

© А.С. Ткаченко*

О сходимости методов двойственности в вариационном неравенстве Синьорини

Исследуются методы двойственности, построенные на основе классического и модифицированного функционалов Лагранжа.

Ключевые слова: *методы двойственности, функционал Лагранжа, седловая точка, метод Удзавы.*

Введение

Схемы двойственности получили широкое распространение при исследовании и численном решении вариационных неравенств в механике. При этом, как правило, рассматриваются методы двойственности, основанные на классической схеме построения функционала Лагранжа [1], [2], [3]. Известно, что известные методы поиска седловой точки для классического функционала Лагранжа сходятся только по прямой переменной, причем только в коэрцитивных задачах и при малых сдвигах по двойственной переменной. Для преодоления этого затруднения в работах [4], [5], [6], [7] рассматривается модифицированный функционал Лагранжа. Методы двойственности, основанные на модифицированном функционале Лагранжа, обеспечивают сходимость к седловой точке как по прямой, так и по двойственной переменной, причем не только в коэрцитивных, но и в полукоэрцитивных вариационных неравенствах. В настоящей работе проводится сравнительный анализ эффективности метода Удзавы, построенного на основе классического и модифицированного функционалов Лагранжа для решения коэрцитивной скалярной задачи Синьорини.

1. Коэрцитивная скалярная задача Синьорини.

Рассматривается коэрцитивная вариационная задача Синьорини [1], [8]. Она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) d\Omega - \int_{\Omega} f v d\Omega \rightarrow \min \\ v \in G = \{w \in W_2^1(\Omega) : \gamma w \geq 0 \text{ почти всюду на } \Gamma\}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\Omega \in R^n$ ($n = 2, 3$) — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ , $f \in L_2(\Omega)$ — заданная функция и $\gamma w \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ — след функции $w \in W_2^1(\Omega)$ на Γ .

Вариационная задача (1) соответствует нелинейной краевой задаче

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \Omega \\ u \geq 0, \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, u \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \Gamma, \end{cases}$$

где n — единичный вектор внешней нормали к Γ .

* Тихоокеанский государственный университет, 680035, г.Хабаровск, ул.Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: taskhv@mail.ru

Введем классический функционал Лагранжа $(\forall (v, l) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma))$

$$L(v, l) = J(v) - \int_{\Gamma} l \gamma v d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) d\Omega - \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Gamma} l \gamma v d\Gamma.$$

Пусть $(L_2(\Gamma))^+$ — конус неотрицательных функций, интегрируемых с квадратом на Γ .

Определение. Точка $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^+$ называется седловой точкой функционала $L(v, l)$, если выполнено двустороннее неравенство

$$L(v^*, l) \leq L(v^*, l^*) \leq L(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in W_2^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^+.$$

Если решение u задачи (1) принадлежит $W_2^2(\Omega)$, то точка $(u, \frac{\partial u}{\partial n})$ является единственной седловой точкой функционала $L(v, l)$ на множестве $W_2^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^+$, то есть $v^* = u$ почти всюду в Ω и $l^* = \frac{\partial u}{\partial n}$ почти всюду на Γ [3].

Для поиска седловой точки рассмотрим метод Удзавы [2], [3].

Пусть $p^0 \in (L_2(\Gamma))^+$. Далее для $n = 0, 1, 2, \dots$ вычислим (u^n, p^{n+1}) по формулам

$$L(u^n, p^n) \leq L(v, p^n), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad u^n \in W_2^1(\Omega), \quad (2)$$

$$p^{n+1} = P_{(L_2(\Gamma))^+}(p^n - \rho \gamma u^n) = (p^n - \rho \gamma u^n)^+, \quad (3)$$

где $P(v)_{(L_2(\Gamma))^+}$ — оператор проектирования v на $(L_2(\Gamma))^+$ в норме $L_2(\Gamma)$, $\rho > 0$ — подходящим образом подобранная постоянная.

Задача (2) является задачей безусловной минимизации.

Приведенный алгоритм обеспечивает сходимость последовательности $\{u^n\}$ к решению u задачи (1), но не гарантирует сходимость последовательности $\{p^n\}$ к $\frac{\partial u}{\partial n}$. Действительно, обозначив $p = \frac{\partial u}{\partial n}$, получаем, что

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma} p \gamma v d\Gamma, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad u \in W_2^1(\Omega), \quad (4)$$

$$\int_{\Gamma} (l - p) \gamma u d\Gamma \geq 0, \quad \forall l \in (L_2(\Gamma))^+, \quad p \in (L_2(\Gamma))^+. \quad (5)$$

Неравенство (5) можно переписать так:

$$\int_{\Gamma} (l - p)(p - \rho \gamma u - p) d\Gamma \leq 0, \quad \forall l \in (L_2(\Gamma))^+, \quad \forall \rho > 0,$$

что эквивалентно

$$p = P_{(L_2(\Gamma))^+}(p - \rho \gamma u). \quad (6)$$

Пусть

$$\bar{u}^n = u^n - u, \quad \bar{p}^n = p^n - p.$$

Из (6) получаем

$$\|\bar{p}^{n+1}\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|\bar{p}^n - \rho \gamma \bar{u}^n\|_{L_2(\Gamma)}. \quad (7)$$

Из (7) следует

$$\|\bar{p}^n\|_{L_2(\Gamma)}^2 - \|\bar{p}^{n+1}\|_{L_2(\Gamma)}^2 \geq 2\rho \int_{\Gamma} \gamma \bar{u}^n \bar{p}^n d\Gamma - \rho^2 \|\gamma \bar{u}^n\|_{L_2(\Gamma)}^2. \quad (8)$$

Приняв $v = \bar{u}^n$ в (4), получим

$$a(\bar{u}^n, \bar{u}^n) = \int_{\Gamma} \bar{p}^n \gamma \bar{u}^n d\Gamma. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\|\bar{p}^n\|_{L_2(\Gamma)}^2 - \|\bar{p}^{n+1}\|_{L_2(\Gamma)}^2 \geq \rho(2 - \rho \|\gamma\|^2) \|\bar{u}^n\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \quad (10)$$

Если $0 < \rho < \frac{2}{\|\gamma\|^2}$, то последовательность $\{\|\bar{p}^n\|_{L_2(\Gamma)}^2\}$ убывающая и, следовательно, сходится (см. [3, стр. 67]). Поэтому

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\|\bar{p}^n\|_{L_2(\Gamma)}^2 - \|\bar{p}^{n+1}\|_{L_2(\Gamma)}^2 \right) = 0,$$

из чего следует

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \|\bar{u}^n\|_{W_2^1(\Omega)} = 0.$$

Так как $\bar{u}^n = u^n - u$, то в пространстве $W_2^1(\Omega)$ последовательность $\{u^n\}$ сходится к решению u . Однако из-за того, что ρ ограничено некоторой достаточно малой константой, применение классического функционала Лагранжа является не всегда достаточно эффективным для численного решения. Для преодоления этого затруднения введем модифицированный функционал Лагранжа

$$M(v, l) = J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma} \left\{ [(l - r\gamma v)^+]^2 - l^2 \right\} d\Gamma \quad \forall (v, l) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma),$$

где $r > 0$ — константа, символ w^+ означает $\max\{0, w\}$, то есть $(l - r\gamma v)^+ = \max\{0, l - r\gamma v\}$.

Определение. Точка $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))$ называется седловой точкой функционала $M(v, l)$, если выполнено двустороннее неравенство

$$M(v^*, l) \leq M(v^*, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma).$$

Для модифицированного функционала можно рассмотреть аналогичный (2), (3) алгоритм решения задачи (1).

Пусть $p^0 \in (W_2^{1/2}(\Gamma))^+$. Далее для $n = 0, 1, 2, \dots$ вычислим (u^n, p^{n+1}) по формулам

$$M(u^n, p^n) \leq M(v, p^n) \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad u^n \in W_2^1(\Omega).$$

Отметим, что модифицированный функционал Лагранжа обеспечивает сходимость вырабатываемой последовательности $\{u^n, p^n\}$ к $\{u, \frac{\partial u}{\partial n}\}$ при достаточной регулярности решений вспомогательных задач (см. [4]). Напомним, что с классическим функционалом Лагранжа удается доказать лишь сходимость последовательности $\{u^n\}$.

Рассмотрим аппроксимацию задачи (1) по методу конечных элементов в предположении, что $\Omega \in R^2$ — ограниченный многоугольник. Введем следующие обозначения: F_h — триангуляция области Ω , удовлетворяющая стандартным требованиям [1] (h — характерный параметр триангуляции); N_h — множество всех узлов триангуляции F_h ; $M_h = \Gamma \cap N_h$ — множество узлов триангуляции F_h на границе области Ω ; V_h — линейная оболочка соответствующих кусочно-аффинных базисных функций; $G_h = \{v_h \in V_h : v_h(s) \geq 0 \quad s \in M_h\}$. Отметим, что, так как Ω — многоугольник, обеспечено включение $G_h \subset G$.

Заменим задачу (1) на задачу

$$\begin{cases} J(v_h) \rightarrow \min, \\ v_h \in G_h. \end{cases} \quad (11)$$

Для решения u_h задачи (11) справедлива формула $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{W_2^1(\Omega)} = 0$, где u — решение задачи (1). В работе [9] при условии, что $u \in W_2^2(\Omega)$, доказывается оценка $\|u_h - u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq ch^{3/4}$, где c — положительная константа, не зависящая от h .

Стандартными преобразованиями конечномерная задача (11) сводится к задаче квадратичного программирования [1],[2]

$$\begin{cases} I(y) = \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle p, y \rangle \rightarrow \min, \\ y_i \geq 0, \quad i \in \bar{I}_h, \end{cases} \quad (12)$$

где $y_i, i \in I_h$ — коэффициенты разложения произвольного элемента $v_h \in V_h$ по кусочно-аффинным базисным функциям, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,|N_h|}$, ($|N_h|$ — количество узлов триангуляции F_h), $a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega$ (φ_i — соответствующие кусочно-аффинные базисные функции), $p = (p_i)_{i=1,\dots,|N_h|}$, $p_i = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega$.

Рассмотрим конечномерные аналоги метода Удзавы с классической и модифицированной функциями Лагранжа для решения задачи (12).

2. Алгоритм решения коэрцитивной скалярной задачи Синьорини методом Удзавы на основе классической функции Лагранжа

Составим классическую функцию Лагранжа для задачи (12):

$$\widehat{L}(y, l) = I(y) - h \sum_{i \in I_h} l_i y_i \quad \forall y \in R^{|N_h|}, \quad l \in R^{|M_h|}.$$

Метод Удзавы с классической функцией $L(y, l)$ выглядит так: задаем начальный вектор $l^0 = (l_1^0, \dots, l_{|M_h|}^0)$. Далее

- 1) на k -ом шаге решаем задачу безусловной минимизации $L(y, l^k)$ по переменной y , то есть находим $y^k = \arg \min_{y \in R^{|N_h|}} \widehat{L}(y, l^k)$;
- 2) полагаем $l^{k+1} = (l^k - \rho y^k)^+$ и переходим на шаг 1.

На первом шаге метода Удзавы требуется решить вспомогательную задачу вида

$$\begin{cases} \widehat{L}(y, l^k) \rightarrow \min, \\ y \in R^{|N_h|}. \end{cases} \quad (13)$$

Для решения задачи (13) применим метод поточечной релаксации.

Задаем начальный вектор $z^0 = (z_1^0, \dots, z_{|N_h|}^0)$. На $(n+1)$ -ом шаге итерационного процесса координаты $z_i^{n+1}, i = 1, 2, \dots, |N_h|$ определяются из условия $(\forall t \in (-\infty, +\infty))$

$$\widehat{L}((z_1^{n+1}, \dots, z_{i-1}^{n+1}, z_i^{n+1}, z_{i+1}^n, \dots, z_{|N_h|}^n), l^k) \leq \widehat{L}((z_1^{n+1}, \dots, z_{i-1}^{n+1}, t, z_{i+1}^n, \dots, z_{|N_h|}^n), l^k).$$

Функция $\widehat{L}(z)$ непрерывно дифференцируема по $z_i, i = 1, \dots, |N_h|$. При этом

$$\frac{\partial \widehat{L}(z)}{\partial z_i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{|N_h|} a_{ij} z_j - p_i, & i \in I_h \setminus \bar{I}_h, \\ \sum_{j=1}^{|N_h|} a_{ij} z_j - (p_i + h l_i^k), & i \in \bar{I}_h, \end{cases} \quad (14)$$

где $a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega$, $p_i = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega$.

Из формулы (14) непосредственно вытекает, что

$$z_i^{n+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum_{j>i} a_{ij} z_j^n - p_i \right) \text{ для } i \in I_h \setminus \bar{I}_h,$$

$$z_i^{n+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum_{j>i} a_{ij} z_j^n - (p_i + h l_i^k) \right) \text{ для } i \in \bar{I}_h.$$

3. Алгоритм решения коэрцитивной скалярной задачи Синьорини методом Удзавы на основе модифицированной функции Лагранжа

Составим модифицированную функцию Лагранжа для задачи (12):

$$\widehat{M}(y, l) = I(y) + \frac{h}{2r} \sum_{i \in \bar{I}_h} \left((l_i - r y_i)^+ \right)^2 - l_i^2, \quad \forall y \in R^{|N_h|}, \quad l \in R^{|M_h|},$$

где $r > 0$ — произвольная постоянная.

Метод Удзавы с модифицированной функцией $M(y, l)$ выглядит так: задаем начальный вектор $l^0 = (l_1^0, \dots, l_{|M_h|}^0)$. Далее

- 1) на k -ом шаге решаем задачу безусловной минимизации $M(y, l^k)$ по переменной y , то есть находим $y^k = \arg \min_{y \in R^{|N_h|}} \widehat{M}(y, l^k)$;
- 2) полагаем $l^{k+1} = (l^k - r y^k)^+$ и переходим на шаг 3.

На первом шаге метода Удзавы требуется решить вспомогательную задачу вида

$$\begin{cases} \widehat{M}(y, l^k) \rightarrow \min, \\ y \in R^{|N_h|}. \end{cases} \quad (15)$$

Для решения задачи (15) применим метод поточечной релаксации.

Задаем начальный вектор $z^0 = (z_1^0, \dots, z_{|N_h|}^0)$. На $(n+1)$ -ом шаге итерационного процесса координаты z_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots, |N_h|$ определяются из условия

$$\widehat{M} \left((z_1^{n+1}, \dots, z_{i-1}^{n+1}, z_i^{n+1}, z_{i+1}^n, \dots, z_{|N_h|}^n), l^k \right) \leq \widehat{M} \left((z_1^{n+1}, \dots, z_{i-1}^{n+1}, t, z_{i+1}^n, \dots, z_{|N_h|}^n), l^k \right)$$

$$\forall t \in (-\infty, +\infty).$$

Функция $\widehat{M}(z)$ непрерывно дифференцируема по z_i , $i = 1, \dots, |N_h|$. При этом

$$\frac{\partial \widehat{M}(z)}{\partial z_i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{|N_h|} a_{ij} z_j - p_i, & i \in I_h \setminus \bar{I}_h, \\ \sum_{j=1}^{|N_h|} a_{ij} z_j - p_i - h(l_i^k - r z_i)^+, & i \in \bar{I}_h, \end{cases} \quad (16)$$

где $a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega$, $p_i = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega$.

Из формулы (16) непосредственно вытекает, что

$$z_i^{n+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum_{j>i} a_{ij} z_j^n - p_i \right) \text{ для } i \in I_h \setminus \bar{I}_h.$$

Для $i \in \bar{I}_h$ обозначим $\psi_i = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum_{j>i} a_{ij} z_j^n - p_i \right)$. Получаем

$$z_i^{n+1} = \begin{cases} \psi_i, & \psi_i \geq \frac{l_i^k}{r}, \\ -\frac{1}{a_{ii}+rh} \left(\sum_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum_{j>i} a_{ij} z_j^n - (p_i + hl_i^k) \right), & \psi_i < \frac{l_i^k}{r}. \end{cases}$$

4. Примеры численного решения задачи

Пусть Ω — единичный квадрат. Триангуляция области Ω проведена с помощью равномерной сетки и показана на рис. 4.1.

Пусть функция f на $\frac{1}{4}$ области Ω принимает значение, равное -6.0004 , а на остальной части — значение, равное 2 (рис. 4.2).

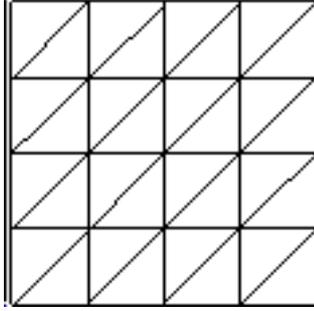


Рис. 4.1. Триангуляция области Ω .

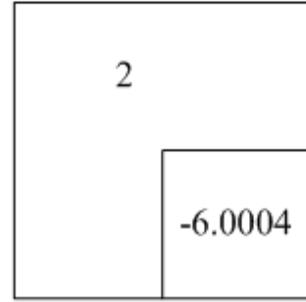


Рис. 4.2. Значения функции f на области Ω .

Решим рассмотренную задачу методом Удзавы на основе классической и модифицированной функций Лагранжа с постоянной сеткой (см. разделы 2 и 3).

В качестве стартовой точки $(y^0, l^0) \in R^{|N_h|} \times R^{|M_h|}$ в алгоритмах 1), 2) и 3), 4) возьмем $(0,0)$. Это означает, что $z^0 = (0, \dots, 0)$. Для алгоритма с классической функцией возьмем достаточно малое $\rho = 0,5$, а для алгоритма с модифицированной функцией — достаточно большое $r = 150$. Напомним, что в непрерывном случае $0 < \rho < \frac{2}{\|\gamma\|^2}$. Условия завершения вычислений по внутренним итерациям (по n , шаги 1) и 3) алгоритмов) и внешним (по k , шаги 2) и 4) алгоритмов)

$$\max_i |z_i^{n+1} - z_i^n| \leq 10^{-3}h,$$

$$\max_i |l_i^{k+1} - l_i^k| \leq 10^{-1}h,$$

соответственно, где h — постоянный шаг триангуляции области Ω .

Решим задачу на различных сетках с $h = 1/8, 1/16, 1/32, 1/64$. Результаты решений обоими методами представлены в таблицах 4.1 и 4.2. Время выполнения задачи обоими методами приведено лишь с целью сравнения их эффективности, так как оно зависит от вычислительной мощности компьютера, на котором выполняются алгоритмы.

В таблице 4.3 представлен сравнительный анализ эффективности решения обоими методами. В качестве критериев эффективности выступают соотношение числа внутренних итераций и времени выполнения решения обоими алгоритмами.

Таблица 4.1. Результаты решения задачи методом Удзавы на основе классической функции Лагранжа

Шаг сетки, h	Число внешних итераций метода (по k)	Число внутренних итераций метода (по n)	Время выполнения алгоритма, сек.
1/8	46	796	4,6
1/16	81	2453	31,4
1/32	82	6898	377,2
1/64	115	18042	4373,3

Таблица 4.2. Результаты решения задачи методом Удзавы на основе модифицированной функции Лагранжа

Шаг сетки, h	Число внешних итераций метода (по k)	Число внутренних итераций метода (по n)	Время выполнения алгоритма, сек.
1/8	39	275	1,2
1/16	21	729	9,9
1/32	13	2288	124,3
1/64	8	6955	1625,4

Таблица 4.3. Сравнительный анализ эффективности рассмотренных методов

Шаг сетки, h	Соотношение числа внутренних итераций метода Удзавы на основе классической функции Лагранжа к числу внутренних итераций метода Удзавы на основе модифицированной функции	Соотношение времени выполнения метода Удзавы на основе классической функции Лагранжа ко времени выполнения метода Удзавы на основе модифицированной функции
1/8	2,89	3,83
1/16	3,36	3,17
1/32	3,01	3,03
1/64	2,59	2,69

Диаграмма 4.1. Время выполнения решения задачи обоими методами



Графики решения задачи методом Удзавы, основанном на модифицированной функции Лагранжа приведены на рис. 4.3.

Диаграмма 4.2. Анализ эффективности рассмотренных алгоритмов

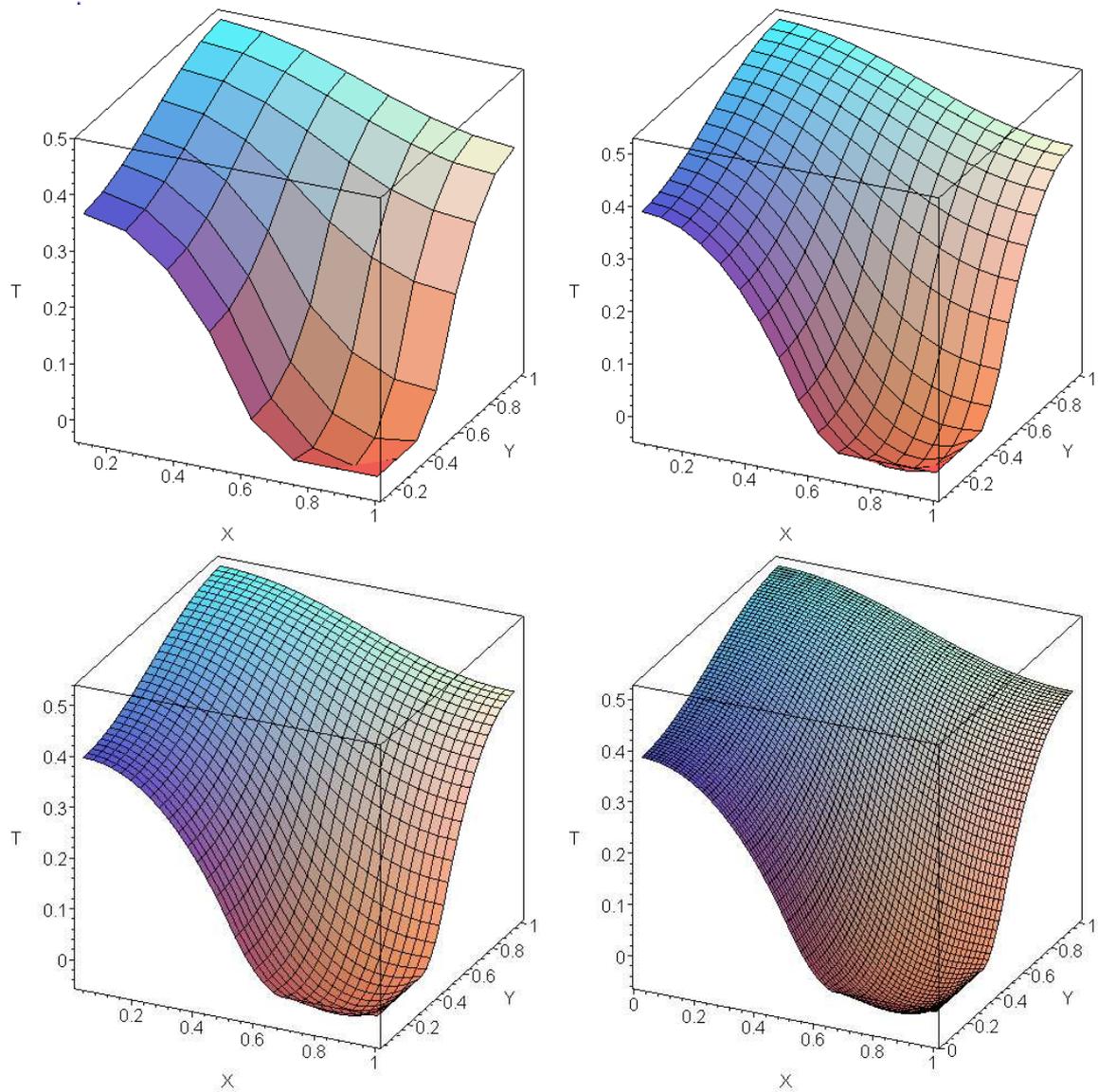
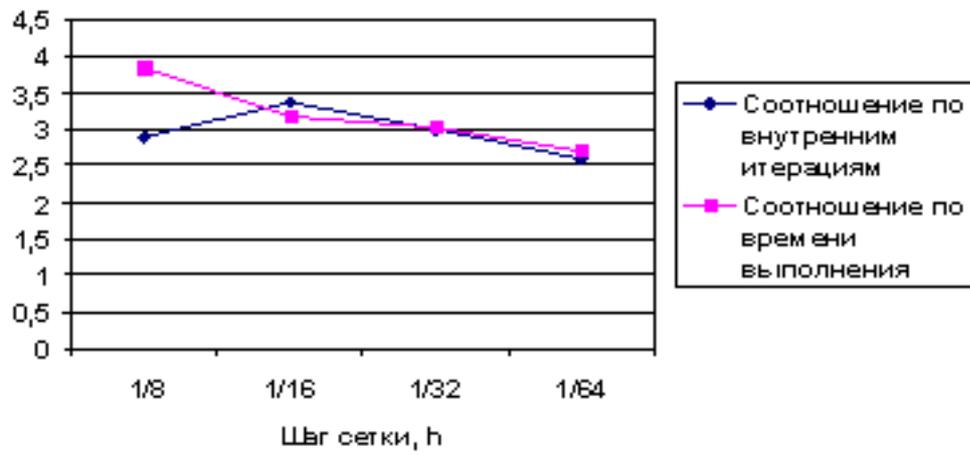


Рис. 4.3. Графики решения задачи методом Удзавы, основанном на модифицированной функции Лагранжа на разных сетках с постоянным шагом 1/8, 1/16, 1/32 и 1/64

Рассмотрим тот же численный пример при тех же условиях для другой стартовой точки $z^0 = (1, \dots, 1)$. Результаты решений обоими методами представлены в таблицах 4.4 и 4.5.

Таблица 4.4. Результаты решения задачи методом Удзавы на основе классической функции Лагранжа

Шаг сетки, h	Число внешних итераций метода (по k)	Число внутренних итераций метода (по n)	Время выполнения алгоритма, сек.
1/8	46	1310	12,9
1/16	81	4049	176,0
1/32	82	11244	609,1
1/64	130	28286	6978,3

Таблица 4.5. Результаты решения задачи методом Удзавы на основе модифицированной функции Лагранжа

Шаг сетки, h	Число внешних итераций метода (по k)	Число внутренних итераций метода (по n)	Время выполнения алгоритма, сек.
1/8	39	364	3,6
1/16	21	1064	47,7
1/32	13	3461	194,2
1/64	8	11235	2723,4

В таблице 4.6 представлен сравнительный анализ эффективности обоих методов. В качестве критериев эффективности выступают соотношение числа внутренних итераций и времени выполнения решения обоими алгоритмами.

Таблица 4.6. Сравнительный анализ эффективности рассмотренных методов

Шаг сетки, h	Соотношение числа внутренних итераций метода Удзавы на основе классической функции Лагранжа к числу внутренних итераций метода Удзавы на основе модифицированной функции	Соотношение времени выполнения метода Удзавы на основе классической функции Лагранжа ко времени выполнения метода Удзавы на основе модифицированной функции
1/8	3,60	3,58
1/16	3,81	3,69
1/32	3,25	3,14
1/64	2,52	2,56

Из полученных результатов (для двух наборов данных) видно, что в приведенном примере метод Удзавы, основанный на модифицированной функции Лагранжа, примерно в 2-3 раза эффективнее метода Удзавы, основанного на классической функции Лагранжа. Также на данном численном примере был подтвержден теоретический вывод о необходимой малости параметра сдвига ρ по двойственной переменной в алгоритме с классической функцией Лагранжа. Для данного примера, при $\rho \geq 1$, алгоритм не приводил к решению задачи.

Список литературы

1. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986.
2. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Трёмольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.

3. *Glowinski R.* Numerical methods for nonlinear variational problems. New York: Springer, 1984.
4. *Бу Г., Намм Р.В., Сачков С.А.* Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. №1. С. 26-36.
5. *Бу Г., Ким С., Намм Р.В., Сачков С.А.* Метод итеративной проксимальной регуляризации для поиска седловой точки в полукоэрцитивной задаче Синьорини // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. №11. С. 2024-2031.
6. *Вихтенко Э.М., Намм Р.В.* Характеристические свойства модифицированного функционала Лагранжа в полукоэрцитивной скалярной задаче Синьорини // Вестник ТОГУ. 2008. №4 (11). С. 77-86.
7. *Намм Р.В., Ткаченко А.С.* Решение полукоэрцитивной скалярной задаче Синьорини методом Узавы // Вестник ТОГУ. 2007. №4 (7). С. 161-170.
8. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в физике и механике. М.: Наука, 1980.
9. *Scarpini F., Vivaldi M.A.* Error estimates for the approximation of some unilateral problems // R.A.I.R.O. Analyse Numerique / Numerical Analysis. 1977. №11. С. 197-208.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 31 июля 2009 г.

Tkachenko A.S. On convergence duality methods in variation inequality of Signorini. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 70–79.

ABSTRACT

Research duality methods constructed on basis of classical and modify functionals of Lagrange.

Key words: *duality methods, functional of Lagrange, saddle point, Uzawa method.*