ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 38–47
УДК 519.642.8
MSC2000 74P01

© Э.М. Вихтенко, Р.В. Намм*

Характеристические свойства модифицированного функционала Лагранжа для контактной задачи теории упругости с заданным трением

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Для полукоэрцитивного квазивариационного неравенства Синьорини исследован модифицированный функционал Лагранжа. Показано совпадение множества седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа.

Ключевые слова: *квазивариационное неравенство Синьорини, функционал Лагранжа, седловая точка.*

При решении плоской контактной задачи с трением между упругим телом $\overline{\Omega}$ и абсолютно твердой опорой [1, 2] (квазивариационного неравенства Синьорини) (рис. 1) методом последовательных приближений на каждом шаге метода возникает так называемая задача с заданным трением [1]. Она эквивалентна следующей задаче минимизации недифферен-

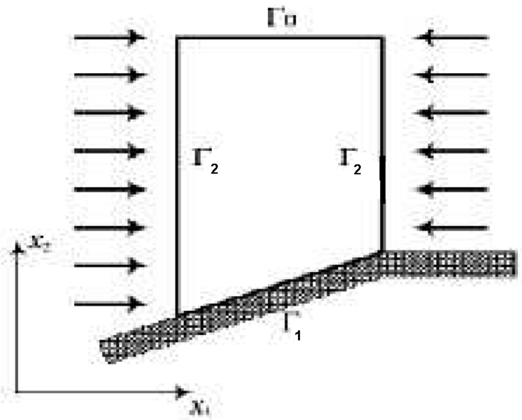

Рис. 1. Контакт между упругим телом и абсолютно твердой опорой с учетом трения

цируемого функционала:

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + \int\limits_{\Gamma_1} g^k|v_t|\,d\Gamma - \int\limits_{\Omega} F\,v\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_2} T\,v\,d\Gamma \to min \\ v \in K. \end{cases} \tag{1}$$

* Тихоокеанский государственный университет, 680035, г.Хабаровск, ул.Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: vikht@mail.khstu.ru, namm@mail.khstu.ru

Здесь $\Omega \in R^2$ — область с достаточно регулярной границей Γ, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ — открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ, причем $mes(\Gamma_0) > 0$, $mes(\Gamma_1) > 0$; $F = (f_1, f_2)$ — объемная сила, $T = (T_1, T_2)$ — боковое усилие, g_k — заданная сила трения, $g_k \geq 0$ на Γ_1; $a(u, v)$ — билинейная форма, определенная на $[W_2^1(\Omega)]^2 \times [W_2^1(\Omega)]^2$ следующим образом:

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, d\Omega, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{km}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ — компоненты тензора деформаций, $\sigma_{ij}(v) = c_{ijkm}\varepsilon_{km}(v)$ — компоненты тензора напряжений, функции $c_{ijpm} \in L_\infty(\Omega)$, i, j, m, $p = 1$, 2; $F = (f_1, f_2) \in [L_2(\Omega)]^2$; $T = (T_1, T_2) \in [L_2(\Gamma_2)]^2$, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Пусть $n = (n_1, n_2)$ – единичный вектор внешней нормали границы Γ, u_n и u_t – нормальная и тангенциальная составляющие вектора перемещений u, $\sigma_i = \sigma_{ij}n_j$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_n = \sigma_{ij}n_i n_j$, $\sigma_t = \sigma - \sigma_n n$;

Через K обозначено множество функций

$$K = \{v \in W : \ v_n \leq 0 \text{ на } \Gamma_1\}, \tag{3}$$

где

$$W = \left\{v \in [W_2^1(\Omega)]^2 : \ v_n \equiv v_2 = 0 \text{ на } \Gamma_0\right\}. \tag{4}$$

При геометрии области Ω, показанной на рисунке 1, минимизируемый функционал $J(v)$ в (1) не обладает свойством сильной выпуклости на всем пространстве W. Ядро R билинейной формы

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} c_{ijpm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{pm}(v)\, d\Omega$$

не является тривиальным и состоит из вектор-функций $\rho = (a, 0)$, где a — произвольная постоянная.

В [5] показано, что из условия

$$\int\limits_{\Omega} f_1\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2} T_1\, d\Gamma > 0 \tag{5}$$

следует

$$J(v) \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\|_{[W_2^1(\Omega)]^2} \to \infty \quad \forall v \in K, \tag{6}$$

что обеспечивает разрешимость задачи (1).

В дальнейшем изложении предполагаем, что решение $u \in K$ задачи (1) существует и принадлежит классу $[W_2^2(\Omega)]^2$.

На множестве $W \times L_2(\Gamma_1)$ определим классический функционал Лагранжа

$$L(v,l) = J(v) + \int\limits_{\Gamma_1} l v_n\, d\Gamma. \tag{7}$$

Обозначим через $(L_2(\Gamma_1))^+$ множество неотрицательных на Γ_1 функций, интегрируемых со своим квадратом.

В [5] показано, что если решение u вспомогательной задачи (1) принадлежит пространству $[W_2^2(\Omega)]^2$ и $mes\{x \in \Gamma_1 : \sigma_n(u) < 0\} > 0$, то u является единственным решением задачи (1), а пара $(u, -\sigma_n(u))$ — единственной седловой точкой функционала Лагранжа $L(v, l)$, то есть выполнено двустороннее неравенство

$$L(u,l) \leq L(u, -\sigma_n(u)) \leq L(v, -\sigma_n(u)) \quad \forall (v,l) \in W \times (L_2(\Gamma_1))^+. \tag{8}$$

Известные итерационные методы поиска седловой точки, основанные на классическом функционале Лагранжа (7), не обладают свойством сходимости, если ядро R не является тривиальным [3], [4]. Для преодоления этого затруднения построим некоторую модификацию функционала Лагранжа.

На пространтве $W \times L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_1)$ рассмотрим функционал [5]

$$\mathrm{K}(v,l,m) = \begin{cases} J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l+rm)^2 - l^2\right) d\Gamma & \text{если } v_n \le m \text{ на } \Gamma_1, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $r > 0$ — постоянная.

Определим модифицированный функционал Лагранжа

$$\mathrm{M}(v,l) = \inf_m \mathrm{K}(v,l,m). \tag{9}$$

Пара (v^*, l^*) называется седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа $\mathrm{M}(v,l)$, если выполняются неравенства

$$\mathrm{M}(v^*,l) \le \mathrm{M}\,(v^*,l^*) \le \mathrm{M}\,(v,l^*) \;\; \forall\, v \in W,\; \forall\, l \in L_2(\Gamma_1).$$

Исследуем свойства модифицированного функционала Лагранжа.

Очевидно, что

$$\mathrm{M}(v,l) = \inf_m \mathrm{K}(v,l,m) = \inf_{v_n \le m} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l+rm)^2 - l^2\right) d\Gamma \right\} =$$

$$= J(v) + \frac{1}{2r} \inf_{v_n \le m} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l+rm)^2 - l^2\right) d\Gamma$$

$$= J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left(\left((l + r\,v_n)^+\right)^2 - l^2\right) d\Gamma. \tag{10}$$

Определим функционал

$$\underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_v \mathrm{M}(v,l) = \inf_v \inf_m \mathrm{K}(v,l,m) =$$

$$= \inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left(\left((l + r\,v_n)^+\right)^2 - l^2\right) d\Gamma \right\}. \tag{11}$$

Так как

$$\inf_v \inf_m \mathrm{K}(v,l,m) = \inf_m \inf_v \mathrm{K}(v,l,m),$$

то

$$\underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_v \mathrm{M}(v,l) = \inf_m \inf_v \mathrm{K}(v,l,m) =$$

$$= \inf_m \inf_{v_n \le m} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l+rm)^2 - l^2\right) d\Gamma \right\} =$$

$$= \inf_m \left\{ \inf_{v_n \le m} J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l+rm)^2 - l^2\right) d\Gamma \right\} =$$

$$= \inf_{m} \left\{ \chi(m) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \Big((l + rm)^2 - l^2 \Big) \, d\Gamma \right\}, \tag{12}$$

где $\chi(m) = \inf\limits_{v_n \le m} J(v)$. Таким образом, функционал $\underline{\mathrm{M}}(l)$ может быть представлен двумя способами:

$$\underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_{v} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \Big(\big[(l + rv_n)^+ \big]^2 - l^2 \Big) d\Gamma \right\}, \tag{13}$$

$$\underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_{q} \left\{ \chi(q) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \Big((l + rm)^2 - l^2 \Big) \, d\Gamma \right\}. \tag{14}$$

Известно, что для любого $m \in L_2(\Gamma_1)$ при выполнении условия (5) задача

$$\begin{cases} J(v) \ \to \ \min, \\ v_n \le m \end{cases}$$

разрешима [5].

Покажем, что $\chi(m)$ — выпуклая функция. Действительно, пусть $\chi(m_1) = J(v_1)$, $\chi(m_2) = J(v_2)$. Для $0 < \lambda < 1$

$$\gamma \left((1-\lambda) v_1 + \lambda v_2 \right) = (1-\lambda)\gamma v_1 + \lambda \gamma v_2 \ge -(1-\lambda) m_1 - \lambda m_2,$$

$$-\gamma \left((1-\lambda) v_1 + \lambda v_2 \right) \le (1-\lambda) m_1 + \lambda m_2.$$

Поэтому

$$\chi((1-\lambda)m_1 + \lambda m_2) = \inf_{v_n \le (1-\lambda)m_1 + \lambda m_2} J(v) \le$$

$$\le J((1-\lambda)v_1 + \lambda v_2) \le (1-\lambda) J(v_1) + \lambda J(v_2) =$$

$$= (1-\lambda)\chi(m_1) + \lambda \chi(m_2),$$

т.е. $\chi(m)$ — выпуклый конечнозначный функционал на $L_2(\Gamma_1)$. Тогда

$$\chi(m) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \Big((l + rm)^2 - l^2 \Big) \, d\Gamma$$

является сильно выпуклым функционалом в $L_2(\Gamma_1)$ и задача (12) разрешима, то есть для любого $l \in L_2(\Gamma_1)$ существует $m(l)$ такой, что

$$\underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_{m} \left\{ \chi(m) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \Big((l + rm)^2 - l^2 \Big) \, d\Gamma \right\} = \chi(m(l)) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \Big((l + rm(l))^2 - l^2 \Big) \, d\Gamma.$$

Обозначим

$$v(l) = \arg \min_{v_n \le m(l)} J(v).$$

Тогда

$$\underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_{v_n \le m(l)} J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \Big((l + rm(l))^2 - l^2 \Big) \, d\Gamma =$$

$$= J(v(l)) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \Big((l + rm(l))^2 - l^2 \Big) \, d\Gamma = \mathrm{K}(v(l), l, m(l)).$$

С другой стороны, из (11) вытекает

$$\inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left(\left((l + r\, v_n)^+ \right)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma \right\} =$$

$$= \inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \inf_{v_n \le m} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma \right\} =$$

$$= \inf_v \inf_m \mathrm{K}(v, l, m) = \inf_m \inf_v \mathrm{K}(v, l, m) = \mathrm{K}(v(l), l, m(l)) =$$

$$= J(v(l)) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm(l))^2 - l^2 \right) \, d\Gamma =$$

$$= J(v(l)) + \frac{1}{2r} \inf_{v_n(l) \le m} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma. \tag{15}$$

Последнее равенство в (15) доказывается от противного. Пусть

$$J(v(l)) + \frac{1}{2r} \inf_{v_n(l) \le m} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma < J(v(l)) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + r\, m(l))^2 - l^2 \right) \, d\Gamma.$$

Тогда

$$J(v(l)) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + r\, m(l))^2 - l^2 \right) \, d\Gamma = \inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \inf_{v_n \le m} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma \right\} >$$

$$> J(v(l)) + \frac{1}{2r} \inf_{v_n(l) \le m} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma \ge \inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \inf_{v_n \le m} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma \right\}.$$

Полученное противоречие доказывает (15). Равенство (15) означает, что задача (11) разрешима и ее решение есть $v(l)$.

Рассмотрим задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathrm{M}}(l) \ \to \ \max, \\ l \in L_2(\Gamma_1), \end{array} \right. \tag{16}$$

которую назовем двойственной к задаче (1).

Введем функционал

$$\overline{\mathrm{M}}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_1)} \mathrm{M}(v, l) \quad \forall v \in [W_2^1(\Omega)]^2.$$

Предположим, что $v_n \le 0$. Тогда $\mathrm{K}(v, l, 0) = J(v)$ для любых $l \in L_2(\Gamma_1)$, и поэтому

$$\mathrm{M}(v, l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_1)} \mathrm{K}(v, l, m) \le J(v) \quad \forall v \in K.$$

Следовательно,

$$\overline{\mathrm{M}}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_1)} \mathrm{M}(v, l) \le J(v) \quad \forall v \in K. \tag{17}$$

Если $v_n \le m$, то

$$K(v, 0, m) = J(v) + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_1} m^2 \, d\Gamma.$$

Поэтому для всех $v \in [W_2^1(\Omega)]^2$ справедливо

$$\mathrm{M}(v,0) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_1)} \mathrm{K}(v,0,m) = \inf_{v_n \le m} \mathrm{K}(v,0,m) =$$

$$= \inf_{v_n \le m} \left\{ J(v) + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_1} m^2\, d\Gamma \right\} = J(v) + \frac{r}{2} \inf_{v_n \le m} \int\limits_{\Gamma_1} m^2\, d\Gamma \ge J(v).$$

Тогда

$$\overline{\mathrm{M}}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_1)} \mathrm{M}(v,l) \ge \mathrm{M}(v,0) \ge J(v) \quad \forall v \in [W_2^1(\Omega)]^2. \tag{18}$$

Из (17), (18) вытекает

$$\overline{\mathrm{M}}(v) = J(v) \quad \forall v \in K. \tag{19}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\tilde{\mathrm{K}}(v,l,m) = \begin{cases} J(v) + \int\limits_{\Gamma_1} l\, m\, d\Gamma, & \text{если } v_n \le m \text{ п.в. на } \Gamma_1, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для $l \in (L_2(\Gamma_1))^+$

$$\inf_{m \in L_2(\Gamma_1)} \tilde{\mathrm{K}}(v,l,m) = J(v) + \int\limits_{\Gamma_1} l\, m\, d\Gamma = L(v,l).$$

Очевидно, что

$$\mathrm{K}(v,l,m) \ge \tilde{\mathrm{K}}(v,l,m),$$

и поэтому для $l \in (L_2(\Gamma_1))^+$

$$\mathrm{M}(v,l) \ge L(v,l).$$

Следовательно, $\overline{\mathrm{M}}(v) \ge \overline{L}(v)$, где $\overline{L}(v) = \sup\limits_{l \in (L_2(\Gamma_1))^+} L(v,l)$.

Если $v \not\in K$, то

$$\overline{L}(v) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma_1))^+} L(v,l) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma_1))^+} \left\{ J(v) + \int\limits_{\Gamma_1} l\, v_n\, d\Gamma \right\} = +\infty, \tag{20}$$

и значит, $\overline{\mathrm{M}}(v) = +\infty$ для любого $v \not\in \mathcal{K}$.
Из (19), (20) теперь следует

$$\overline{\mathrm{M}}(v) = \begin{cases} J(v), & \text{при } v \in K, \\ +\infty & \text{при } v \not\in K. \end{cases}$$

Поэтому исходную задачу (1) можно представить в виде

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{M}}(v) - \min, \\ v \in [W_2^1(\Omega)]^2. \end{cases} \tag{21}$$

Очевидно, что

$$\inf_{v \in [W_2^1(\Omega)]^2} \sup_{l \in L_2(\Gamma_1)} \mathrm{M}(v,l) \ge \sup_{l \in L_2(\Gamma_1)} \inf_{v \in [W_2^1(\Omega)]^2} \mathrm{M}(v,l),$$

$$\inf_{v \in [W_2^1(\Omega)]^2} \overline{\mathrm{M}}(v) \ge \sup_{l \in L_2(\Gamma_1)} \underline{\mathrm{M}}(l). \tag{22}$$

Из неравенства (22) вытекает, что если для некоторой пары $(v^*, l^*) \in [W_2^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Gamma_1)$ выполняется равенство $\overline{\mathrm{M}}(v^*) = \underline{\mathrm{M}}(l^*)$, то v^* и l^* есть решения задач (21) и (16) соответственно.

Очевидно, что (v^*, l^*) является седловой точкой функционала $\mathrm{M}(v,l)$ и, наоборот, всякая седловая точка функционала $\mathrm{M}(v,l)$ соответствует решениям задач (21) и (16).

Для характеристики седловых точек модифицированного функционала Лагранжа важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы $(v^*, l^*) \in [W_2^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Gamma_1)$ была седловой точкой функционала $\mathrm{M}(v,l)$, необходимо и достаточно, чтобы v^* было решением задачи (21) и для любых $m \in L$ выполнялось неравенство*

$$\chi(m) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_1} m^2 \, d\Gamma \geq \chi(0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем необходимость. Пусть $(v^*, l^*) \in [W_2^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Gamma_1)$ есть седловая точка функционала $\mathrm{M}(v,l)$. Это означает, что

$$\sup_{l \in L_2(\Gamma_1)} \mathrm{M}(v^*, l) = \mathrm{M}(v^*, l^*) = \inf_{v \in [W_2^1(\Omega)]^2} \mathrm{M}(v, l^*),$$

$$\overline{\mathrm{M}}(v^*) = \underline{\mathrm{M}}(l^*).$$

Отсюда и из (22) следует, что v^* есть решение задачи (21), а l^* есть решение задачи (16). Следовательно,

$$\underline{\mathrm{M}}(l^*) = \overline{\mathrm{M}}(v^*) = \min_{v \in K} J(v) = \chi(0).$$

Это означает, что

$$\inf_{m \in L_2(\Gamma_1)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_1} m^2 \, d\Gamma \right\} = \chi(0),$$

то есть

$$\chi(m) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_1} m^2 \, d\Gamma \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma_1).$$

Теперь перейдем к доказательству достаточности. Пусть v^* есть решение задачи (21) и

$$\chi(m) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_1} m^2 \, d\Gamma \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma_1).$$

Тогда

$$\underline{\mathrm{M}}(l^*) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_1)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_1} m^2 \, d\Gamma \right\} \geq \chi(0) = \overline{\mathrm{M}}(v^*).$$

Из (22) вытекает $\overline{\mathrm{M}}(v) \geq \underline{\mathrm{M}}(l)$ для всех $v \in [W_2^1(\Omega)]^2$ и $l \in L_2(\Gamma_1)$. Поэтому $\overline{\mathrm{M}}(v^*) = \underline{\mathrm{M}}(l^*)$, и следовательно, v^* и l^* есть решения задач (21) и (16) соответственно.
Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть точка (v^*, l^*), принадлежащая $[W_2^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Gamma_1)$, является седловой точкой функционала Лагранжа $L(v,l)$. Тогда (v^*, l^*) будет седловой точкой и для модифицированного функционала $\mathrm{M}(v,l)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как точка (v^*, l^*), принадлежащая $[W_2^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Gamma_1)$, является седловой точкой функционала Лагранжа $L(v,l)$, то

$$L(v^*, l) \le L(v^*, l^*) \le L(v, l^*) \quad v \in [W_2^1(\Omega)]^2, \ l \in (L_2(\Gamma_1))^+.$$

Это означает, что

$$\sup_{l \in (L_2(\Gamma_1))^+} L(v^*, l) = L(v^*, l^*) = \inf_{v \in [W_2^1(\Omega)]^2} L(v, l^*),$$

$$\overline{L}(v^*) = L(v^*, l^*) = \underline{L}(l^*),$$

где, по определению,

$$\overline{L}(v) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma_1))^+} L(v, l), \quad \underline{L}(l) = \inf_{v \in [W_2^1(\Omega)]^2} L(v, l).$$

Следовательно,

$$\overline{L}(v^*) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma_1))^+} \left\{ J(v^*) + \int\limits_{\Gamma_1} l\, v_n^* \, d\Gamma \right\} = J(v^*) = \chi(0).$$

$$\underline{L}(l^*) = \inf_{v \in [W_2^1(\Omega)]^2} L(v, l^*) = \inf_{v \in [W_2^1(\Omega)]^2} \inf_{m \in L_2(\Gamma_1)} \tilde{\mathrm{K}}(v, l^*, m) =$$

$$= \inf_{m \in L_2(\Gamma_1)} \inf_{v \in [W_2^1(\Omega)]^2} \tilde{\mathrm{K}}(v, l^*, m) = \inf_{v_n \le m} \inf_{v \in [W_2^1(\Omega)]^2} \left\{ J(v^*) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma \right\} =$$

$$= \inf_{m \in L_2(\Gamma_1)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma \right\}.$$

Поэтому

$$\chi(0) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_1)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma \right\},$$

или

$$\chi(m) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma \ge \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma_1).$$

Так как v^* есть решение задачи (21) и

$$\chi(m) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_1} m^2 \, d\Gamma \ge \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma \ge \chi(0),$$

то из теоремы 1 следует, что (v^*, l^*) является седловой точкой для функционала $\mathrm{M}(v,l)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* (v^*, l^*) *— седловая точка функционала* $\mathrm{M}(v,l)$. *Тогда* (v^*, l^*) *является седловой точкой функционала* $L(v,l)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $-l^* \in \partial\chi(0)$, где $\partial\chi(0)$ — субдифференциал функции $\chi(m)$ в точке $m = 0$. Если исходить из определения субдифференциала, это означает, что

$$\chi(m) - \chi(0) \ge -\int\limits_{\Gamma_1} l^* \, m \, d\Gamma \quad m \in L_2(\Gamma_1),$$

$$\chi(\bar m)+\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,\bar m\,d\Gamma\ge\chi(0)\quad m\in L_2(\Gamma_1).$$

Пусть, напротив, $-l^*\not\in\partial\chi(0)$. Тогда найдется такой элемент $\bar m\in L_2(\Gamma_1)$, что

$$\chi(\bar m)+\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,\bar m\,d\Gamma<\chi(0). \tag{23}$$

Обозначим $\zeta=\chi(0)-\chi(\bar m)-\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,\bar m\,d\Gamma>0$ и $m(\lambda)=\lambda\bar m+(1-\lambda)\cdot 0$, $0<\lambda<1$. По теореме 1

$$\chi(m)+\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,m\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_1} m^2\,d\Gamma\ge\chi(0)\quad m\in L_2(\Gamma_1).$$

Поэтому при $m=\lambda\bar m$

$$\chi(0)\le\chi(m(\lambda))+\lambda\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,\bar m\,d\Gamma+\frac{r\lambda^2}{2}\int\limits_{\Gamma_1}\bar m^2\,d\Gamma\le$$

$$\le\lambda\chi(\bar m)+(1-\lambda)\chi(0)+\lambda\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,\bar m\,d\Gamma+\frac{r\lambda^2}{2}\int\limits_{\Gamma_1}\bar m^2\,d\Gamma=$$

$$=\lambda\left(\chi(\bar m)-\chi(0)+\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,\bar m\,d\Gamma\right)+\chi(0)+\frac{r\lambda^2}{2}\int\limits_{\Gamma_1}\bar m^2\,d\Gamma,$$

$$\lambda\left(\chi(0)-\chi(\bar m)-\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,\bar m\,d\Gamma\right)\le\frac{r\lambda^2}{2}\int\limits_{\Gamma_1}\bar m^2\,d\Gamma,$$

$$\chi(0)-\chi(\bar m)-\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,\bar m\,d\Gamma\le\frac{r\lambda}{2}\int\limits_{\Gamma_1}\bar m^2\,d\Gamma.$$

Отсюда и из (23) вытекает, что

$$0<\zeta\le\frac{r\lambda}{2}\int\limits_{\Gamma_1}\bar m^2\,d\Gamma.$$

Устремляя λ к нулю, получим $0<\zeta\le 0$. Противоречие показывает, что $-l^*\in\partial\chi(0)$, т.е.

$$\chi(m)+\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,m\,d\Gamma\ge\chi(0)\quad m\in Ł. \tag{24}$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,m\,d\Gamma\ge\chi(0)-\chi(m)\quad m\ge 0.$$

Тем самым показано, что $l\in(L_2(\Gamma_1))^+$. Отсюда следует

$$\underline{L}(l^*)=\inf_{v\in[W_2^1(\Omega)]^2}L(v,l^*)=\inf_{v\in[W_2^1(\Omega)]^2}\left\{\chi(m)+\int\limits_{\Gamma_1} l^*\,m\,d\Gamma\right\}.$$

Тогда из (24)
$$\underline{L}(l^*) \geq \chi(0).$$
Так как по теореме 1 элемент v^* есть решение задачи (21),
$$\overline{L}(v^*) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma_1))^+} L(v^*, l) =$$
$$= \sup_{l \in (L_2(\Gamma_1))^+} \left\{ J(v^*) - \int\limits_{\Gamma_1} l\,\gamma v^*\, d\Gamma \right\} = J(v^*) = \chi(0).$$
Поэтому
$$\chi(0) = \overline{L}(v^*) \geq \underline{L}(l^*) \geq \chi(0), \quad \text{то есть} \quad \overline{L}(v^*) = \underline{L}(l^*).$$
Следовательно, (v^*, l^*) есть седловая точка функционала $L(v, l)$.
Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает, что множество седловых точек функционала Лагранжа $L(v, l)$ совпадает со множеством седловых точек модифицированного функционала Лагранжа $\mathrm{M}(v, l)$. Для поиска седловых точек модифицированного функционала $\mathrm{M}(v, l)$ могут быть построены эффективные итерационные процессы.

Список литературы

1. *Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я.* Решение вариационных неравенств в механике. – М.: Мир, 1986. – 270 с.

2. *Kikuchi N., Oden T.* Contact problem in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods. – Philadelphia: SIAM, 1988. – 495 c.

3. *Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 576 с.

4. *Glowinski R.* Numerical methods for nonlinear variational problems. New York: Springer, 1984. – 493 p.

5. *Вихтенко Э.М., Намм Р.В.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением. //Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т.47. — № 12. — С. 2023-2036.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 мая 2009 г.

Vikhtenko E.M., Namm R.V. On a characteristic properties of modified Lagrangian functional in a problem of elasticity with a given friction. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 38–47.

ABSTRACT

The modified Lagrangian functional was investigated for Semicoercive Quasi-Variational Signorini Inequality. It wa shown that the sets of saddle points of classical and modified Lagrangian functionals are the same.

Key words: *Semicoercive Quasi-Variational Signorini Inequality, Lagrangian functional, saddle point*