ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 2. С. 192–198

УДК 519.248:62-192+519.176
MSC2000 60K10+94Cxx

© Г.Ш. Цициашвили*

Сравнительный анализ надежности сетей с идентичными ребрами

В работе строятся экономные и быстрые алгоритмы вычисления параметров асимптотической формулы Буртина – Питтеля для сети с идентичными высоконадежными ребрами. Эти алгоритмы применяются к процедуре сравнения сетей, получающихся из радиально-кольцевой сети удалением некоторых ребер, стягиванием их в вершины и раздельным резервированием.

Ключевые слова: *радиально-кольцевые сети, раздельное резервирование, формула Буртина – Питтеля.*

1. Введение

Задача вычисления вероятности связи двух вершин случайного графа (вероятности существования пути с работающими ребрами) является сложной вычислительной задачей. Она в общем случае требует числа арифметических операций, растущего в геометрической прогрессии от числа ребер графа [1], [2]. Поэтому разработка специальных методов уменьшения вычислительной сложности была и остается актуальной задачей прикладной математики.

Для случайных графов с идентичными высоконадежными ребрами известна асимптотическая формула Буртина – Питтеля [3], выражающая вероятность отсутствия связи между начальной и конечной вершинами через минимальное число ребер в разрезах графа и количество разрезов с минимальным числом ребер. Одним из удобных методов решения данной задачи является вычисление коэффициентов многочлена, выражающего вероятность отсутствия связи между начальной и конечной вершинами через вероятность отказа ребра графа, и основанного на сетевых топологических инвариантах (частное сообщение И. Герцбаха – “private communication of I. Gertsbukh”). Такая формула позволяет по единожды вычисленным коэффициентам многочлена находить его значения при произвольном значении аргумента. Для вычисления этих коэффициентов предлагается использовать метод Монте-Карло, ошибка приближения в котором, хотя и с малой вероятностью, может существенно сказаться на точности асимптотической формулы.

Это обстоятельство вынуждает вернуться к точным алгоритмам Форда – Фалкерсона для нахождения минимального числа ребер в разрезе — основного асимптотического параметра в формуле Буртина – Питтеля. В ряде случаев эти алгоритмы могут быть существенно упрощены путем построения различных достаточных условий минимальности. Подобные условия делают возможным исследование влияния различных связей — горизонтальных или вертикальных — на асимптотику вероятности отсутствия связи между вершинами графа. В результате удается обнаружить существенное изменение надежности сети

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041,Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: guram@iam.dvo.ru

при ее структурных преобразованиях путем удаления ребер или их стягивания в узел, а также при раздельном резервировании ребер. Эти рассмотрения проводятся на модельном примере радиально-кольцевой сети с несколькими концентрическими окружностями.

2. Основные обозначения и утверждения

Пусть $\Gamma = \{U, W\}$ — неориентированный граф с конечным множеством вершин U, с множеством ребер $W = \{w = (u, v),\ u, v \in U\}$ и с фиксированными начальной и конечной вершинами $u_0, v_0 \in U$. Зададим множество $\mathcal{R}$ всех ациклических путей R между вершинами u_0, v_0 и множество $\mathcal{L} = \{L(A),\ A \in \mathcal{A}\}$ разрезов, которые строятся по формулам

$$\mathcal{A} = \{A \subset U,\ u_0 \in A,\ v_0 \notin A\},\ L = L(A) = \{w = (u, v) :\ u \in A,\ v \in U \setminus A\}.$$

Обозначим $\mathcal{L}_1 = \{L_1, ..., L_n\}$ совокупность минимальных по теоретико-множественному включению разрезов из семейства $\mathcal{L}$. Каждое ребро $w \in W$ отказывает с вероятностью $\overline{p}_w = 1 - p_w,\ 0 < \overline{p}_w < 1$, независимо от других ребер. Обозначим $\overline{P}_\Gamma$ вероятность отказа графа Γ.

Теорема 1. *Если $\overline{p}_w(h) = h,\ w \in W$, то справедлива формула Буртина – Питтеля*

$$\overline{P}_\Gamma \sim ch^d,\ h \to 0, \tag{1}$$

где l_i — число ребер в разрезе L_i, $d = \min\limits_{1 \le i \le n} l_i$, c — количество разрезов с числом ребер d.

3. Необходимый объем раздельного резерва

Предположим теперь, что $\overline{p}_w(h) \equiv q = const,\ 0 < q < 1,\ w \in W$, и каждое ребро графа имеет k-кратный резерв. Такая схема резервирования названа схемой раздельного резервирования и подробно исследована в [1]. Обозначим граф Γ с k-кратным резервом каждого ребра Γ_k и положим

$$N(\varepsilon) = \min(k :\ \overline{P}_{\Gamma_k} < \varepsilon),\ 0 < \varepsilon < 1.$$

Теорема 2. *Выполняется соотношение*

$$N(\varepsilon) \sim \frac{\ln \varepsilon}{d \ln q},\ \varepsilon \to 0. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Асимптотическая формула (1) примет вид

$$\overline{P}_{\Gamma_k} \sim cq^{kd},\ k \to \infty. \tag{3}$$

Следовательно, для любого $\delta > 0$ существует $N_1 = N_1(\delta)$ такое, что при $k > N_1(\delta)$ выполняется неравенство

$$cq^{kd}(1 - \delta) \le \overline{P}_{\Gamma_k} \le cq^{kd}(1 + \delta), \tag{4}$$

Зафиксируем δ и предположим, что $\varepsilon < \overline{P}_{\Gamma_{N_1(\delta)}}$. Тогда из соотношения (4) получаем неравенства

$$cq^{N(\varepsilon)d}(1 - \delta) \le \varepsilon \le cq^{(N(\varepsilon)-1)d}(1 + \delta),$$

из которых следует, что

$$\ln c + N(\varepsilon) d \ln q + \ln(1 - \delta) \le \ln \varepsilon \le \ln c + (N(\varepsilon) - 1) d \ln q + \ln(1 + \delta),$$

и значит,

$$\frac{\ln c + \ln(1-\delta)}{\ln\varepsilon} + \frac{N(\varepsilon) d \ln q}{\ln\varepsilon} \geq 1 \geq \frac{\ln c + \ln(1+\delta) - d\ln q}{\ln\varepsilon} + \frac{N(\varepsilon) d \ln q}{\ln\varepsilon}.$$

В результате получаем

$$N(\varepsilon) \sim \frac{\ln\varepsilon}{d\ln q},\ \varepsilon \to 0.$$

Заметим, что асимптотическая формула (1) для вычисления вероятности отказа сети $\overline{P}_\Gamma$ включает в себя константы c, d, тогда как асимптотическая формула (2) для определения необходимого объема резерва $N(\varepsilon)$ включает в себя только одну константу d. Для нахождения константы d достаточно воспользоваться алгоритмом Форда – Фалкерсона [4] (см. также более современный вариант изложения с учетом возможности распараллеливания [5]), объем вычислений в котором пропорционален кубу числа ребер графа [6]. В свою очередь, оценка константы c значительно сложнее и по существу является NP-полной процедурой перебора.

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$N(\varepsilon) \leq \frac{|\ln(\varepsilon/n)|}{|\ln q|} + 1. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, вероятность P_{Γ_k} существования работающего пути из начальной в конечную вершину графа Γ_k удовлетворяет неравенству

$$P_{\Gamma_k} \geq (1-q^k)^n \geq 1 - nq^k,$$

из которого следует формула (5).

Предположим, что граф Γ является последовательным соединением n ребер, а граф Γ^k получается из Γ параллельным соединением k независимых копий графа Γ. Тогда несложно получить оценку $M(\varepsilon) = \inf(k:\ P_{\Gamma^k} \geq 1-\varepsilon)$ величины необходимого резерва для блочного резервирования:

$$M(\varepsilon) \geq \frac{1-\varepsilon}{p^n}.$$

Тем самым необходимый объем резерва позволяет обнаружить существенное различие между раздельным и блочным резервированием в случае последовательного соединения n ребер (и для некоторых аналогичных соединений ребер).

4. Радиально-кольцевая схема

Рассмотрим радиально-кольцевой граф Γ с m концентрическими окружностями, l радиальными путями из центра до внешней окружности и независимо работающими ребрами с вероятностью отказа каждого $\overline{p}_w = h$.

4.1. Влияние структурных изменений на асимптотику вероятности отказа

Нас будет интересовать вероятность отсутствия связи $\overline{P}_\Gamma$ между вершиной u, находящейся на m-ой концентрической окружности, и вершиной v, помещенной в центре. Назовем ребра, у которых оба конца расположены на одной и той же окружности, кольцевыми, а связи, обеспечиваемые этими ребрами — горизонтальными. Ребра, расположенные на радиусах графа Γ назовем радиальными, а связи, обеспечиваемые этими ребрами — вертикальными. Нашей задачей является исследование влияния горизонтальных связей на величину $\overline{P}_\Gamma$

при $h \to 0$, то есть в том случае, когда ребра обладают высокой надежностью и одинаковой вероятностью отказа h.

Для простоты рассмотрения положим $l > 3$, тогда нетрудно вычислить $d = 3, c = 1$, причем единственный разрез с минимальным числом ребер $d = 3$ состоит из ребер, оканчивающихся в вершине u. В результате получаем $\overline{P}_\Gamma \sim h^3,\ h \to 0$.

Предположим теперь, что все кольцевые ребра имеют единичную надежность и, значит, их можно стянуть в точку. В этом случае вместо графа Γ получаем последовательное соединение m двухполюсников, каждый из которых состоит из l параллельно соединенных ребер. После несложных вычислений получаем, что $d = l,\ c = m$ и, следовательно, $\overline{P}_\Gamma \sim mh^l,\ h \to 0$.

Пусть все кольцевые ребра имеют нулевую надежность и, значит, их можно удалить. В этом случае вершины u, v соединены единственным путем, состоящим из l последовательно соединенных ребер. После несложных вычислений получаем, что $d = 1,\ c = m$ и, следовательно, $\overline{P}_\Gamma \sim mh,\ h \to 0$.

Предположим теперь, что два кольцевых ребра с концом в вершине u имеют r-кратный резерв, то есть заменены на параллельное соединение r идентичных ребер, $2r + 1 < l$. В этом случае $d = 2r + 1,\ c = 1,\ \overline{P}_\Gamma \sim h^{2r+1},\ h \to 0$.

Таким образом, манипуляции с заменой кольцевых ребер на абсолютно надежные, абсолютно ненадежные, а также создание резерва у выделенных кольцевых ребер могут существенно повлиять на вероятность отсутствия связи между вершиной на внешней окружности и центром. Тем самым мы показали, сколь велико влияние горизонтальных связей на функционирование радиально-кольцевой сети с несколькими концентрическими окружностями.

4.2. Ускоренный алгоритм вычисления константы d

Несмотря на то, что вычисление константы d осуществляется с помощью алгоритма с полиномиальной (кубической) сложностью, это достаточно громоздкая процедура, если производить ее для всевозможных пар вершин графа. Поэтому возникает необходимость построения более компактных и быстрых алгоритмов применительно к отдельным семействам графов. В работе [7] такой алгоритм был построен для прямоугольника, расположенного на целочисленной решетке. В настоящей работе рассматривается радиально-кольцевой граф Γ с m концентрическими окружностями и l радиальными путями из центра до внешней окружности.

С помощью теоремы Форда – Фалкерсона о равенстве максимального потока и минимальной пропускной способности разрезов [4, гл. 1] нетрудно, подсчитывая число α_u ребер, соединенных с начальной вершиной u, и число α_v ребер, соединенных с конечной вершиной v, получить неравенство

$$d \le \delta,\ \delta = \min(\alpha_u, \alpha_v). \tag{6}$$

Из неравенства (6) и теоремы Форда – Фалкерсона следует, что при наличии d попарно непересекающихся ребрами путей из начальной в конечную вершину справедливо равенство

$$d = \delta. \tag{7}$$

Применим это достаточное условие к вычислению константы d, обозначив C_u, C_v окружности, которым принадлежат вершины u, v, и положив, что R_u, R_v — радиусы, которым принадлежат вершины u, v, соответственно. Без ограничения общности считаем, что C_u окаймляет C_v.

Вычисление константы d. Пусть $l > 2$.

1) Если вершины u, v лежат на внешней окружности, то $\delta = 3$ и между ними существует два пути по внешней окружности и один путь через центр, которые попарно не пересекаются

ребрами (Рис.1). Следовательно, в этом случае $d = 3$.
2) Если вершины u, v лежат на внутренней окружности, то $\delta = 4$ и между ними существует два пути на этой окружности, один путь через центр и один путь через внешнюю окружность (Рис 2). В этом случае $d = 4$.

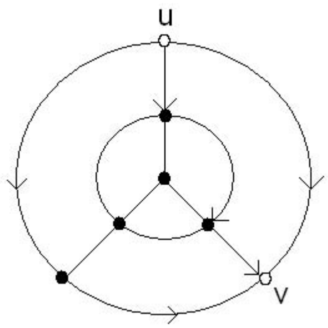

Рис. 1.

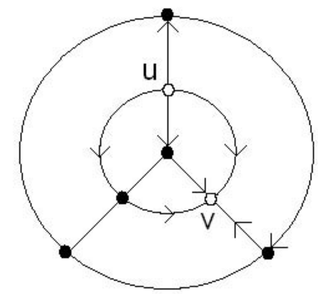

Рис. 2.

3) Пусть вершина u лежит на внешней окружности, а вершина v — на внутренней окружности, тогда $\delta = 3$. В случае, когда вершины находятся на различных радиусах, то между ними существуют: путь из u по радиусу R_u до окружности C_v и по ней до v; путь по окружности C_u до радиуса R_v и по нему до вершины v; путь по окружности C_u до радиуса, не совпадающего с R_u, R_v, далее по этому радиусу до центра и из него по радиусу R_v до вершины v (Рис. 3a). Никакие два пути из этого списка не имеют общих ребер, следовательно, $d = 3$. В случае, когда вершины u, v находятся на одном радиусе, существуют: путь из u в v по радиусу; пути по дуге внешней окружности, далее по радиусу до внутренней окружности и по ней до вершины v (Рис. 3b). Никакие два пути из этого списка не имеют общих ребер, следовательно, $d = 3$.

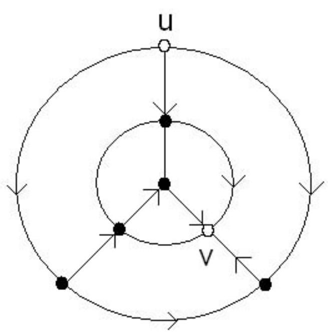

Рис. 3a.

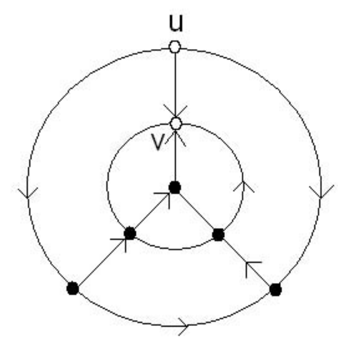

Рис. 3b.

4) Пусть вершины u, v лежат на внутренних окружностях, тогда $\delta = 4$. Рассмотрим случай, когда эти вершины находятся на различных радиусах.

В случае $l = 3$ можно построить разрез между вершинами u, v, состоящий из ребер с концами на C_u, расположенных на различных радиусах, следовательно, $d \leq 3$. Рассмотрим следующие пути между u, v : из u по C_u до радиуса R_v и далее по нему до v; из u по радиусу R_u до окружности C_v и далее по ней до v; из u по C_u до третьего радиуса и далее по нему через центр с переходом на радиус R_v до вершины v. Никакие два пути из этого списка (Рис. 4a) не имеют общих ребер, следовательно, $d \geq 3$, и, значит, $d = 3$.

В случае $l > 3$ выделяются четыре пути: путь из u по окружности C_u до радиуса R_v и далее по нему до v; путь из u по радиусу R_u до окружности C_v и далее по ней до вершины v; путь из u по окружности C_u до третьего радиуса, по нему до центра и далее через центр по радиусу R_v до вершины v; путь из вершины u по радиусу R_u на внешнюю окружность, по ней до четвертого радиуса, по нему до окружности C_v и далее по ней до v. Никакие два пути из этого списка (Рис. 4b) не имеют общих ребер, следовательно, $d = 4$.

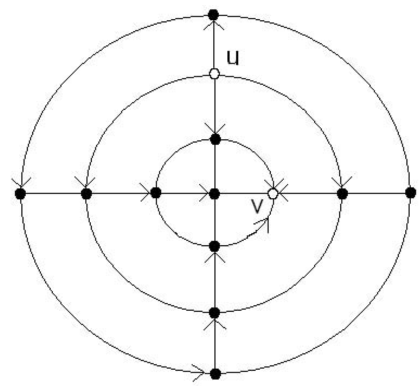

Рис. 4a. Рис. 4b.

В случае, когда вершины находятся на одном радиусе, результат остается прежним: при $l = 3$ значение константы d равно 3, а при $l > 3$ величина d равна 4.

Вычисление константы c.

Пусть вершина v находится в центре, а вершина u — на m_1-ой от центра концентрической окружности, $m_1 \le m$. Если $l = 3$, то $c = m_1$ при $m_1 < m$, а $c = m_1 + 1$ при $m_1 = m$. Если $l = 4$, то $c = m_1 + 1$ при $m_1 < m$, а $c = 1$ при $m_1 = m$. Если $l > 4$, то $c = 1$.

5. Заключение

Следует отметить, что полученная в работе асимптотическая формула для сетей с высоконадежными ребрами, несмотря на использованные выше соображения (во многом эвристические), остается достаточно сложной. В этой связи имеет смысл указать на пример радиально-кольцевой сети с несколькими концентрическими окружностями, низконадежными кольцевыми ребрами и имеющими конечную надежность радиальными ребрами. Для этого случая можно воспользоваться доказанным в [7] утверждением.

Рассмотрим двухполюсник Γ с выделенными начальной и конечной вершинами u^*, v^*, конечным множеством вершин U и конечным множеством ребер W. Пусть множество ребер W состоит из непересекающихся подмножеств W_1, W_2, причем для $w \in W_1$ справедливо равенство $p_w(h) \equiv p_w > 0$, а для $w \in W_2$ выполняется соотношение $p_w(h) \to 0,\ h \to 0$. Обозначим $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ совокупность всех ациклических путей между вершинами u^*, v^*.

Теорема 4. *Если выполняются соотношения*

$$R_1 \subseteq W_1,\ R_2 \cap W_2 \neq \oslash,\ \ldots,\ R_n \cap W_2 \neq \oslash, \tag{8}$$

то вероятность связи вершин u^*, v^* *в графе* Γ

$$P_\Gamma(u^*, v^*) \to \prod_{w \in R_1} p_w,\ h \to 0. \tag{9}$$

Используя теорему 4, нетрудно установить, что в радиально-кольцевой сети с несколькими концентрическими окружностями при $h \to 0$ предел вероятности связи вершин u, v равен произведению надежности радиальных ребер, образующих ациклический путь между указанными вершинами. В случае, когда радиально-кольцевая сеть содержит одну окружность, точность и быстродействие этого предельного соотношения численно исследованы в работе [8].

Список литературы

[1] R. E. Barlow, F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, London and New York, 1965.

[2] И.А. Ушаков и др., *Надежность технических систем*, Справочник, Радио и связь, М., 1985.

[3] I. Gertsbukh, *Reliability Theory With Applications to Preventive Maintenance*, Springer Verlag, 2000.

[4] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, *Flows in networks*, Princeton university press, Princeton, New Jersey, 1962.

[5] В. К. Попков, *Математические модели связности*, Изд-во ИВМ и МГ СО РАН, Новосибирск, 2006.

[6] Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, *Алгоритмы: построение и анализ*, Лаборатория базовых знаний, Москва, 2004.

[7] G. Sh. Tsitsiashvili, “Asymptotic analysis of lattice reliability”, *Reliability: Theory and Applications*, 2010, №1, 65–70.

[8] G. Sh. Tsitsiashvili, A. S. Losev, “Calculation of connectivity probability in recursively defined random networks”, *Reliability: Theory and Applications*, 2010, №1, 40–46.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 27 апреля 2010 г.

Tsitsiashvili G.Sh. Comparison analysis of reliability of networks with identical edges. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 2. P. 192–198.

ABSTRACT

Efficient and fast algorithms of a calculation of parameters in the asymptotic Burtin – Pittel formula for networks with identical and high reliable edges are constructed. These algorithms are applied to a comparison of networks constructed from a radial-circle network by a canceling of some edges or their collapsing into nodes or by edges separate reservation.

Key words: *a radial-circle network, a separate reservation, the Burtin – Pittel formula.*