exp(\Delta m^2).$$

Теорема 1 доказана.  $\square$

## 2. Гиперэллиптические системы функций

Пусть  $(A, B)$  — гиперэллиптическая система последовательностей с разложениями (3) и (4). Из теоремы 1 следует, что существует

$$\lim_{|m| \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \log(1 + \max\{|A(m)|, |B(m)|\}) = \Delta(A, B) = \Delta,$$

который мы назовем показателем сходимости пары  $(A, B)$ .

Из равенств (5) и (6) при  $m_0 = m$  и  $n_0 = n$  следует, что каждая из последовательностей  $C_j^{(0)}$  и  $D_j^{(0)}$ ,  $C_j^{(1)}$  и  $D_j^{(1)}$  может быть представлена как линейная комбинация последовательностей

$$A(m + m_i)B(m + m'_i) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

с некоторыми целыми  $m_i$  и  $m'_i$ . Поэтому мы можем считать, что для любого  $\varepsilon > 0$  и любого целого  $m$

$$\max_{A, B} \left\{ \left| C_{j_1}^{(0)}(m) \right|, \left| D_{j_2}^{(0)}(m) \right|, \left| C_{j_3}^{(1)}(m) \right|, \left| D_{j_4}^{(1)}(m) \right| \right\} \ll_{A, B} \exp((\Delta + \varepsilon)|m|^2).$$

Пусть  $q = \exp(\pi i \tau)$  с  $\text{Im} \tau > 0$ . Определим две функции

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A(m) e^{2imz} q^{m^2},$$

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(n) e^{2inz} q^{n^2}.$$

**Теорема 2.** Пара  $(f, g)$  является гиперэллиптической системой функций с  $R(f, g) \leq k_0 + k_1$ .

**Доказательство.** Заметим, что соответствие

$$(m, n) \rightarrow \left( \frac{1}{2}(m+n), \frac{1}{2}(m-n) \right)$$

переводит  $\mathbb{Z}^2$  в  $\mathbb{Z}^2 \cup (\mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2))$ . Принимая во внимание разложения (3) и (4) получим

$$\begin{aligned} f(z+w)g(z-w) &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} A(m)B(n) e^{2i(m(z+w)+n(z-w))} q^{m^2+n^2} = \\ &= \sum_{m_1, n_1=-\infty}^{\infty} A(m_1+n_1)B(m_1-n_1) e^{2i2zm_1} e^{2i2zn_1} q^{m_1^2+2n_1^2+} \\ &+ \sum_{m_1, n_1=-\infty}^{\infty} A(1+m_1+n_1)B(m_1-n_1) e^{2i2z(m_1+\frac{1}{2})} e^{2i2w(n_1+\frac{1}{2})} q^{2(m_1+\frac{1}{2})^2} q^{2(n_1+\frac{1}{2})^2} = \\ &= \sum_{j=1}^{k_0} \left( \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_j^{(0)}(m_1) e^{2\pi i 2zm_1} q^{2m_1^2} \right) \left( \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} D_j^{(0)}(n_1) e^{2i2wn_1} q^{2n_1^2} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^{k_1} \left( \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_j^{(1)}(m_1) e^{2i2z(m_1+\frac{1}{2})} q^{2(m_1+\frac{1}{2})^2} \right) \left( \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} D_j^{(1)}(n_1) e^{2i2w(n_1+\frac{1}{2})} q^{2(n_1+\frac{1}{2})^2} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.  $\square$

**Пример.** Если  $(A, B)$  — экспоненциальная система последовательностей, то с помощью теоремы 2 получим все возможные пары гиперэллиптических систем функций ранга 2 (*эллиптические системы*). Это утверждение следует из результатов работы [4]. В частности, для  $A$  и  $B$  тождественно равных 1, получим тождество Гаусса (1).

Ссылка на рис. 1 — 1.

## Список литературы

- [1] Gauss K. F., “Zur Theorie der neuen Transscendenten”, *Werke: Dritter Band [III]*, Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866.
- [2] Jacobi C. G. J., *Gesammelte Werke*, v. 1, Berlin, 1881.

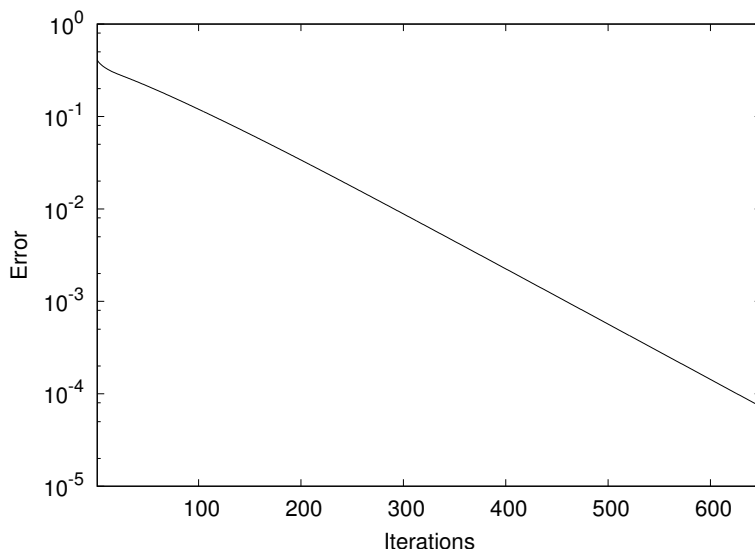


Рис. 1. Пример рисунка. Погрешность неполного метода Ньютона на первом тесте.

- [3] Bykovskii V., “Elliptic systems of sequences and functions”, 2015, [http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo\\_Bykovskii.pdf](http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo_Bykovskii.pdf).  
 [4] Rochberg R., Rubel L. A., *Indiana Univ. Math. J.*, **41**, (1992).

Поступила в редакцию  
12 сентября 2016 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00203а) и ПФИ ДВО РАН «Дальний Восток» (проект № 15-I-4-047).

*Avdeeva M. O.<sup>1</sup>, Bykovskii V. A.<sup>1</sup>* Hyperelliptic system of sequences and functions. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2025. V. 25. No 1. P. 1–8.

<sup>1</sup>Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

#### ABSTRACT

The article offers a new method for constructing the pairs of functions which are holomorphic on the whole complex plane and “satisfy functional equations” such as the addition theorem for theta functions.

Key words: *functional equations, theta functions, Weierstrass sigma-function, nonlinear sequences.*