Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 1. С. 1–8

УДК 511.21+517.965+517.547.582
MSC2010 11B37 + 33E05

© М. О. Авдеева[1], В. А. Быковский[1,2]

Гиперэллиптические системы последовательностей и функций

В работе предлагается метод построения пар голоморфных на всей комплексной плоскости функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям типа теорем сложения для тэта-функций.

Ключевые слова: *функциональные уравнения, тэта-функции, сигма-функция Вейерштрасса, нелинейные последовательности.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202026

Введение

В работе Гаусса [1, с. 472], датированной 6 августа 1827 г. и опубликованной лишь в 1866 г. в третьем томе собрания сочинений, содержится тождество

$$(\theta, 2\alpha)\cdot(\theta, 2\beta) =$$
$$= (2\theta, \alpha+\beta)\cdot(2\theta, \alpha-\beta) + (2\theta, \alpha+\beta+1/2)\cdot(2\theta, \alpha-\beta+1/2),$$

где

$$(\theta, \alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\theta(k+\alpha)^2}.$$

+

$$q = e^{\pi i\tau} = e^{-\theta} \qquad (\operatorname{Im}\tau > 0),$$
$$\alpha = \frac{1}{2\tau}(z+w), \qquad \beta = \frac{1}{2\tau}(z-w),$$

оно преобразуется к виду

$$\vartheta_3(z+w;q)\vartheta_3(z-w;q) = \vartheta_3\left(2z;q^2\right)\vartheta_3\left(2w;q^2\right) + \vartheta_2\left(2z;q^2\right)\vartheta_2\left(2w;q^2\right), \qquad (1)$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54
[2] Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136
Электронная почта: avdeeva@iam.khv.ru (М. О. Авдеева), vab@iam.khv.ru (В. А. Быковский).

где ϑ_2 и ϑ_3 — две из четырех тета-функций Якоби

$$\vartheta_1(z;q) = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{2i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$\vartheta_2(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$\vartheta_3(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2inz} q^{n^2},$$

$$\vartheta_4(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{2inz} q^{n^2}.$$

Произведя в (1) замену

$$z \quad\to\quad z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau,$$

с помощью соотношений

$$\vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau;q\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_1(z;q),$$

$$\vartheta_3\left(2z+\pi+\pi\tau;q^2\right) = q^{-\frac{1}{2}}e^{-2iz}\vartheta_2(2z;q^2),$$

$$\vartheta_2\left(2z+\pi+\pi\tau;q^2\right) = -q^{-\frac{1}{2}}e^{-2iz}\vartheta_3(2z;q^2)$$

получим

$$-\vartheta_1(z+w;q)\vartheta_1(z-w;q) = \vartheta_2\left(2z;q^2\right)\vartheta_3\left(2w;q^2\right) - \vartheta_3\left(2z;q^2\right)\vartheta_2\left(2w;q^2\right). \qquad (2)$$

Еще одна замена

$$z \quad\to\quad z+\frac{1}{4}\pi, \qquad w \quad\to\quad w+\frac{1}{4}\pi$$

приводит к тождеству

$$\vartheta_2(z+w;q)\vartheta_1(z-w;q) = -\vartheta_1(2z;q^2)\vartheta_4(2w;q^2)+\vartheta_4(2z;q^2)\vartheta_1(2w;q^2),$$

которое в виде

$$H(x,q)\Theta(X,q) - H(x,q)\Theta(x,q) = H\left(\frac{x-X}{2},\sqrt{q}\right)H\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x+X}{2},\sqrt{q}\right)$$

впервые было опубликовано Якоби [2, с. 257] в 1828 году.

В работе предлагается метод построения более широкого класса тождеств типа (1) и (2) с помощью гиперэллиптических систем последовательностей, введенных в работе [3].

1. Гиперэллиптические системы последовательностей

Пусть $A,B:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ — две последовательности, отличные от тождественного нуля. Предположим, что найдутся $2k_0+2k_1$ других последовательностей

$$C_1^{(0)},\dots,C_{k_0}^{(0)},D_1^{(0)},\dots,D_{k_0}^{(0)}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C},$$
$$C_1^{(1)},\dots,C_{k_1}^{(1)},D_1^{(1)},\dots,D_{k_1}^{(1)}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C},$$

для которых при любых целых m и n выполняются равенства

$$A(m+n)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k_0} C_j^{(0)}(m)D_j^{(0)}(n), \tag{3}$$

$$A(1+m+n)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k_1} C_j^{(1)}(m)D_j^{(1)}(n). \tag{4}$$

В таком случае назовем пару (A,B) гиперэллиптической системой с 0-рангом $k_0 = R_0(A,B)$, 1-рангом $k_1 = R_1(A,B)$ и рангом $k = R(A,B) = \max(k_0,k_1)$, где k_0 и k_1 — минимально возможные неотрицательные целые числа. Так как A и B — не тождественные нули, то $k \geqslant 1$. Равенство $k_j = 0\,(j=0,1)$ означает, что соответствующая левая часть одного из разложений равна нулю при всех целых m и n.

Пример экспоненциальная система. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ — произвольные комплексные числа и*

$$A(n) = \exp\left(\alpha_1 + \beta_1 n + \gamma n^2\right), \qquad B(n) = \exp\left(\alpha_2 + \beta_2 n + \gamma n^2\right).$$

Тогда

$$A(m+n)B(m-n) = C_1^{(0)}(m)D_1^{(0)}(n)$$

с

$$C_1^{(0)}(m) = \exp\left(\alpha_1 + (\beta_1+\beta_2)m + 2\gamma m^2\right),$$
$$D_1^{(0)}(n) = \exp\left(\alpha_2 + (\beta_1-\beta_2)n + 2\gamma n^2\right)$$

и

$$A(1+m+n)B(m-n) = C_1^{(1)}(m)D_1^{(1)}(n)$$

с

$$C_1^{(1)}(m) = \exp\left(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma + (\beta_1+\beta_2+2\gamma)m + 2\gamma m^2\right),$$
$$D_1^{(1)}(n) = \exp\left(\alpha_2 + (\beta_1-\beta_2+2\gamma)n + 2\gamma n^2\right).$$

Замечание 1. Пусть (A_1,B_1) и (A_2,B_2) — две гиперэллиптические системы рангов k_1 и k_2. Тогда (A_1A_2, B_1B_2) — гиперэллиптическая система и

$$R(A_1A_2, B_1B_2) \leqslant k_1k_2.$$

Это утверждение легко проверяется путем умножения левых и правых частей разложений (3) и (4).

Если в замечании 1 выбрать в качестве (A_2,B_2) экспоненциальную систему, то мы получим следующее утверждение.

Замечание 2. Если (A,B) — гиперэллиптическая система, то для любых комплексных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ пара $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$, определенная по формулам

$$\widetilde{A}(n) = \exp\left(\alpha_1 + \beta_1 n + 2\gamma n^2\right) A(n),$$
$$\widetilde{B}(n) = \exp\left(\alpha_2 + \beta_2 n + \gamma n^2\right) B(n),$$

также гиперэллиптическая система, и

$$R(A,B) = R(\widetilde{A}, \widetilde{B}).$$

Замечание 3. Произведя замену $n \to -n$ в (3) и $n \to -n-1$ в (4) получим, что (A, B) и (B, A) являются одновременно гиперэллиптическими системами одинакового ранга.

Замечание 4. Произведя замены $m \to -n$ и $n \to -m$ в (3), а также замены $m \to -n-1$ и $n \to -m-1$ в (4) получим, что пары (A, B) и $(\widetilde{A}, B)$ с $\widetilde{A}(n) = A(-n)$ являются одновременно гиперэллиптическими системами одинакового ранга.

Предложение 1. *Пусть k, l, r — целые числа с $k \neq 0$ и (A, B) — гиперэллиптическая система. Определим пару $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ по формулам*

$$\widetilde{A}(n) = A(kn + l), \qquad \widetilde{B}(n) = B(kn + r).$$

Тогда, если $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ — не тождественные нули, то $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ — гиперэллиптическая система и $R(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \leqslant R(A, B)$.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из равенств

$$k(m+n) + l = \left(km + \frac{l+r}{2}\right) + \left(kn + \frac{l-r}{2}\right),$$
$$k(m-n) + r = \left(km + \frac{l+r}{2}\right) - \left(kn + \frac{l-r}{2}\right)$$

для $l + r \equiv 0 \pmod 2$ и равенств

$$k(m+n) + l = 1 + \left(km + \frac{l+r-1}{2}\right) + \left(km + \frac{l-r-1}{2}\right),$$
$$k(m-n) + r = \left(km + \frac{l+r-1}{2}\right) - \left(kn + \frac{l-r-1}{2}\right)$$

для $l + r \equiv 1 \pmod 2$. □

Теорема 1. *Пусть (A, B) — гиперэллиптическая система последовательностей. Тогда для некоторого вещественного $\Delta = \Delta(A, B)$ выполняется оценка*

$$|A(m)| + |B(m)| \underset{A,B}{\ll} \exp\left(\Delta m^2\right).$$

Доказательство. Для любых целых m_i и n_j из (3) и (4) следуют равенства

$$\mathcal{D}^{(0)}_{A,B}\begin{pmatrix} m_0, \dots, m_{k_0} \\ n_0, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} =$$
$$= \det\begin{pmatrix} A(m_0+n_0)B(m_0-n_0) & \dots & A(m_0+n_{k_0})B(m_0-n_{k_0}) \\ \dots & A(m_i+n_j)B(m_i-n_j) & \dots \\ A(m_{k_0}+n_0)B(m_{k_0}-n_0) & \dots & A(m_{k_0}+n_{k_0})B(m_{k_0}-n_{k_0}) \end{pmatrix} = 0, \tag{5}$$

$$\mathcal{D}^{(1)}_{A,B}\begin{pmatrix} m_0, \dots, m_{k_1} \\ n_0, \dots, n_{k_1} \end{pmatrix} =$$
$$= \det\begin{pmatrix} A(1+m_0+n_0)B(m_0-n_0) & \dots & A(1+m_0+n_{k_1})B(m_0-n_{k_1}) \\ \dots & A(1+m_i+n_j)B(m_i-n_j) & \dots \\ A(1+m_{k_1}+n_0)B(m_{k_1}-n_0) & \dots & A(1+m_{k_1}+n_{k_1})B(m_{k_1}-n_{k_1}) \end{pmatrix} = 0. \tag{6}$$

Переходя, в случае необходимости, от последовательности $A(n)$ к $A(n+1)$ и производя замены $m\to m+1$ и $n\to n+1$, мы поменяем местами (3) и (4). Поэтому найдутся такие целые $m_1,\dots,m_{k_0},n_1,\dots,n_{k_0}$, для которых

$$\mathcal{D}^{(0)}_{A,B}\begin{pmatrix} m_1,\dots,m_{k_0}\\ n_1,\dots,n_{k_0}\end{pmatrix}\neq 0.$$

Принимая во внимание предложение 1, мы можем считать, что $A(0)\neq 0$ и $B(0)\neq 0$.

В соответствии с (5), раскладывая определитель по первой строке, получим равенство

$$\mathcal{D}^{(0)}_{A,B}\begin{pmatrix} m,m_1,\dots,m_{k_0}\\ m,n_1,\dots,n_{k_0}\end{pmatrix}=A(2m)B(0)\mathcal{D}^{(0)}_{A,B}\begin{pmatrix} m_1,\dots,m_{k_0}\\ n_1,\dots,n_{k_0}\end{pmatrix}-$$
$$-A(m+n_1)B(m-n_1)\mathcal{D}^{(0)}_{A,B}\begin{pmatrix} m_1,m_2,\dots,m_{k_0}\\ n_1,n_2,\dots,n_{k_0}\end{pmatrix}+\dots+$$
$$+(-1)^{k_0}A(m+n_{k_0})B(m-n_{k_0})\mathcal{D}^{(0)}_{A,B}\begin{pmatrix} m_1,m_2,\dots,m_{k_0}\\ m,n_1,\dots,n_{k_0-1}\end{pmatrix}=0.$$

Отсюда получаем оценку

$$|A(2m)|\underset{A,B}{\ll}\max_{|l|\leqslant T}|A(m+l)|^2\max_{|l|\leqslant T}|B(m+l)|^2, \tag{7}$$

где $T=\max\{|m_1|,\dots,|m_{k_0}|,|n_1|,\dots,|n_{k_0}|\}$.

Если $k_1=0$, то для любых целых m и n выполняется равенство $A(1+m+n)\times\times B(m-n)=0$, а при $m=n$ $A(2m+1)B(0)=0$. Поскольку $B(0)\neq 0$, то $A(m)=0$ для всех нечетных номеров, и мы можем написать, что

$$|A(2m+1)|\ll\max_{|l|\leqslant T+1}|A(m+l)|^2\max_{|l|\leqslant T+1}|B(m+l)|^2. \tag{8}$$

Пусть теперь $k_1>0$. Действуя точно так же, как при доказательстве неравенства (7), с помощью равенства (4) получим оценку (8). По причине симметрии (см. замечание 3) оценки (7) и (8) справедливы при замене A на B.

Положим для $M>0$

$$G(M)=\max_{|m|\leqslant M}\max\{|A(m)|,|B(m)|\}. \tag{9}$$

Из (7) и (8) следует неравенство

$$G(2M)\leqslant QG^4(M+F)$$

с $F=T+4$ и положительной константой $Q=Q(A,B)$. Итерируя это неравенство для $M\geqslant 2$, получим

$$G(M)\leqslant QG^4\left(\frac{M}{2}+F\right)\leqslant Q^{1+4}G^{4^2}\left(\frac{M}{2^2}+\frac{F}{2}+F\right)\leqslant$$
$$\leqslant Q^{1+4+\dots+4^{l-1}}G^{4^l}\left(\frac{M}{2^l}+\frac{F}{2^{l-1}}+\dots+\frac{F}{2}+F\right).$$

Выберем натуральное l из условия

$$\frac{1}{2}F < \frac{M}{2^l} \leqslant F.$$

Тогда

$$4^l < 4\left(\frac{M}{F}\right)^2, \qquad 1+4+\ldots+4^{l-1} = \frac{4^l-1}{3} < 2\left(\frac{M}{F}\right)^2,$$
$$G(M) \leqslant Q^{2\left(\frac{M}{F}\right)^2} G^{\left(\frac{M}{F}\right)^2}(2F) \leqslant \exp\left(\Delta \cdot M^2\right)$$

с некоторым $\Delta = \Delta(A,B)$. Поэтому

$$|A(m)| + |B(m)| \leqslant 2G(|m|) \leqslant 2\exp\left(\Delta m^2\right).$$

Теорема 1 доказана. □

2. Гиперэллиптические системы функций

Пусть (A,B) — гиперэллиптическая система последовательностей с разложениями (3) и (4). Из теоремы 1 следует, что существует

$$\lim_{|m|\to\infty} \frac{1}{m^2} \log\left(1 + \max\{|A(m)|, |B(m)|\}\right) = \Delta(A,B) = \Delta,$$

который мы назовем показателем сходимости пары (A,B).

Из равенств (5) и (6) при $m_0 = m$ и $n_0 = n$ следует, что каждая из последовательностей $C_j^{(0)}$ и $D_j^{(0)}$, $C_j^{(1)}$ и $D_j^{(1)}$ может быть представлена как линейная комбинация последовательностей

$$A(m+m_i)B(m+m_i') \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

с некоторыми целыми m_i и m_i'. Поэтому мы можем считать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого целого m

$$\max\left\{\left|C_{j_1}^{(0)}(m)\right|, \left|D_{j_2}^{(0)}(m)\right|, \left|C_{j_3}^{(1)}(m)\right|, \left|D_{j_4}^{(1)}(m)\right|\right\} \underset{A,B}{\ll} \exp\left((\Delta+\varepsilon)|m|^2\right).$$

Пусть $q = exp(\pi i \tau)$ с $\operatorname{Im}\tau > 0$. Определим две функции

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A(m) e^{2imz} q^{m^2},$$
$$\mathrm{g}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(n) e^{2inz} q^{n^2}.$$

Теорема 2. *Пара* (f, g) *является гиперэллиптической системой функций с* $R(f,\mathrm{g}) \leqslant k_0 + k_1$.

Доказательство. Заметим, что соответствие

$$(m,n) \to \left(\frac{1}{2}(m+n), \frac{1}{2}(m-n)\right)$$

переводит $\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{Z}^2 \cup (\mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2))$. Принимая во внимание разложения (3) и (4) получим

$$f(z+w)g(z-w) = \sum_{m,n\,=\,-\infty}^{\infty} A(m)B(n)e^{2i(m(z+w)+n(z-w))}q^{m^2+n^2} =$$

$$= \sum_{m_1,n_1\,=\,-\infty}^{\infty} A(m_1+n_1)B(m_1-n_1)e^{2i2zm_1}e^{2izn_1}q^{2m_1^2+2n_1^2}+$$

$$+\sum_{m_1,n_1\,=\,-\infty}^{\infty} A(1+m_1+n_1)B(m_1-n_1)e^{2i2z\left(m_1+\frac{1}{2}\right)}e^{2iw\left(n_1+\frac{1}{2}\right)}q^{2\left(m_1+\frac{1}{2}\right)^2}q^{2\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sum_{j\,=\,1}^{k_0}\left(\sum_{m_1\,=\,-\infty}^{\infty} C_j^{(0)}(m_1)e^{2\pi i2zm_1}q^{2m_1^2}\right)\left(\sum_{n_1\,=\,-\infty}^{\infty} D_j^{(0)}(n_1)e^{2i2wn_1}q^{2n_1^2}\right)+$$

$$+\sum_{j\,=\,1}^{k_1}\left(\sum_{m_1\,=\,-\infty}^{\infty} C_j^{(1)}(m_1)e^{2i2z\left(m_1+\frac{1}{2}\right)}q^{2\left(m_1+\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(\sum_{n_1\,=\,-\infty}^{\infty} D_j^{(1)}(n_1)e^{2i2w\left(n_1+\frac{1}{2}\right)}q^{2\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Теорема 2 доказана. □

Пример. *Если (A, B) — экспоненциальная система последовательностей, то с помощью теоремы 2 получим все возможные пары гиперэллиптических систем функций ранга 2 (эллиптические системы). Это утверждение следует из результатов работы [4]. В частности, для A и B тождественно равных 1, получим тождество Гаусса (1).*

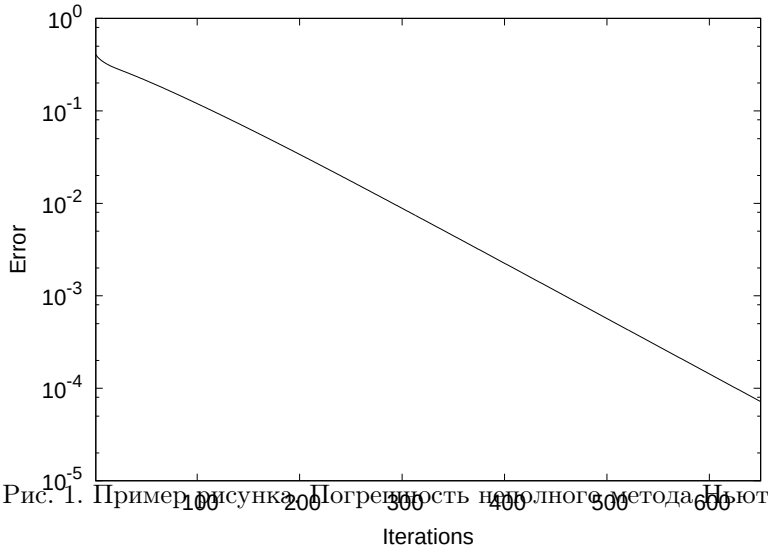

Рис. 1. Пример рисунка. Погрешность неполного метода Ньютона на первом тесте.

Ссылка на рис. 1 — 1.

Список литературы

[1] К. Ф. Гаусс, “Zur Theorie der neuen Transscendenten”, *Werke: Dritter Band [III]*, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866.

[2] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, v. 1, Berlin, 1881.

[3] В. Быковский, “Эллиптические системы последовательностей и функций”, 2015, http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo_Bykovskii.pdf.

[4] R. Rochberg, L. A. Rubel, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**, (1992).

Поступила в редакцию
12 сентября 2016 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00203 а) и ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток” (проект № 15-I-4-047).

Avdeeva M. O.[1], *Bykovskii V.A.*[1,2] Hyperelliptic system of sequences and functions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 1. P. 1–8.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences
[2] Pacific National University, Russia

ABSTRACT

The article offers a new method for constructing the pairs of functions which are holomorphic on the whole complex plane and satisfy functional equations such as the addition theorem for theta functions.

Key words: *functional equations, theta functions, Weierstrass sigma-function, nonlinear sequences.*

References

[1] K. F. Gauss, “Zur Theorie der neuen Transscendenten”, *Werke: Dritter Band [III]*, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866.

[2] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, v. 1, Berlin, 1881.

[3] V. Bykovskii, “Ellipticheskie sistemy posledovatel’nostei i funktsii”, 2015, http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo_Bykovskii.pdf.

[4] R. Rochberg, L. A. Rubel, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**, (1992).