*ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ.* 2011. Том 11. № 2. С. 155–180

УДК 539.0
MSC2010 74B20

© С. Н. Коробейников, А. А. Олейников[1]

# Лагранжева формулировка определяющих соотношений гиперупругого материала Генки

Получено новое представление тензора упругости четвертого порядка для гиперупругого изотропного материала Генки. Компактность этого представления обусловлена использованием собственных проекций правого тензора деформаций Коши – Грина. Показано, что полученный тензор упругости обладает как минорными симметриями, так и главной симметрией.

Ключевые слова: *изотропная гиперупругость, материал Генки, тензор упругости, собственные проекции.*

## Введение

Известно (см., например, [1, 17, 22, 24, 47, 51]), что эластомеры могут претерпевать большие деформации (несколько сотен процентов) без разрушения и повреждения структуры материала. Потребность в математическом моделировании процессов деформирования тел и конструкций из таких материалов стимулирует развитие теории больших деформаций гиперупругих тел, создание алгоритмов численных решений уравнений гиперупругости и их программную реализацию. Основные положения теории гиперупругости в настоящее время достаточно хорошо разработаны и представлены, например, в [11, 12, 15, 20, 35, 41, 45, 46, 54, 60, 63, 72, 77, 78, 83, 87, 88]. Однако еще ждут своего решения задачи поиска форм записи уравнений с точки зрения эффективности их использования в приложениях.

Важным моментом при формулировании определяющих соотношений гиперупругости является конструирование скалярной функции удельной энергии деформаций такой, для которой тензор напряжений является градиентальной тензорной функцией (см., например, [15]) тензора деформаций. Для корректности формулировки определяющих соотношений гиперупругости тензоры напряжений и деформаций должны образовывать пару тензоров, сопряжённых по мощности внутренних сил. Впервые понятие сопряжённых пар таких тензоров ввёл В.В. Новожилов [76]. Позднее Р. Хилл [44, 45] ввёл более общее определение сопряжённых тензоров напряжений и деформаций. Дальнейшее развитие идеи сопряжённости этих тензоров дано в [3, 42, 55, 56] и др.

Используя технику построения тензора в главных осях, Р. Хилл в [44, 45] (см. также [31]) получил выражения для тензоров напряжений, сопряжённых с тензорами деформаций семейства Хилла. М. Шейдлер [85] доказал правильность этих выражений в случае

[1]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 630090, г. Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, 15; Новосибирский государственный университет, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2; Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 631013, г. Комсомольск-на-Амуре, просп. Ленина, 27. Электронная почта: `s.n.korobeynikov@mail.ru`, `cvmi@knastu.ru`

совпадения собственных значений тензоров деформаций. Простота выражений для компонент тензоров деформаций и сопряжённых с ними тензоров напряжений, построенных в главных осях тензора деформаций, к сожалению, приводит к трудностям их использования в приложениях, так как для построения тензора в главных осях требуется определить тройки ортонормальных собственных векторов. Кроме того, для кратных собственных значений тензоров собственные векторы определяются неоднозначно, что создает проблему их выбора.

Для избежания трудностей построения тензоров в главных осях были развиты альтернативные представления тензоров деформаций, напряжений и их скоростей, свободные от выбора базиса (см., например, [6, 7, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 49, 50, 61, 92]). Однако представления этих тензоров в таком виде являются достаточно громоздкими.

Оптимальным вариантом представлений симметричных тензоров напряжений, деформаций и их скоростей, сохраняющих простоту структуры выражений тензоров в главных осях и в то же время удобство их приложения, являются представления этих тензоров через собственные проекции (см., например, [11, 15, 41, 49, 57, 59, 87, 92]). Выражения тензоров напряжений, деформаций и их скоростей через собственные проекции тензоров деформаций даны в [34, 39, 40, 57, 65, 66, 67, 71, 79, 93, 95, 96, 97] и др.

Наиболее подходящей парой сопряжённых тензоров напряжений и деформаций для использования в уравнениях механики сплошной среды в переменных Лагранжа является пара $(\mathbf{S}^{(2)}, \mathbf{E}^{(2)})$, где $\mathbf{S}^{(2)}$ — второй тензор напряжений Пиола – Кирхгофа, а $\mathbf{E}^{(2)}$ — тензор деформаций Грина – Лагранжа [19, 20, 46, 54, 78]. Главным преимуществом тензора деформаций Грина – Лагранжа перед другими тензорами деформаций семейства Хилла является то, что компоненты этого тензора в переменных Лагранжа определяются непосредственно в системе отсчета без спектрального представления этого тензора (т.е. не требуется определять его собственные значения и векторы). С другой стороны, с помощью тензора $\mathbf{S}^{(2)}$ удобно формулировать уравнения движения (равновесия) как в исходном виде, так и через скорости. Формулировка этих уравнений через скорости требуется как для их пошагового интегрирования, так и для применения критериев устойчивости равновесных состояний и квазистатических (динамических) движений (см., например, [8, 54, 78]). Таким образом, для введения новой модели материала (в частности, и гиперупругой среды) в библиотеки моделей материалов пакетов программ общего назначения, реализующих метод конечных элементов решения задач механики деформируемого твердого тела в переменных Лагранжа (например, таких как ADINA [8], MSC.Marc [62], PIONER [53]), достаточно разработать и внедрить в эти пакеты подпрограммы, реализующие связи компонент тензора $\mathbf{S}^{(2)}$ с компонентами тензора $\mathbf{E}^{(2)}$, а также матрицы, связывающие компоненты их скоростей.

Для изотропной гиперупругой среды моделями материалов, для которых можно прямо (без определения главных осей тензора деформаций) получить упомянутые выше формулы связи, являются такие как модель Кирхгофа – Сен-Венана [20, 88, 90], неогукова, Муни – Ривлина (см., например, [54]). Для этих моделей материалов удельная потенциальная энергия деформаций выражается при помощи уравнения, в котором она зависит от главных инвариантов тензора $\mathbf{E}^{(2)}$. Общие формулы связи компонент тензора $\mathbf{S}^{(2)}$ с компонентами тензора $\mathbf{E}^{(2)}$ и матриц, связывающих компоненты их скоростей для изотропной гиперупругой среды при такой записи удельной потенциальной энергии деформаций, приведены в [75]. К сожалению, модели материалов, в которых учитывается явная зависимость удельной потенциальной энергии деформаций от главных инвариантов тензора $\mathbf{E}^{(2)}$, позволяют описывать деформирование только узкого класса материалов при умеренных деформациях.

Альтернативным подходом к определению удельной потенциальной энергии изотропной гиперупругой среды является ее задание в виде функции главных удлинений. Важнейшим свойством этой функции является ее зависимость от степеней главных удлинений (модель материала Огдена [78]) и более сложные зависимости от степеней, экспонент и логарифмов главных удлинений [22]. Задание параметров в этих моделях материалов позволяет построить кривые деформирования, соответствующие главным удлинениям во всем диапазоне деформирования эластомеров. Если удельная потенциальная энергия деформаций изотропного гиперупругого материала представляется в виде функции от главных удлинений, то компактные представления тензора $\mathbf{S}^{(2)}$ и тензора упругости четвертого порядка можно получить в главных осях тензора $\mathbf{E}^{(2)}$. Эти выражения приведены, например, в [12, 46, 63, 78]. Более громоздкие выражения этих тензоров в виде, не зависящем от выбора базиса, приведены в [30]. Компактные представления этих тензоров в собственных проекциях лагранжевых тензоров деформаций удобные для приложений приведены в [67, 79].

Использование сложных моделей материалов работоспособных во всем диапазоне деформирования эластомеров требует тщательной постановки экспериментов и большой работы по поиску параметров для описания экспериментальных кривых. Возникает вопрос: можно ли для эластомеров сконструировать такую функцию для удельной потенциальной энергии деформаций, которая имела бы вид потенциальной функции для изотропной упругой среды при бесконечно малых деформациях, для которой справедлив закон Гука, и в то же время была бы пригодной для описания деформаций эластомеров, выходящих за рамки применения уравнений линейной теории упругости?

Первый шаг к ответу на этот вопрос состоит в разработке методики построения функций удельной потенциальной энергии деформаций для моделей материалов изотропной гиперупругой среды, обобщающих закон Гука на случай больших деформаций. Эту методику предложил Р. Хилл [44, 45] (см. также [90]). Суть предложения Р. Хилла состоит в замене тензоров напряжений и деформаций Коши в законе Гука, используемых в уравнениях линейной теории упругости, любой парой сопряжённых лагранжевых тензоров напряжений и деформаций (последние должны принадлежать семейству тензоров деформаций Хилла, введенному в [44, 45]). В частности, такой парой является пара тензоров $(\mathbf{S}^{(2)}, \mathbf{E}^{(2)})$. В последнем случае такая модель изотропного гиперупругого материала называется моделью Кирхгофа – Сен-Венана [20, 88, 90]. Другие способы обобщений закона Гука с бесконечно малых на большие деформации представлены в [10, 16, 73], но модели материала, рассматриваемые в этих работах, в общем случае являются только упругими, но не гиперупругими (на замкнутых путях деформирования не сохраняют энергию) [46, 78, 88].

Вторым шагом к ответу на поставленный вопрос является отбор таких моделей материалов (среди теоретически допустимых), поведение которых не противоречит установившимся физическим представлениям о поведении материалов во всем допустимом диапазоне изменения главных удлинений, и определение таких диапазонов изменения деформаций, для которых математические модели соответствует данным эксперимента. Поведение ряда моделей гиперупругих материалов этого семейства изучалось путем построения кривых одноосного деформирования и простого сдвига в [9, 10, 19, 21, 23, 25, 33, 51, 81, 94]. Суммируя результаты этих исследований, можно отметить, что только модель гиперупругого изотропного материала Генки (Hencky) с использованием тензора логарифмических деформаций $\mathbf{E}^{(0)}$[1] (см., например, [78]) и сопряжённого с ним тензора напряжений Нолла $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ [19] не противоречит установившимся физическим представлениям (деформации стремятся к минус-бесконечности при неограниченном сжатии материала и к плюс-бесконечности при его неограниченном растяжении) и согласуется с экспериментальными данными для деформаций умеренной величины, выходящих за рамки применимости уравнений линейной теории упругости. Отметим, что аналогичным свойством обладает пара сопряжённых тензоров напряжений и деформаций Муни (Mooney) $(\mathbf{S}^M, \mathbf{E}^M)$ [19, 21]. При этом тензор деформаций Муни $\mathbf{E}^M$ (тензор квазилогарифмических деформаций) из семейства Хилла

[1] Тензор логарифмических деформаций впервые ввели Имберт (Imbert) в 1880 г. и Людвик (Ludwik) в 1909 г. В формулировке определяющих соотношений этот тензор впервые использовал Генки (Hencky) в 1928 г. [19].

аппроксимирует тензор логарифмических деформаций. Такое же соответствие известным экспериментальным данным решений задач о кручении и изгибе стержней из материала Генки отмечается в [13, 14, 107, 109]. Л. Ананд [1] показал, что модель материала Генки хорошо описывает деформацию вулканизированной резины и упругие деформации металлов при высоких давлениях в интервале (0.7,1.3) изменения главных удлинений. Более того, Л. Ананд показал [2], что однопараметрическая модель Генки для несжимаемого материала (под параметром понимается модуль Юнга) лучше описывает экспериментальные данные, чем двухпараметрическая (с параметрами $C_1$ и $C_2$ [54]) модель гиперупругого изотропного материала Муни – Ривлина. Преимущества использования тензора логарифмических деформаций перед другими тензорами деформаций семейства Хилла в уравнениях механики сплошной среды, такие как аддитивное разложение деформации на объемную и изохорическую составляющие и существование коротационной скорости тензора логарифмических деформаций, равной тензору скорости деформаций, хорошо известны (см., например, [11, 12, 33, 45, 93, 102, 104]).

Таким образом, можно дать однозначный ответ на вопрос, поставленный выше: для изотропной гиперупругой среды единственной парой сопряжённых лагранжевых тензоров напряжений и деформаций из семейства Хилла, пролонгирующих закон Гука из области малых в область умеренных деформаций и имеющих прикладное значение, является пара тензоров $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{E}^{(0)})$ и пара тензоров $(\mathbf{S}^M, \mathbf{E}^M)$, которые аппроксимируют, соответственно, тензоры в первой паре.

Дальнейшее усложнение модели материала Генки с целью добиться большего соответствия структуры удельной потенциальной энергии деформаций данным эксперимента проведено в [17, 18, 24, 47, 51]. Преимущества использования тензора логарифмических деформаций в определяющих соотношениях неупругих материалов по сравнению с другими тензорами семейства Хилла хорошо известны и этот тензор используется исследователями в определяющих соотношениях гипоупругости [64, 94, 96, 99, 105, 111], упругопластичности [4, 5, 36, 37, 38, 40, 43, 68, 69, 70, 82, 91, 100, 106, 108, 110] и жёстко-пластического тела [74].

Целью настоящей работы является вывод явного выражения тензора упругости для изотропного гиперупругого материала Генки. Этот тензор четвертого порядка связывает материальные производные второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа $\dot{\mathbf{S}}^{(2)}$ и тензора деформаций Грина – Лагранжа $\dot{\mathbf{E}}^{(2)}$. Для представления тензора упругости используются собственные проекции правого тензора деформаций Коши – Грина. Подобное представление тензора упругости используется в [79] для материала Огдена и в [67] для произвольного изотропного гиперупругого материала (включая и материал Генки), но в настоящей работе используется оригинальная техника получения тензора упругости для материала Генки. Если все собственные значения правого тензора деформаций Коши – Грина различны, то полученное в настоящей работе выражение тензора упругости совпадает с выражением этого тензора для материала Генки, которое можно получить, конкретизируя для этой модели материала выражение, представленное в [67], но для случая, когда собственные значения являются кратными, получено выражение тензора упругости, имеющее более простой вид по сравнению с выражением, данным в [67].

Практическое значение настоящего исследования состоит в том, что получено выражение тензора упругости для изотропного гиперупругого материала Генки, которое можно вводить в пользовательские программы коммерческих кодов (таких, например, как MSC.Marc) при определении матриц касательных жёсткостей в переменных Лагранжа в отсчетной системе координат без перехода к главным осям правого тензора деформаций Коши – Грина. Это выражение получено как для различных, так и для кратных собственных значений правого тензора деформаций Коши – Грина.

# 1. Необходимые сведения из тензорной алгебры

Современная формулировка уравнений механики деформируемого твердого тела основана на свободном от выбора базиса представлении тензоров (см., например, [11, 12, 15, 20, 41, 46, 49, 54, 60, 63, 78, 82, 87, 88]). К сожалению, единого стандарта для обозначений операций с тензорами, представленными в таком виде, не существует. Поэтому в настоящем разделе мы определяем операции с тензорами второго и четвертого порядков, которые потребуются в изложении основного материала работы.

## 1.1. Тензоры второго и четвертого порядков

Следуя терминологии в [78, 88] назовем *телом* $\mathfrak{B}$ трехмерное дифференцируемое многообразие, элементы которого называются материальными точками (частицами) $P \in \mathfrak{B}$, для которых устанавливается взаимно-однозначное соответствие с тройкой вещественных чисел $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$, называемых *материальными (лагранжевыми) координатами*.

Пусть $\mathcal{E}$ обозначает трехмерное евклидово точечное пространство, а $\mathbb{V}$ — трехмерное евклидово векторное (трансляционное) пространство, ассоциированное с точечным пространством $\mathcal{E}$ (мы отождествляем это векторное пространство с его дуальным пространством $\mathbb{V}^*$) [11, 78, 89]).

*Конфигурацией* $\beta$ тела $\mathfrak{B}$ назовем область в трёхмерном евклидовом точечном пространстве $\mathcal{E}$ такую, что существует взаимно-однозначное соответствие материальных точек $P$ и точек $\boldsymbol{\chi} \in \beta \subset \mathcal{E}$: $\mathfrak{B} \leftrightarrow \beta$, т. е. $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(P)$. В каждой точке $\boldsymbol{\chi}(P) \in \beta$ по обычным формулам тензорного анализа определяется тройка ковариантных $\mathbf{e}_i(\boldsymbol{\chi}(P)) = \mathbf{e}_i(P)$ и контравариантных $\mathbf{e}^i(P)$ базисных векторов (здесь и далее индексы векторов и тензоров изменяются в пределах от одного до трёх), так что

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_j^i \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}.$$

Здесь и далее точка между векторами и (или) тензорами обозначает их внутреннее произведение.

Определим тензоры второго $\mathbf{H}$ и четвертого $\mathbb{H}$ порядков из тензорных пространств $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$ соответственно (здесь и далее знак $\otimes$ обозначает полиадное (тензорное) произведение векторов векторного пространства $\mathbb{V}$). Определим также тензорные поля второго $\mathbf{H}(P) \equiv \mathbf{H}(\chi(P))\ \forall\ P \in \mathfrak{B}$ и четвертого $\mathbb{H}(P) \equiv \mathbb{H}(\chi(P))\ \forall\ P \in \mathfrak{B}$ порядков, т.е. $\mathbf{H}(\mathfrak{B}) \in \mathcal{T}^2$ и $\mathbb{H}(\mathfrak{B}) \in \mathcal{T}^4$ (здесь и далее $\mathcal{T}^2$ и $\mathcal{T}^4$ обозначают совокупности всех тензорных полей второго и четвертого порядков соответственно, определенных для всех частиц $P \in \mathfrak{B}$). Далее для краткости вместо термина «тензорное поле» используем термин «тензор».

Любой тензор $\mathbf{H} \in \mathcal{T}^2$ можно представить разложениями по диадам ковариантного и контравариантного базисов, соответственно, следующим образом:

$$\mathbf{H} = H^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = H_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j. \tag{1}$$

Здесь и далее полагаем, что (если не оговорено противное или операция суммирования не обозначена в явном виде) по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Аналогично, любой тензор $\mathbb{H} \in \mathcal{T}^4$ можно представить разложениями по полиадам ковариантного и контравариантного базисов, соответственно, в виде

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}^{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathbb{H}_{ijkl}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l. \tag{2}$$

Отметим, что наряду с представлениями (1), (2) можно также рассматривать представления тензоров со смешанными (ковариантными и контравариантными) компонентами.

## 1.2. Операции с тензорами

Определения операций с тензорами второго порядка в достаточной степени установились (см., например, [49, 54]), но для тензоров четвертого порядка авторы вводят различные определения операций, поэтому в настоящем разделе в основном определяются операции с тензорами четвертого порядка.

Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{H} \in \mathcal{T}^2$. Определим операцию *двойного внутреннего* произведения тензоров:

$$\mathbf{A} : \mathbf{H} = (A^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (H_{kl}\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l) \equiv A^{ij}H_{kl}\delta_i^k\delta_j^l = A^{ij}H_{ij}. \tag{3}$$

Тогда справедливы следующие тождества

$$\mathbf{A} : \mathbf{H} = \mathbf{H} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T : \mathbf{H}^T = \mathbf{H}^T : \mathbf{A}^T = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{H}) = \mathrm{tr}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{A}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{A}). \tag{4}$$

Здесь и далее точка между тензорами обозначает операцию их внутреннего произведения, а верхний индекс «$T$» — операцию транспонирования тензора.

Если $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^2$, $\mathbf{H} \in \mathcal{T}^2_{\mathrm{sym}}$ (здесь и далее $\mathcal{T}^2_{\mathrm{sym}} \subset \mathcal{T}^2$ обозначает совокупность всех симметричных тензоров второго порядка), то справедливо равенство

$$\mathbf{A} : \mathbf{H} = \mathrm{sym}\mathbf{A} : \mathbf{H} = \mathbf{H} : \mathrm{sym}\mathbf{A}. \tag{5}$$

Здесь и далее $\mathrm{sym}\mathbf{A}$ обозначает симметричную составляющую тензора $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^2$: $\mathrm{sym}\mathbf{A} \equiv (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2$.

Пусть $\mathbb{C} \in \mathcal{T}^4$, $\mathbf{A}, \mathbf{H} \in \mathcal{T}^2$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} : \mathbf{H} &= (\mathbb{C}^{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) : (H_{rs}\mathbf{e}^r \otimes \mathbf{e}^s) \equiv \mathbb{C}^{ijkl}H_{rs}\delta_k^r\delta_l^s\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \\
&= \mathbb{C}^{ijkl}H_{kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \\
\mathbf{H} : \mathbb{C} &= (H_{rs}\mathbf{e}^r \otimes \mathbf{e}^s) : (\mathbb{C}^{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \equiv H_{rs}\mathbb{C}^{ijkl}\delta_i^r\delta_j^s\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \\
&= H_{ij}\mathbb{C}^{ijkl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \\
\mathbf{A} : \mathbb{C} : \mathbf{H} &\equiv A_{ij}\mathbb{C}^{ijkl}H_{kl}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{H} \in \mathcal{T}^2$. Определим следующие четыре операции в соответствии с определениями, приведенными в [20, 46, 79]:

- внешнее произведение

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{H} = (A^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes (H^{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \equiv A^{ij}H^{kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \tag{7}$$

- прямое внешнее произведение

$$\mathbf{A}\underline{\otimes}\mathbf{H} = (A^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\underline{\otimes}(H^{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \equiv A^{ik}H^{jl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \tag{8}$$

- альтернативное внешнее произведение

$$\mathbf{A}\overline{\otimes}\mathbf{H} = (A^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\overline{\otimes}(H^{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \equiv A^{il}H^{jk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \tag{9}$$

- симметричное внешнее произведение

$$\mathbf{A} \overset{\mathrm{sym}}{\otimes} \mathbf{H} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{A}\underline{\otimes}\mathbf{H} + \mathbf{A}\overline{\otimes}\mathbf{H}) = \frac{1}{2}(A^{ik}H^{jl} + A^{il}H^{jk})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \tag{10}$$

**Примечание 1.1**. Операции внешнего произведения тензоров четвертого порядка альтернативные к представленным в настоящей работе приведены в [48, 49, 52, 80, 86].

Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{T}^2$. Используя операции, определённые в (3)-(10), можно показать выполнение следующих тождеств:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : \mathbf{X} &= \mathbf{A}(\mathbf{B} : \mathbf{X}), \\
(\mathbf{A} \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{B}) : \mathbf{X} &= \mathbf{A} \cdot \operatorname{sym}\mathbf{X} \cdot \mathbf{B}^T, \\
\mathbf{X} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} : \mathbf{X}), \\
\mathbf{X} : (\mathbf{A} \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{B}) &= \operatorname{sym}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B}), \\
\mathbf{X} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : \mathbf{Y} &= (\mathbf{A} : \mathbf{X})(\mathbf{B} : \mathbf{Y}), \\
\mathbf{X} : (\mathbf{A} \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{B}) : \mathbf{Y} &= (\mathbf{X} \cdot \mathbf{B}) : (\mathbf{A} \cdot \operatorname{sym}\mathbf{Y}).
\end{aligned} \tag{11}$$

Пусть $\mathbf{I} \in \mathcal{T}^2$ — единичный тензор второго порядка (единственный независимый изотропный тензор второго порядка, см. [60]). Вводим полный набор независимых изотропных тензоров четвертого порядка (см. [60]):

$$\mathbb{C}_{\text{I}} \equiv \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad \mathbb{C}_{\text{II}} \equiv \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I}, \quad \mathbb{C}_{\text{III}} \equiv \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I} \tag{12}$$

и их комбинацию [46] (*symmetrizer* [20])

$$\mathbb{S} \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{C}_{\text{II}} + \mathbb{C}_{\text{III}}) = \mathbf{I} \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{I}. \tag{13}$$

Тензор $\mathbb{S} \in \mathcal{T}^4$ обладает свойством ($\mathbf{X} \in \mathcal{T}^2$) [20, 46, 60]

$$\mathbb{S} : \mathbf{X} = \operatorname{sym}\mathbf{X}.$$

Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathcal{T}^2$. Используя определения операций (4), (7)-(9), получим

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : (\mathbf{C} \underline{\otimes} \mathbf{D}) &= \mathbf{A} \otimes (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}), \\
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : (\mathbf{C} \overline{\otimes} \mathbf{D}) &= \mathbf{A} \otimes (\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}).
\end{aligned} \tag{14}$$

**Определение 1.1**. Пусть $\mathbb{C} \in \mathcal{T}^4$. Единственный тензор четвертого порядка (обозначается $\mathbb{C}^T$) называется транспонированным к тензору $\mathbb{C}$, если выполняется равенство (см. [46])

$$\mathbf{X} : \mathbb{C}^T : \mathbf{Y} = \mathbf{Y} : \mathbb{C} : \mathbf{X} \; [= (\mathbb{C} : \mathbf{X}) : \mathbf{Y}] \quad \forall\, \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{T}^2. \tag{15}$$

Равенство (15) эквивалентно следующему равенству, записанному с использованием компонент тензора $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}^T = (\mathbb{C}^{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)^T \equiv \mathbb{C}^{ijkl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbb{C}^{klij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l.$$

**Определение 1.2**. Тензор $\mathbb{C} \in \mathcal{T}^4$ называется *симметричным* (обладает свойством *главной симметрии*), если

$$\mathbb{C}^T = \mathbb{C}. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что необходимым и достаточным условием наличия главной симметрии тензора $\mathbb{C} \in \mathcal{T}^4$ является выполнение равенства

$$\mathbf{X} : \mathbb{C} : \mathbf{Y} = \mathbf{Y} : \mathbb{C} : \mathbf{X} \quad \forall\, \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{T}^2. \tag{17}$$

Для тензора $\mathbb{C}$, обладающего свойством главной симметрии, равенство (16) эквивалентно следующему равенству, записанному с использованием компонент тензора $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = (\mathbb{C}^T \equiv)\mathbb{C}^{ijkl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbb{C}^{klij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l.$$

**Определение 1.3**. Будем говорить, что тензор $\mathbb{C} \in \mathcal{T}^4$ обладает двумя *минорными симметриями*, если выполняется равенство

$$\mathbf{X} : \mathbb{C} : \mathbf{Y} = \mathrm{sym}\mathbf{X} : \mathbb{C} : \mathrm{sym}\mathbf{Y} \quad \forall\ \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{T}^2. \tag{18}$$

Для тензора $\mathbb{C}$, обладающего двумя минорными симметриями, равенство (18) эквивалентно следующим равенствам, записанным с использованием компонент тензора $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}^{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathbb{C}^{ijkl}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathbb{C}^{jikl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \\ = \mathbb{C}^{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k = \mathbb{C}^{ijlk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l.$$

Введем операции поворотов тензоров второго и четвертого порядков. Пусть $\mathbf{\Psi} \in \mathcal{T}^{2+}_{\mathrm{orth}}$ (здесь $\mathcal{T}^{2+} \subset \mathcal{T}^2$ — совокупность всех тензоров второго ранга $\mathbf{H}$ таких, что $\det\mathbf{H} > 0$, $\mathcal{T}^{2+}_{\mathrm{orth}} \subset \mathcal{T}^{2+}$ — совокупность всех *собственно ортогональных* тензоров второго ранга $\mathbf{\Psi}$ таких, что $\mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{\Psi}^T$, $\det\mathbf{\Psi} = 1$).

**Определение 1.4**. Зададим тензоры $\mathbf{H} \in \mathcal{T}^2$ и $\mathbb{C} \in \mathcal{T}^4$ следующим образом:

$$\mathbf{H} = H^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbb{C} = \mathbb{C}^{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l.$$

Будем говорить, что тензоры

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Psi(\mathbf{H}) &\equiv H^{ij}\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j, \\ \mathcal{R}_\Psi(\mathbb{C}) &\equiv \mathbb{C}^{ijkl}\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}'_l \end{aligned} \tag{19}$$

получены *операциями поворота* (частный случай операций *произведения Рэлея* вида $\mathbf{\Psi}\star\mathbf{H}$, $\mathbf{\Psi}\star\mathbb{C}$, см. [11]), если векторы базиса $\mathbf{e}'_i$ получены операциями поворота из векторов исходного базиса, т.е.

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{\Psi}^T.$$

Можно показать, что в представлении свободном от выбора базиса операции поворота (19) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Psi(\mathbf{H}) &= \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Psi}^T, \\ \mathcal{R}_\Psi(\mathbb{C}) &= (\mathbf{\Psi}\underline{\otimes}\mathbf{\Psi}) : \mathbb{C} : (\mathbf{\Psi}^T\underline{\otimes}\mathbf{\Psi}^T). \end{aligned}$$

### 1.3. Собственные проекции симметричных тензоров второго порядка

Пусть $\mathbf{S} \in \mathcal{T}^2_{\mathrm{sym}}$. Представим этот тензор в спектральном виде (см., например, [46, 78])

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{3} s_k \mathbf{M}_k \otimes \mathbf{M}_k, \tag{20}$$

где $s_k \in R$ — собственные значения и $\{\mathbf{M}_k\}$ $(k = 1, 2, 3)$ — подчиненные ортонормированные собственные векторы. Для кратных собственных значений $s_k$ собственные векторы $\{\mathbf{M}_k\}$ определяются неоднозначно. Для избежания этой неоднозначности используем вместо спектрального представления (20) представление тензора $\mathbf{S}$ через собственные проекции, см. [11, 15, 41, 49, 57, 59, 92].

Обозначим через $1 \le m \le 3$ число различных собственных значений $s_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Далее число $m$ будем называть $m$-индексом. Без потери общности рассуждений нумеруем собственные значения $s_k$ в зависимости от значения $m$-индекса следующим образом:

$$m = \begin{cases} 3, & s_1 \neq s_2 \neq s_3 \\ 2, & s_1 \neq s_2 = s_3 \\ 1, & s_1 = s_2 = s_3 \end{cases}.$$

Введём собственные проекции тензора $\mathbf{S}$, используя формулы Сильвестра

$$\mathbf{S}_i = \begin{cases} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\mathbf{S} - s_j \mathbf{I}}{s_i - s_j} & \text{при } m = 2, 3 \\ \mathbf{I} & \text{при } m = 1 \end{cases}. \tag{21}$$

Собственные проекции имеют следующие свойства (см. [59])

$$\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = \begin{cases} \mathbf{S}_i, & \text{если } i = j, \\ \mathbf{O}, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{m} \mathbf{S}_i = \mathbf{I}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{S}_i = m_i. \tag{22}$$

Здесь $m_i$ обозначает кратность собственного значения $s_i$, $\mathbf{O} \in \mathcal{T}^2$ — нулевой тензор второго порядка. Из определения собственных проекций (21) следует их симметрия, т.е. $\mathbf{S}_i \in \mathcal{T}^2_{\text{sym}}$ $(\mathbf{S}_i^T = \mathbf{S}_i)$.

Альтернативным к представлению (20) является следующее представление тензора $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{m} s_i \overset{m}{\mathbf{S}}_i.$$

Используя (14) и (22), определим следующую операцию с собственными проекциями

$$(\mathbf{S}_i \otimes \mathbf{S}_j) : (\mathbf{S}_k \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{S}_l) = \delta_{kj} \delta_{jl} (\mathbf{S}_i \otimes \mathbf{S}_j) \quad (\text{не суммировать по } j). \tag{23}$$

Верно следующее тождество:

$$(\mathbf{S}_i \otimes \mathbf{S}_i) : \mathbf{X} = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{S}_i \quad (\text{не суммировать по } i). \tag{24}$$

## 2. Базовая кинематика

Рассмотрим движение тела $\mathfrak{B}$ в трехмерном евклидовом точечном пространстве $\mathcal{E}$. Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}$ обозначают радиус-векторы некоторой материальной точки $P$ в отсчетной (неподвижной) и текущей (двигающейся) конфигурациях соответственно. Мы предполагаем, что преобразование отсчетной конфигурации в текущую конфигурацию описывается *законом движения* — непрерывной векторной функцией с требуемыми условиями гладкости (хотя бы $C^2$ от $t$, см. [85])

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) : \ \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{X}$$

при выполнении условия

$$0 < J(\equiv \det \mathbf{F}) < \infty \quad \forall\, t > t_0.$$

Здесь и далее $\mathbf{F} \equiv \operatorname{Grad} \mathbf{x} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X} \in \mathcal{T}^{2+}$ — *тензор градиента деформации*, $t$ — монотонно возрастающий параметр деформирования (для краткости далее называем этот параметр временем), $t_0$ — значение параметра $t$, соответствующее отсчетной конфигурации тела $\mathfrak{B}$.

По теореме о полярном разложении (см., например, [11, 46, 78, 88]) тензор $\mathbf{F} \in \mathcal{T}^{2+}$ может быть представлен единственным образом в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{T}^{2++}_{\text{sym}},\ \mathbf{R} \in \mathcal{T}^{2+}_{\text{orth}}), \tag{25}$$

где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — соответственно, правый и левый *тензоры искажения*, $\mathbf{R}$ — *тензор ротации* (здесь и далее $\mathcal{T}^{2++}_{\text{sym}} \subset \mathcal{T}^{2+}$ обозначает совокупность всех симметричных положительно определенных тензоров второго порядка). Отметим, что, в силу предположения $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \in C^2$ от $t$, отсюда следует, что $\mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{V} \in C^1$ от $t$ (см. [85]).

Рассмотрим *евклидовы преобразования* [56, 57, 58, 78]

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{X}^*, t^*) \equiv \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}(t), \quad \mathbf{X}^* \equiv \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{X} + \mathbf{c}_0, \quad t^* = t + a,$$

где $\mathbf{Q}(t) \in \mathcal{T}^{2+}_{\text{orth}}$ — произвольный тензор, $\mathbf{c}(t)$ — произвольный вектор и $a \in R$ — произвольное число ($\mathbf{Q}_0 \equiv \mathbf{Q}(t_0)$ и $\mathbf{c}_0 \equiv \mathbf{c}(t_0)$). Следуя определению в [78], дадим определение объективных тензоров.

**Определение 2.1** Тензоры $\mathbf{H} \in \mathcal{T}^2$ и $\mathbb{C} \in \mathcal{T}^4$ называются *объективными эйлеровыми* или *объективными лагранжевыми* (*эйлеровыми* или *лагранжевыми*) тензорами, если при евклидовых преобразованиях (25) для произвольных $\mathbf{Q}(t), \mathbf{Q}_0 \in \mathcal{T}^{2+}_{\text{orth}}$ они изменяются по законам

$$\mathbf{H}^*(P,t) = \mathcal{R}_Q(\mathbf{H})\ [= \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{H}(P,t) \cdot \mathbf{Q}^T(t)],$$
$$\mathbb{C}^*(P,t) = \mathcal{R}_Q(\mathbb{C})\ [= (\mathbf{Q}(t) \underline{\otimes} \mathbf{Q}(t)) : \mathbb{C}(P,t) : (\mathbf{Q}^T(t) \underline{\otimes} \mathbf{Q}^T(t))],$$

или

$$\mathbf{H}^*(P,t) = \mathcal{R}_{Q_0}(\mathbf{H})\ [= \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{H}(P,t) \cdot \mathbf{Q}_0^T(t)],$$
$$\mathbb{C}^*(P,t) = \mathcal{R}_{Q_0}(\mathbb{C})\ [= (\mathbf{Q}_0 \underline{\otimes} \mathbf{Q}_0) : \mathbb{C}(P,t) : (\mathbf{Q}_0^T \underline{\otimes} \mathbf{Q}_0^T)].$$

Среди введённых выше тензоров кинематического типа тензор $\mathbf{U}$ является лагранжевым, тензор $\mathbf{V}$ — эйлеровым, а тензоры $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$ не являются объективными. Введём еще один лагранжев тензор: правый тензор деформаций Коши – Грина (см. [19])

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}. \tag{26}$$

Отметим, что прямое представление тензора $\mathbf{C}$ через тензор градиента деформации $\mathbf{F}$ делает его использование удобным для приложений.

Пусть тензор $\mathbf{U} \in \mathcal{T}^{2++}_{\text{sym}}$ имеет спектральное представление

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \mathbf{N}_k \otimes \mathbf{N}_k. \tag{27}$$

Собственные значения $\lambda_k > 0$ называются *главными удлинениями*, а тройка векторов $\{\mathbf{N_k}\}$ ($k = 1, 2, 3$) — лагранжевой тройкой правоориентированных ортонормированных собственных векторов тензора $\mathbf{U}$. Из (26), (27) получаем спектральное представление тензора $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^{3} \mu_k \mathbf{N}_k \otimes \mathbf{N}_k, \quad \mu_k = \lambda_k^2. \tag{28}$$

Пусть $m$-индекс тензора $\mathbf{U}$ равен $m$. Преобразуем спектральные представления (27), (28) тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{C}$, используя собственные проекции $\mathbf{U}_i$ ($i = 1, \ldots, m$) тензора $\mathbf{U}$. Получим (см. раздел 1)

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{U}_i, \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathbf{U}_i. \tag{29}$$

Отметим, что собственные проекции $\mathbf{U}_i \in \mathcal{T}^2_{\rm sym}$ являются лагранжевыми тензорами. Введём дополнительно к условию $\mathbf{U}_i \in C^1$ условие $\lambda_i \in C^1$ от $t$ (см. [57]).

**Определение 2.2** Классические [15] (простые [19]) изотропные тензорные функции вида

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{m} f(\lambda_i)\mathbf{U}_i,$$
$$f(\lambda) \in R: \ f(\lambda) \in C^2, \quad f'(\lambda) > 0 \text{ при } \lambda \in (0,\infty), \quad f(1) = 0, \ f'(1) = 1 \quad (30)$$

образуют *семейство Хилла лагранжевых тензоров деформаций.*

Рассмотрим два тензора из семейства лагранжевых тензоров деформаций Хилла

$$\mathbf{E}^{(0)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \ln\lambda_i \mathbf{U}_i, \quad \mathbf{E}^{(2)} \equiv \sum_{i=1}^{m} f^{(2)}(\lambda_i)\mathbf{U}_i, \ f^{(2)}(\lambda) \equiv \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1).$$

Тензор $\mathbf{E}^{(0)} \equiv \ln\mathbf{U}$ называется *правым тензором логарифмических деформаций* (*правым тензором деформаций Генки*), а тензор $\mathbf{E}^{(2)}$ — *тензором деформаций Грина – Лагранжа* (см. [19]). Представим тензор $\mathbf{E}^{(2)}$ следующим образом:

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}).$$

Отметим, что тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{C}$ не входят в семейство тензоров деформаций Хилла.

Введем *вектор скорости* $\mathbf{v}$ и *тензор градиента скорости* $\mathbf{l} \in \mathcal{T}^2$

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{l} \equiv \operatorname{grad}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1},$$

а также симметричный эйлеров *тензор скорости деформаций* $\mathbf{d} \in \mathcal{T}^2_{\rm sym}$

$$\mathbf{d} \equiv \operatorname{sym}\mathbf{l} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T),$$

и его лагранжев двойник: симметричный лагранжев *тензор скорости деформаций с исключенным поворотом* $\mathbf{D} \in \mathcal{T}^2_{\rm sym}$ [19]

$$\mathbf{D} \equiv \mathcal{R}_{R^T}(\mathbf{d}) = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{R} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}). \quad (31)$$

Здесь и далее точка над величиной обозначает ее материальную производную. Перепишем равенство (31) следующим образом:

$$\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} = 2\mathbf{D}. \quad (32)$$

Рассматривая (32) как тензорное уравнение относительно $\dot{\mathbf{U}}$, получим решение (см. [57])

$$\dot{\mathbf{U}} = \sum_{i,j=1}^{m} \Psi_{ij}\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j, \quad (33)$$

где

$$\Psi_{ij} \equiv \Psi(\lambda_i, \lambda_j) \equiv \begin{cases} \lambda_i, & \text{если } i = j \\ \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}, & \text{если } i \neq j \end{cases}.$$

Справедливо следующее равенство [95]:

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{i,j=1}^{m} \phi_{ij}\mathbf{U}_i \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}_j, \quad (34)$$

где

$$\phi_{ij} \equiv \phi(\lambda_i, \lambda_j) \equiv \begin{cases} f'(\lambda_i), & \text{если } i = j \\ \frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}, & \text{если } i \neq j \end{cases}.$$

Подставляя в правую часть (34) выражение для $\dot{\mathbf{U}}$ из (33), получим

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j, \tag{35}$$

где

$$f_{ij} \equiv \bar{f}(\lambda_i, \lambda_j) \equiv \phi(\lambda_i, \lambda_j) \Psi(\lambda_i, \lambda_j) = \begin{cases} f'(\lambda_i)\lambda_i, & \text{если } i = j \\ \frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j} \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}, & \text{если } i \neq j \end{cases}.$$

**Примечание 2.1.** Так как материальная производная лагранжева тензора является лагранжевым тензором [54], то $\dot{\mathbf{U}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ — лагранжевы тензоры.

Приведем явные выражения величин $f_{ij}$ для введённых выше тензоров деформаций (хотя тензор $\mathbf{U}$ и не принадлежит семейству тензоров деформаций Хилла, так как генерирующая этот тензор скалярная функция $f(\lambda) = \lambda$ не удовлетворяет свойству $f(1) = 0$ в (30), выражение (35) при отождествлении $\mathbf{E} = \mathbf{U}$ остается справедливым):

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}, \quad f_{ij}^{U} = \begin{cases} \lambda_i, & \text{если } i = j \\ \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}, & \text{если } i \neq j \end{cases}. \tag{36}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(2)}, \quad f_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \lambda_i^2, & \text{если } i = j \\ \lambda_i\lambda_j, & \text{если } i \neq j \end{cases}. \tag{37}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)}, \quad f_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ \frac{\ln\lambda_i-\ln\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}, & \text{если } i \neq j \end{cases}. \tag{38}$$

Обращая равенство в (35), находим

$$\mathbf{D} = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^{-1} \mathbf{U}_i \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{U}_j.$$

В частности, отождествляя $\dot{\mathbf{E}}$ с $\dot{\mathbf{E}}^{(2)}$, получим

$$\mathbf{D} = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^{(2)\,-1} \mathbf{U}_i \cdot \dot{\mathbf{E}}^{(2)} \cdot \mathbf{U}_j, \tag{39}$$

где из (37) находим

$$f_{ij}^{(2)\,-1} = \begin{cases} \lambda_i^{-2}, & \text{если } i = j \\ \lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}, & \text{если } i \neq j \end{cases}. \tag{40}$$

## 3. Определяющие соотношения гиперупругого материала Генки

Пусть $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\tau} \equiv J\mathbf{s}$ — эйлеровы тензоры напряжений Коши и Кирхгофа соответственно. Лагранжев двойник тензора напряжений Кирхгофа

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} \equiv \mathcal{R}_{R^T}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}$$

называется *тензором напряжений Кирхгофа с исключенным поворотом* (*тензором напряжений Нолла* [19]). Введём мощность внутренних сил деформируемого твердого тела на единицу объема в отсчетной конфигурации [54]

$$w \equiv \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{D}. \tag{41}$$

Пусть $\mathbf{E}$ — тензор деформаций семейства Хилла. Следуя работам [44, 45], назовем пару лагранжевых тензоров напряжений и деформаций $(\mathbf{S}, \mathbf{E})$ сопряжёнными по мощности внутренних сил $w$, если выполнено следующее равенство

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{D} (= w). \tag{42}$$

Используя (35) и (42), получим

$$\mathbf{S} : (\sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j) = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{D} (= w). \tag{43}$$

Используя второе равенство в (11), находим (пользуемся тем, что $\mathbf{U}_i, \mathbf{D} \in \mathcal{T}^2_{\mathrm{sym}}$)

$$\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j = (\mathbf{U}_i \overset{\mathrm{sym}}{\otimes} \mathbf{U}_j) : \mathbf{D}.$$

Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j = [\sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} (\mathbf{U}_i \overset{\mathrm{sym}}{\otimes} \mathbf{U}_j)] : \mathbf{D}. \tag{44}$$

Используя свойство симметрии $f_{ij}$, находим из четвертого равенства в (11)

$$\mathbf{S} : [\sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} (\mathbf{U}_i \overset{\mathrm{sym}}{\otimes} \mathbf{U}_j)] = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_j. \tag{45}$$

Используя (44) и (45), получим

$$\mathbf{S} : (\sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j) = (\sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_j) : \mathbf{D}. \tag{46}$$

Используя (43), (46) и учитывая условие, что тензор $\mathbf{D}$ выбирается произвольно, находим

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_j. \tag{47}$$

Обращая равенство (47) относительно тензора $\mathbf{S}$, получаем выражение симметричного лагранжева тензора напряжений $\mathbf{S}$, сопряжённого лагранжеву тензору деформаций $\mathbf{E}$ из семейства тензоров деформаций Хилла

$$\mathbf{S} = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^{-1} \mathbf{U}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{U}_j. \tag{48}$$

Рассмотрим две пары сопряжённых лагранжевых тензоров напряжений и деформаций: $(\mathbf{S}^{(2)}, \mathbf{E}^{(2)})$ и $(\mathbf{S}^{(0)}, \mathbf{E}^{(0)})$. Из (48) получаем следующие выражения тензоров напряжений $\mathbf{S}^{(2)}$ и $\mathbf{S}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(2)} &= \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^{(2)\,-1} \mathbf{U}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{U}_j, \\ \mathbf{S}^{(0)} &= \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^{(0)\,-1} \mathbf{U}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{U}_j. \end{aligned} \tag{49}$$

Выражения для величин $f_{ij}^{(2)\,-1}$ приведены в (40), а выражения для $f_{ij}^{(0)\,-1}$ получим из (38):

$$f_{ij}^{(0)\,-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ \frac{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}{2\lambda_i\lambda_j(\ln\lambda_i - \ln\lambda_j)}, & \text{если } i \neq j \end{cases}. \tag{50}$$

Тензор напряжений $\mathbf{S}^{(2)}$ называется вторым тензором напряжений Пиола – Кирхгофа, а тензор напряжений $\mathbf{S}^{(0)}$ — правым тензором напряжений Генки. Из первого равенства в (49) получаем следующее представление тензора $\mathbf{S}^{(2)}$, не зависящее от выбора базиса:

$$\mathbf{S}^{(2)} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \tag{51}$$

**Определение 3.1**. Материал тела $\mathfrak{B}$ называется *гиперупругим (упругим по Грину)*, если существует естественная (свободная от напряжений) конфигурация тела и скалярнозначная функция $W(\mathbf{U})$, образованная относительно естественной конфигурации (т.е. естественная конфигурация тела $\mathfrak{B}$ отождествляется с отсчетной), такая что равенство

$$\dot{W}(\mathbf{U}) = w \tag{52}$$

имеет место для всех частиц тела. При этом функция $W(\mathbf{U})$ подчиняется следующим ограничениям [46]:

$$W(\mathbf{U}) \geq 0, \quad W(\mathbf{U}) = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad W(\mathbf{U}) \to \infty \text{ при } J \to 0^+ \text{ или } J \to \infty.$$

Функция $W(\mathbf{U})$ называется *удельной потенциальной энергией деформаций* (*упругим потенциалом* или *потенциальной энергией деформаций на единицу объема тела в отсчетной конфигурации*).

Пусть $\mathbf{E}$ — произвольный лагранжев тензор деформаций из семейства Хилла. Так как классическая изотропная тензорная функция $\mathbf{f}(\mathbf{U})$ обратима, то упругий потенциал $W(\mathbf{U})$ можно представить в виде

$$W(\mathbf{U}) = W[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{E})] \equiv W_E(\mathbf{E}). \tag{53}$$

Пусть $(\mathbf{S}, \mathbf{E})$ — пара сопряженных лагранжевых симметричных тензоров напряжений и деформаций (тензор деформаций $\mathbf{E}$ принадлежит семейству Хилла). Предполагая, что скалярнозначная функция тензорного аргумента $W_E(\mathbf{E})$ достаточно гладкая относительно компонент тензора $\mathbf{E}$, из (41), (42), (52) и (53) получим [78]

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W_E(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \tag{54}$$

Выражение (54) справедливо для произвольной (анизотропной) среды. Уточним это выражение для *изотропного* гиперупругого материала. Для этого материала потенциальная функция $W_E(\mathbf{E})$ будет выглядеть следующим образом [78]:

$$W_E(\mathbf{E}) = W_E(f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3)) = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \tag{55}$$

Справедливы следующие равенства [46]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{U}_i, \quad f_i \equiv f(\lambda_i) \ (i = 1, \ldots m). \tag{56}$$

Из (55), (56) получим

$$\frac{\partial W_E(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W_E}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{E}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W_E}{\partial f_i} \mathbf{U}_i. \tag{57}$$

Из (54), (57) находим

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{m} S_i \mathbf{U}_i, \quad S_i \equiv \frac{\partial W_E}{\partial f_i}. \tag{58}$$

Таким образом, для изотропной гиперупругой среды все лагранжевы тензоры напряжений, сопряжённые лагранжевым тензорам деформаций семейства Хилла, соосны друг другу и любому тензору деформаций этого семейства.

Из (47) и первого равенства в (58) следует, что для изотропной гиперупругой среды тензор напряжений Нолла соосен тензорам деформаций Хилла и сопряженных с ними тензорам напряжений, при этом справедливы следующие равенства

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \mathbf{U}_i, \quad \tau_i \equiv f_{ii} S_i \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{S} = \sum_{i=1}^{m} f_{ii}^{-1} \tau_i \mathbf{U}_i. \tag{59}$$

Из второго равенства в (49) и из (50), (58), (59) получаем равенство справедливое для изотропной гиперупругой среды [19, 44, 45, 84]

$$\mathbf{S}^{(0)} = \bar{\boldsymbol{\tau}}.$$

Тогда для изотропной гиперупругой среды пара лагранжевых тензоров напряжений и деформаций $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{E}^{(0)})$ является сопряжённой и определяющие соотношения (54) для этой пары выглядят следующим образом [45, 103]:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial W_{E^{(0)}}(\mathbf{E}^{(0)})}{\partial \mathbf{E}^{(0)}}. \tag{60}$$

Более конкретную запись определяющих соотношений (60) получим из (58) и (59)

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \mathbf{U}_i, \quad \tau_i = \frac{\partial W_{E^{(0)}}(\ln\lambda_1, \ln\lambda_2, \ln\lambda_3)}{\partial \ln\lambda_i}. \tag{61}$$

К классу моделей материалов с определяющими соотношениями вида (61) принадлежит *модель гиперупругого материала Генки*, упругий потенциал $W_H \equiv W_{E^{(0)}}$ для которой имеет вид

$$W_H(\ln\lambda_1, \ln\lambda_2, \ln\lambda_3) \equiv \frac{1}{2}\lambda(\sum_{k=1}^{3} \ln\lambda_k)^2 + \mu \sum_{k=1}^{3} \ln\lambda_k^2, \tag{62}$$

где $\lambda$, $\mu$ — параметры Ламэ. Запись потенциальной функции (62) эквивалентна следующей записи:

$$W_H(\mathbf{E}^{(0)}) = \frac{1}{2}\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E}^{(0)})^2 + \mu\mathbf{E}^{(0)} : \mathbf{E}^{(0)}. \tag{63}$$

Для модели материала Генки определяющие соотношения (60), принимая во внимание (63), выглядят следующим образом:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E}^{(0)})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}^{(0)},$$

или

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{C}^E : \mathbf{E}^{(0)}, \tag{64}$$

где $\mathbb{C}^E \in \mathcal{T}^4_{\mathrm{sym}}$ — лагранжев (одновременно и эйлеров) тензор (здесь и далее $\mathcal{T}^4_{\mathrm{sym}}$ обозначает совокупность всех тензоров четвертого порядка, имеющих главную симметрию) вида (см. (12), (13))

$$\mathbb{C}^E \equiv \lambda\mathbb{C}_{\mathrm{I}} + \mu(\mathbb{C}_{\mathrm{II}} + \mathbb{C}_{\mathrm{III}}) = \lambda\mathbb{C}_{\mathrm{I}} + 2\mu\mathbb{S}. \tag{65}$$

Второе равенство в (61), с учетом равенства $W_{E^{(0)}} = W_H$, будет выглядеть следующим образом:

$$\tau_i = \frac{\partial W_H}{\partial \ln \lambda_i} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \ln \lambda_k + 2\mu \ln \lambda_i \quad (i = 1, \dots m). \tag{66}$$

Из (51) и (58) получаем выражение для определения тензора $\mathbf{S}^{(2)}$ с использованием собственных проекций тензора $\mathbf{U}$ для материала Генки

$$\mathbf{S}^{(2)} = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \lambda_i^{-2} \mathbf{U}_i, \tag{67}$$

где $\tau_i$ вычисляются по формуле (66).

## 4. Тензор упругости для материала Генки

Дифференцируя левую и правую части (64) по $t$, получаем определяющие соотношения материала Генки через скорости

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbb{C}^E : \dot{\mathbf{E}}^{(0)}. \tag{68}$$

Так как материальная производная лагранжева тензора является лагранжевым тензором, то эти определяющие соотношения объективны по Лагранжу, т.е. все входящие в (68) тензоры являются лагранжевыми.

**Утверждение 4.1**. *Определяющие соотношения* (68) *эквивалентны следующим объективным по Лагранжу определяющим соотношениям через скорости*

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^D = \mathbb{C}^E : \mathbf{D}, \tag{69}$$

*где* $\bar{\boldsymbol{\tau}}^D$ *обозначает объективную по Лагранжу коротационную D-скорость тензора* $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, *введенную в* [96, 97]

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^D \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} - \boldsymbol{\Omega}^D \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^D. \tag{70}$$

Здесь и далее $\boldsymbol{\Omega}^D(\mathbf{U}, \mathbf{D}) \in \mathcal{T}^2_{\text{skew}}$ ($\mathcal{T}^2_{\text{skew}} \subset \mathcal{T}^2$ обозначает совокупность всех кососимметричных тензоров второго порядка) — кососимметричная изотропная тензорная функция своих аргументов, входящая в семейство непрерывных лагранжевых тензоров-спинов [57], ассоциированная с коротационной скоростью (70), вида

$$\boldsymbol{\Omega}^D \equiv \sum_{i \neq j = 1}^{m} \left( \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} + \frac{1}{\ln \lambda_i - \ln \lambda_j} \right) \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j. \tag{71}$$

В (71) и далее используется обозначение $\sum_{i \neq j=1}^{m}$ для представления суммирования по $i, j = 1, \dots m$ при $i \neq j$. При этом предполагаем, что значение этой суммы равно нулевому тензору при $m = 1$.

Доказательство. Лагранжева объективность D-скорости произвольного лагранжева тензора (включая и $\bar{\boldsymbol{\tau}}$) показана в [56, 57, 96, 97]. Запись (68) эквивалентна следующей записи [98]:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^D = \mathbb{C}^E : \mathbf{E}^{(0)\,D}.$$

Для D-скорости справедливо равенство [56, 57, 96, 97]

$$\mathbf{E}^{(0)\,D} = \mathbf{D},$$

откуда и следует доказательство утверждения. □

Из первого равенства в (61) и (71) получим

$$\boldsymbol{\Omega}^D \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^D = \sum_{i \neq j=1}^{m} \left[ \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} + \frac{1}{\ln \lambda_i - \ln \lambda_j} \right] (\tau_j - \tau_i) \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j. \tag{72}$$

Из (66) находим

$$\tau_j - \tau_i = 2\mu(\ln \lambda_j - \ln \lambda_i). \tag{73}$$

Из (72) и (73) получим

$$\boldsymbol{\Omega}^D \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^D = \sum_{i \neq j=1}^{m} \left[ \frac{2\lambda_i \lambda_j (\tau_i - \tau_j)}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} - 2\mu \right] \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j. \tag{74}$$

Из (65), (69), (70) и (74) находим

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\tau}} &= \bar{\boldsymbol{\tau}}^D + \boldsymbol{\Omega}^D \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^D = \mathbb{C}^E : \mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega}^D \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^D = \\ &= \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu \sum_{i,j=1}^{m} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j + \sum_{i \neq j=1}^{m} \left[ \frac{2\lambda_i \lambda_j (\tau_i - \tau_j)}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} - 2\mu \right] \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu \sum_{i=1}^{m} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_i + \sum_{i \neq j=1}^{m} \frac{2\lambda_i \lambda_j (\tau_i - \tau_j)}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j. \tag{75}$$

Из (51) следует равенство

$$\dot{\mathbf{S}}^{(2)} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{r}_U^T \cdot \mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(2)} \cdot \mathbf{r}_U, \tag{76}$$

где

$$\mathbf{r}_U \equiv \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{r}_U^T = \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}. \tag{77}$$

Из (35), с учетом (36), получим

$$\dot{\mathbf{U}} = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^U \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j. \tag{78}$$

Из первого равенства в (29) находим

$$\mathbf{U}^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-1} \mathbf{U}_i. \tag{79}$$

Подставляя (78), (79) в (77), получим

$$\mathbf{r}_U = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^U \lambda_j^{-1} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j, \quad \mathbf{r}_U^T = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^U \lambda_i^{-1} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j. \tag{80}$$

Из (67) и (80) получим

$$\mathbf{r}_U^T \cdot \mathbf{S}^{(2)} + \mathbf{S}^{(2)} \cdot \mathbf{r}_U = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^U (\lambda_i^{-1} \lambda_j^{-2} \tau_j + \lambda_j^{-1} \lambda_i^{-2} \tau_i) \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_j.$$

Преобразуем это равенство с учетом выражения для $f_{ij}^U$ в (36)

$$\mathbf{r}_U^T\cdot\mathbf{S}^{(2)}+\mathbf{S}^{(2)}\cdot\mathbf{r}_U=2\sum_{i=1}^m\lambda_i^{-2}\tau_i\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_i+2\sum_{i\neq j=1}^m\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\left(\frac{\tau_j}{\lambda_j}+\frac{\tau_i}{\lambda_i}\right)\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_j. \qquad (81)$$

Преобразовав первый член в правой части (81) с учетом (24), получим

$$\mathbf{r}_U^T\cdot\mathbf{S}^{(2)}+\mathbf{S}^{(2)}\cdot\mathbf{r}_U=2(\sum_{i=1}^m\lambda_i^{-2}\tau_i\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_i):\mathbf{D}+2\sum_{i\neq j=1}^m\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\left(\frac{\tau_j}{\lambda_j}+\frac{\tau_i}{\lambda_i}\right)\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_j. \qquad (82)$$

Используя первое свойство собственных проекций в (22) и первое равенство в (29), получим

$$\mathbf{U}^{-1}\cdot(\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{I})\cdot\mathbf{U}^{-1}=\lambda(\sum_{i=1}^m\lambda_i^{-2}\mathbf{U}_i)\mathrm{tr}\mathbf{D}. \qquad (83)$$

Используя (4) и второе свойство собственных проекций в (22), находим

$$\mathrm{tr}\mathbf{D}=\mathbf{I}:\mathbf{D}=(\sum_{j=1}^m\mathbf{U}_j):\mathbf{D}. \qquad (84)$$

Подставляя выражение для $\mathrm{tr}\mathbf{D}$ из (84) в (83) и используя первое равенство в (11), получим

$$\mathbf{U}^{-1}\cdot(\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{I})\cdot\mathbf{U}^{-1}=\lambda(\sum_{i,j=1}^m\lambda_i^{-2}\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_j):\mathbf{D}. \qquad (85)$$

Из (24) и первого равенства в (29) находим

$$\mathbf{U}^{-1}\cdot(2\mu\sum_{i=1}^m\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_i)\cdot\mathbf{U}^{-1}=2\mu(\sum_{i=1}^m\lambda_i^{-2}\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_i):\mathbf{D}. \qquad (86)$$

Кроме того,

$$\mathbf{U}^{-1}\cdot(\sum_{i\neq j=1}^m\frac{2\lambda_i\lambda_j(\tau_i-\tau_j)}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_j)\cdot\mathbf{U}^{-1}=\sum_{i\neq j=1}^m\frac{2(\tau_i-\tau_j)}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_j. \qquad (87)$$

Из (75), (85)-(87) получим

$$\mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{U}^{-1}=[\lambda\sum_{i,j=1}^m\lambda_i^{-2}\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_j+2\mu\sum_{i=1}^m\lambda_i^{-2}\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_i]:\mathbf{D}+\sum_{i\neq j=1}^m\frac{2(\tau_i-\tau_j)}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_j. \qquad (88)$$

Подставляя в правую часть (76) выражения (82) и (88), получим

$$\dot{\mathbf{S}}^{(2)}=[\lambda\sum_{i,j=1}^m\lambda_i^{-2}\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_j+2\mu\sum_{i=1}^m\lambda_i^{-2}\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_i-2\sum_{i=1}^m\lambda_i^{-2}\tau_i\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_i]:\mathbf{D}+$$
$$+\sum_{i\neq j=1}^m\frac{2(\tau_i-\tau_j)}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_j-2\sum_{i\neq j=1}^m\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\left(\frac{\tau_j}{\lambda_j}+\frac{\tau_i}{\lambda_i}\right)\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_j. \qquad (89)$$

Преобразуем два последних члена в (89)

$$\sum_{i\neq j=1}^{m}\frac{2(\tau_i-\tau_j)}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_j-2\sum_{i\neq j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\left(\frac{\tau_j}{\lambda_j}+\frac{\tau_i}{\lambda_i}\right)\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_j=$$
$$=2\sum_{i\neq j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\tau_i-\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\tau_j\right)\mathbf{U}_i\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}_j. \quad (90)$$

Используя второе равенство в (11), преобразуем (39)

$$\mathbf{D}=(\sum_{k,l=1}^{m}f_{kl}^{(2)\,-1}\mathbf{U}_k\overset{\text{sym}}{\otimes}\mathbf{U}_l):\dot{\mathbf{E}}^{(2)}. \quad (91)$$

Подставим выражение для $\mathbf{D}$ из (91) в первый член в правой части (89) с учетом (23). Далее, подставим выражение (39) для $\mathbf{D}$ в правую часть (90), а затем полученное выражение из правой части (90) подставим вместо двух последних членов в (89). В результате получим

$$\dot{\mathbf{S}}^{(2)}=[\lambda\sum_{i,j=1}^{m}\lambda_i^{-2}f_{jj}^{(2)\,-1}\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_j+2\mu\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{-2}f_{ii}^{(2)\,-1}\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_i-$$
$$-2\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{-2}f_{ii}^{(2)\,-1}\tau_i\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_i]:\dot{\mathbf{E}}^{(2)}+2\sum_{i\neq j=1}^{m}\frac{f_{ij}^{(2)\,-1}}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\tau_i-\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\tau_j\right)\mathbf{U}_i\cdot\dot{\mathbf{E}}^{(2)}\cdot\mathbf{U}_j. \quad (92)$$

Используя второе равенство в (11) и (37), преобразуем (92) к следующему выражению:

$$\dot{\mathbf{S}}^{(2)}=\mathbb{C}:\dot{\mathbf{E}}^{(2)},$$

где

$$\mathbb{C}\equiv\lambda\sum_{i,j=1}^{m}\lambda_i^{-2}\lambda_j^{-2}\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_j+2\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{-4}(\mu-\tau_i)\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_i+$$
$$+2\sum_{i\neq j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\left(\frac{\tau_i}{\lambda_i^2}-\frac{\tau_j}{\lambda_j^2}\right)\mathbf{U}_i\overset{\text{sym}}{\otimes}\mathbf{U}_j. \quad (93)$$

**Утверждение 4.2**. *Тензор $\mathbb{C}$, определенный в* (93)*, обладает двумя минорными симметриями.*

Доказательство. В соответствии с определением 1.3 надо показать, что для тензора $\mathbb{C}$ выполняется равенство (18). Находим

$$\mathbf{X}:\mathbb{C}:\mathbf{Y}=\lambda\sum_{i,j=1}^{m}\lambda_i^{-2}\lambda_j^{-2}\mathbf{X}:(\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_j):\mathbf{Y}+2\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{-4}(\mu-\tau_i)\mathbf{X}:(\mathbf{U}_i\otimes\mathbf{U}_i):\mathbf{Y}+$$
$$+\mathbf{X}:\sum_{i\neq j=1}^{m}p_{ij}(\mathbf{U}_i\overset{\text{sym}}{\otimes}\mathbf{U}_j):\mathbf{Y}, \quad (94)$$

где

$$p_{ij}\equiv\frac{2}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\left(\frac{\tau_i}{\lambda_i^2}-\frac{\tau_j}{\lambda_j^2}\right),\quad p_{ij}=p_{ji}. \quad (95)$$

Используя пятое тождество в (11), свойство (5) двойного внутреннего произведения тензоров второго порядка и то, что $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j \in \mathcal{T}^2_{\text{sym}}$, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{X} : (\mathbf{U}_i \otimes \mathbf{U}_j) : \mathbf{Y} = (\mathbf{X} : \mathbf{U}_i)(\mathbf{Y} : \mathbf{U}_j) = \mathrm{sym}\mathbf{X} : (\mathbf{U}_i \otimes \mathbf{U}_j) : \mathrm{sym}\mathbf{Y},\\ \mathbf{X} : (\mathbf{U}_i \otimes \mathbf{U}_i) : \mathbf{Y} = (\mathbf{X} : \mathbf{U}_i)(\mathbf{Y} : \mathbf{U}_i) = \mathrm{sym}\mathbf{X} : (\mathbf{U}_i \otimes \mathbf{U}_i) : \mathrm{sym}\mathbf{Y}.\end{aligned} \tag{96}$$

Определим тензор $\mathbf{Z} \in \mathcal{T}^2$

$$\mathbf{Z} \equiv \sum_{i \neq j = 1}^{m} p_{ij} (\mathbf{U}_i \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{U}_j) : \mathbf{Y}. \tag{97}$$

Используя второе тождество в (11), преобразуем выражение в правой части (97)

$$\mathbf{Z} = \sum_{i \neq j = 1}^{m} p_{ij} \mathbf{U}_i \cdot \mathrm{sym}\mathbf{Y} \cdot \mathbf{U}_j.$$

Используя свойство симметрии $p_{ij}$ (см. (95)) и то, что $\mathbf{U}_i,\ \mathbf{U}_j \in \mathcal{T}^2_{\text{sym}}$, получим

$$\mathbf{Z}^T = \sum_{i \neq j = 1}^{m} p_{ij} \mathbf{U}_j \cdot \mathrm{sym}\mathbf{Y} \cdot \mathbf{U}_i = \mathbf{Z},$$

т.е. $\mathbf{Z} \in \mathcal{T}^2_{\text{sym}}$. Тогда из (5) и (97) находим

$$\mathbf{X} : \mathbf{Z} = \mathrm{sym}\mathbf{X} : \sum_{i \neq j = 1}^{m} p_{ij} (\mathbf{U}_i \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{U}_j) : \mathrm{sym}\mathbf{Y}. \tag{98}$$

Из (94), (96) и (98) получим, что для любых $\mathbf{X},\ \mathbf{Y} \in \mathcal{T}^2$ справедливо равенство (18). □

**Примечание 4.1**. Тензор $\mathbb{C}$ обладает минорными симметриями вследствие того, что тензор упругости $\mathbb{C}$ производит отображение $\mathcal{T}^2_{\text{sym}} \overset{\text{Lin}}{\to} \mathcal{T}^2_{\text{sym}}$ симметричных тензоров $\dot{\mathbf{E}}^{(2)}$ на симметричные тензоры $\dot{\mathbf{S}}^{(2)}$.

**Утверждение 4.3**. *Тензор $\mathbb{C}$, определенный в (93), симметричен (обладает главной симметрией).*

Доказательство. Надо показать, что для тензора $\mathbb{C}$ выполнены достаточные условия главной симметрии (17). Так как мы показали (см. Утверждение 4.2), что тензор $\mathbb{C}$ обладает минорными симметриями, то в равенстве (17) достаточно положить $\mathbf{X},\ \mathbf{Y} \in \mathcal{T}^2_{\text{sym}}$. Тогда из шестого тождества в (11) следуют равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{X} : (\mathbf{U}_i \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{U}_j) : \mathbf{Y} = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{U}_j) : (\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{Y}),\\ \mathbf{Y} : (\mathbf{U}_i \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{U}_j) : \mathbf{X} = (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{U}_j) : (\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{X}).\end{aligned} \tag{99}$$

Используя равенства (96), (99), свойство симметрии величин $p_{ij}$ (см. (95)) и свойства операций двойного внутреннего произведения (4), легко показать выполнение равенства (17). □

Доказанное свойство главной симметрии тензора упругости $\mathbb{C}$ имеет большое теоретическое значение в инкрементальных формулировках гиперупругости, например, при формулировке вариационных принципов для уравнений, сформулированных с использованием скоростей, и критериев единственности и устойчивости решений этих уравнений [54]. Это свойство имеет также и большое прикладное значение, так как при конечно-элементной аппроксимации исходных уравнений, из главной симметрии тензора упругости $\mathbb{C}$ следует симметрия матрицы касательной жёсткости при действии консервативных внешних сил

[54]. Отметим, что свойство симметрии матрицы касательной жёсткости не выполняется автоматически при конечно-элементной аппроксимации уравнений гиперупругости. Например, в [39] приведена эйлерова формулировка уравнений гиперупругости для материала Генки, которая при конечно-элементной аппроксимации исходных уравнений приводит к появлению несимметричной матрицы касательной жёсткости.

Другой путь получения выражения тензора упругости представлен в [67]. Для материала Генки выражение этого тензора (формула (30) в [67]) совпадает с выражением (93) при значении $m$-индекса $m = 3$ (т.е. при отсутствии кратных собственных значений). Однако для случая, когда собственные значения являются кратными, выражение (93) имеет более простую структуру по сравнению с выражением, предлагаемым в [67].

В заключение этого раздела отметим, что для практического использования формул (67) и (93) надо собственные проекции $\mathbf{U}_i$ заменить на собственные проекции $\mathbf{C}_i$ в соответствии с (29), а собственные значения $\lambda_i$ надо определять через собственные значения $\mu_i$ из второй формулы в (28), т.е. из выражения $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$. В свою очередь, собственные значения $\mu_i$ и $m$-индекс можно определить из формул, представленных, например, в [79, 101].

## 5. Заключение

Получено новое компактное представление тензора упругости четвертого порядка, дающего линейную связь материальных производных второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа и тензора деформаций Грина – Лагранжа, для гиперупругого изотропного материала Генки. Компактность этого представления обусловлена использованием собственных проекций правого тензора деформаций Коши – Грина. Новизна этого представления состоит в том, что оно справедливо как для различных, так и для кратных собственных значений правого тензора деформаций Коши – Грина. Если все собственные значения правого тензора деформаций Коши – Грина различны, то полученное в настоящей работе выражение тензора упругости совпадает с полученным другим путем выражением в [67]. Для случая, когда собственные значения являются кратными, данное в настоящей работе представление этого тензора получено впервые и оно имеет более простой вид по сравнению с представлением, данным в [67] (отметим, что в [67] дано выражение тензора упругости только для различных собственных значений правого тензора деформаций Коши – Грина, а выражение тензора упругости для кратных собственных значений получается предельным переходом из первого выражения). Показано, что полученный тензор упругости обладает как минорными симметриями, так и главной симметрией, что обеспечивает такую конечно-элементную аппроксимацию уравнений, при которой матрица касательной жёсткости является симметричной.

Практическое значение настоящей работы состоит в том, что полученные выражения второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа и тензора упругости можно использовать для адаптации пользовательских программ коммерческих конечно-элементных кодов при численной реализации модели материала Генки. Такая реализация этих выражений позволит проводить компьютерное моделирование процессов деформирования эластомеров в бо́льшем диапазоне изменения деформаций по сравнению с использованием более распространенной модели материала Муни – Ривлина. Главным преимуществом модели гиперупругого изотропного материала Генки перед другими моделями гиперупругих изотропных материалов является простота определения констант материалов эластомеров из экспериментов по одноосному деформированию образцов в диапазоне изменения деформаций до 30 процентов.

# Список литературы


[1] L. Anand, “On Hencky’s approximate strain-energy function for moderate deformations”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **46**:1, (1979), 78–82.

[2] L. Anand, “Moderate deformations in extension-torsion of incompressible isotropic elastic materials”, *J. Mech. Phys. Solids.*, **34**, (1986), 293–304.

[3] Б. Д. Аннин, С. Н. Коробейников, “Обобщенные сопряженные тензоры напряжений и деформаций”, *Сиб. журн. инд. мат.*, **7**:3, (2004), 21–43.

[4] J. Arghavani, F. Auricchio, R. Naghdabadi, “A finite strain kinematic hardening constitutive model based on Hencky strain: General framework, solution algorithm and application to shape memory alloys”, *Int. J. Plasticity*, **27**, (2011), 940–961.

[5] A. F. M. Arif, T. Pervez, M. P. Mughal, “Performance of a fnite element procedure for hyperelastic-viscoplastic large deformation problems”, *Finite Elements in Analysis and Design*, **34**, (2000), 89–112.

[6] M. Asghari, S. Naghdabadi, S. Sohrabpour, “Some basis-free expressions for stresses conjugate to Hill’s strains through solving the tensor equation $\mathbf{AX}+\mathbf{XA}=\mathbf{C}$”, *Int. J. Solids Struct.*, **45**, (2008), 3584–3595.

[7] M. Asghari, “Basis free expressions for the stress rate of isotropic elastic materials in the cases of coalescent principal stretches”, *Int. J. Solids Struct.*, **47**, (2010), 611–613.

[8] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1996.

[9] R. C. Batra, “Linear constitutive relations in isotropic finite elasticity”, *J. Elast.*, **51**, (1998), 243–245.

[10] R. C. Batra, “Comparison of results from four linear constitutive relations in isotropic finite elasticity”, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **36**, (2001), 421–432.

[11] A. Bertram, *Elasticity and Plasticity of Large Deformations. An Introduction*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2008.

[12] J. Bonet, R. D. Wood, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[13] O. T. Bruhns, A. Meyers, H. Xiao, “Hencky’s elasticity model with the logarithmic strain measure: a study on Poynting effect and stress response in torsion of tubes and rods”, *Arch. Mech.*, **52**:4–5, (2000), 489–509.

[14] O. T. Bruhns, A. Meyers, H. Xiao, “Finite Bending of a Rectangular Block of an Elastic Hencky Material”, *J. Elast.*, **66**, (2002), 237–256.

[15] К. Ф. Черных, *Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах*, Машиностроение, Л., 1986.

[16] A. Chiskis, “Linear stress-strain relations in nonlinear elasticity”, *Acta Mech.*, **146**, (2001), 109–113.

[17] J. C. Criscione, J. D. Humphrey, A. S. Douglas, W. C. Hunter, “An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity”, *J. Mech. Phys. Solids.*, **48**, (2000), 2445–2465.

[18] J. C. Criscione, “Direct tensor expression for natural strain and fast, accurate approximation”, *Computers and Structures*, **80**, (2002), 1895–1905.

[19] A. Curnier, L. Rakotomanana, “Generalized strain and stress measures: critical survey and new results”, *Eng. Trans.*, **39**:3–4, (1991), 461–538.

[20] A. Curnier, *Computational Methods in Solid Mechanics*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994.

[21] A. Curnier, Ph. Zysset, “A family of metric strains and conjugate stresses, prolonging usual material laws from small to large transformations”, *Int. J. Solids Structures*, **43**, (2006), 3057–3086.

[22] H. Darijani, R. Naghdabadi, “Hyperelastic materials behavior modeling using consistent strain energy density functions”, *Acta Mech.*, **213**, (2010), 235–254.

[23] H. Darijani, R. Naghdabadi, “Constitutive modeling of solids at finite deformation using a second-order stress-strain relation”, *Int. J. Engng Sci.*, **48**, (2010), 223–236.

[24] J. Diani, P. Gilormini, “Combining the logarithmic strain and the full-network model for a better understanding of the hyperelastic behavior of rubber-like materials”, *J. Mech. Phys. Solids.*, **53**, (2005), 2579–2596.

[25] P. Dluzewski, “Anisotropic hyperelasticity based upon general strain measures”, *J. Elast.*, **60**, (2000), 119–129.

[26] G. Dui, “Time rates of Hill’s strain tensors”, *J. Elast.*, **54**, (1999), 129–140.

[27] G. Dui, Q. Ren, Z. Shen, “Conjugate stresses to Seth’s strain class”, *Mech. Res. Commun.*, **27**:5,

(2000), 539–542.

[28] G. Dui, Y. Chen, "Basis-free representations for the stress rate of isotropic materials", *Int. J. Solids Struct.*, **41**, (2004), 4845–4860.

[29] G. Dui, "Some basis-free formulae for the time rate and conjugate stress of logarithmic strain tensor", *J. Elast.*, **83**, (2006), 113–151.

[30] G. Dui, Z. Wang, Q. Ren, "Explicit formulations of tangent stiffness tensors for isotropic materials", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **69**, (2007), 665–675.

[31] K. Farahani, R. Naghdabadi, "Conjugate stresses of the Seth-Hill strain tensors", *Int. J. Solids Struct.*, **37**, (2000), 5247–5255.

[32] K. Farahani, R. Naghdabadi, "Basis free relations for the conjugate stresses of the strains based on the right stretch tensor", *Int. J. Solids Struct.*, **40**, (2003), 5887–5900.

[33] K. Farahani, H. Bahai, "Hyper-elastic constitutive equations of conjugate stresses and strain tensors for the Seth-Hill strain measures", *Int. J. Engng Sci.*, **42**, (2004), 29–41.

[34] J. E. Fitzgerald, "A tensorial Hencky measure of strain and strain rate for finite deformations", *J. Appl. Phys.*, **51**:10, (1980), 5111–5115.

[35] Y. C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[36] G. Gabriel, K. J. Bathe, "Some computational issues in large strain elasto-plastic analysis", *Computers and Structures*, **56**:2/3, (1995), 249–267.

[37] M. G. D. Geers, "Finite strain logarithmic hyperelasto-plasticity with softening: a strongly non-local implicit gradient framework", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **193**, (2004), 3377–3401.

[38] K. Ghavam, R. Naghdabadi, "Hardening materials modeling in finite elastic-plastic deformations based on the stretch tensor decomposition", *Materials & Design*, **29**, (2008), 161–172.

[39] А. И. Голованов, "Конечно-элементное моделирование больших деформаций гиперупругих тел в терминах главных удлинений", *Вычислительная механика сплошных сред*, **2**:1, (2009), 19–37.

[40] А. И. Голованов, "Численное моделирование больших деформаций упругопластических тел в терминах логарифмов главных удлинений", *Вычислительная механика сплошных сред*, **4**:1, (2011), 25–35.

[41] K. Hashiguchi, *Elastoplasticity Theory*, Springer, Berlin, 2009.

[42] P. Haupt, Ch. Tsakmakis, "Stress tensors associated with deformation tensors via duality", *Arch. Mech.*, **48**:2, (1996), 347–384.

[43] K. Heiduschke, "The logarithm strain space description", *Int. J. Solids Struct.*, **32**, (1995), 1047–1062.

[44] R. Hill, "On constitutive inequalities for simple materials — I", *J. Mech. Phys. Solids.*, **16**:4, (1968), 229–242.

[45] R. Hill, "Aspects of invariance in solid mechanics", *Advances in Applied Mechanics*, **18**, Academic Press, New York, 1978, 1–75.

[46] G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Egineering*, Wiley, Chichester *et al.*, 2000.

[47] C. O. Horgan, J. G. Murphy, "A generalization of Hencky's strain-energy density to model the large deformations of slightly compressible solid rubbers", *Mechanics of Materials*, **41**, (2009), 943–950.

[48] M. Itskov, "On the theory of fourth-order tensors and their applications in computational mechanics", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **189**, (2000), 419–438.

[49] M. Itskov, *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers (with Applications to Continuum Mechanics)*, Springer, Berlin, 2007.

[50] C. S. Jog, "The explicit determination of the logarithm of a tensor and its derivatives", *J. Elast.*, **93**, (2008), 141–148.

[51] P. A. Kakavas, "A new development of the strain energy function for hyperelastic materials using a logarithmic strain approach", *Journal of Applied Polymer Science*, **77**, (2000), 660–672.

[52] O. Kintzel, Y. Basar, "Fourth-order tensors - tensor differentiation with applications to continuum mechanics. P. I: Classical tensor analysis", *ZAMM*, **86**:4, (2006), 291–311.

[53] S. N. Korobeinikov, V. P. Agapov, M. I. Bondarenko, A. N. Soldatkin, "The general purpose nonlinear finite element structural analysis program PIONER", Int. Conf. on Numerical Methods and Applications, Sofia, 1989, 228–233.

[54] С. Н. Коробейников, *Нелинейное деформирование твердых тел*, Из-во СО РАН, Новосибирск, 2000.

[55] С. Н. Коробейников, "Строго сопряженные тензоры напряжений и деформаций", *ПМТФ*, **41**:3,

(2000), 513–518.

[56] S. N. Korobeynikov, “Objective tensor rates and applications in formulation of hyperelastic relations”, *J. Elast.*, **93**, (2008), 105–140.

[57] S. N. Korobeynikov, “Families of continuous spin tensors and applications in continuum mechanics”, *Acta Mech.*, **216**:1-4, (2011), 301–332.

[58] I-Sh. Liu, “On the transformation property of the deformation gradient under a change of frame”, *J. Elast.*, **71**, (2003), 73–80.

[59] C. P. Luehr, M. B. Rubin, “The significance of projection operators in the spectral representatin of symmetric second order tensors”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **84**, (1990), 243–246.

[60] А. И. Лурье, *Нелинейная теория упругости*, Наука, М., 1980.

[61] C.-S. Man, Z.-H. Guo, “A basis-free formula for time rate of Hill’s strain tensor”, *Int. J. Solids Struct.*, **30**:20, (1993), 2819–2842.

[62] *MARC Users Guide*, v. A, Theory and Users Information, MSC. Software Corporation, Santa Ana (CA), 2010.

[63] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.

[64] A. Meyers, H. Xiao, O. T. Bruhns, “Choice of objective rate in single parameter hypoelastic deformation cycles”, *Computers and Structures*, **84**, (2006), 1134–1140.

[65] C. Miehe, “Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **37**, (1994), 1981–2004.

[66] C. Miehe, “Comparison of two algorithms for the computation of fourth-order isotropic tensor functions”, *Computers and Structures*, **66**:1, (1998), 37–43.

[67] C. Miehe, M. Lambrecht, “Algorithms for computation of stresses and elasticity moduli in terms of Seth–Hill’s family of generalized strain tensors”, *Comm. Numer. Meth. Engng.*, **17**, (2001), 337–353.

[68] C. Miehe, “Anisotropic additive plasticity in the logarithmic strain space: modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **191**, (2002), 5383—5425.

[69] C. Miehe, S. Göktepe, J. M. Diez, “Finite viscoplasticity of amorphous glassy polymers in the logarithmic strain space”, *Int. J. Solids Structures*, **46**, (2009), 181—202.

[70] C. Miehe, J. M. Diez, S. Göktepe, L.-M. Schänzel, “Coupled thermoviscoplasticity of glassy polymers in the logarithmic strain space based on the free volume theory”, *Int. J. Solids Structures*, **48**, (2011), 1799—1817.

[71] K. N. Morman, Jr., “The generalized strain measure with application to nonhomogeneous deformations in rubber-like solids”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **53**, (1986), 726–728.

[72] F. D. Murnaghan, *Finite Deformation of an Elastic Solid*, Wiley, N.Y., 1951.

[73] J. J. Nader, “Linear response in finite elasticity”, *J. Elast.*, **73**, (2003), 165–172.

[74] R. Naghdabadi, M. Yeganeh, A. R. Saidi, “Application of corotational rates of the logarithmic strain in constitutive modeling of hardening materials at finite deformations”, *Int. J. Plasticity*, **21**, (2005), 1546–1567.

[75] D. W. Nicholson, “Tangent modulus matrix for finite element analysis of hyperelastic materials”, *Acta Mech.*, **112**, (1995), 187–201.

[76] В. В. Новожилов, “О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов”, *ПММ*, **15**:6, (1951), 709–722.

[77] В. В. Новожилов, *Теория упругости*, Судпромгиз, Л., 1958.

[78] R. W. Ogden, *Non-linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood, Chichester, 1984.

[79] F. Peyraut, Z.-Q. Feng, Q.-C. He, N. Labed, “Robust numerical analysis of homogeneous and non-homogeneous deformations”, *Appl. Num. Math.*, **59**, (2009), 1499–1514.

[80] G. Piero, “Some properties of the set of fourth-order tensors, with application to elasticity”, *J. Elast.*, **9**:3, (1979), 245–261.

[81] J. Plesek, A. Kruisova, “Formulation, validation and numerical procedures for Hencky’s elasticity model”, *Computers and Structures*, **84**, (2006), 1141–1150.

[82] А. А. Поздеев, П. В. Трусов, Ю. И. Няшин, *Большие упругопластические деформации*, Наука, М., 1986.

[83] W. Prager, *Einführung in die Kontinuumsmechanik*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1961; русс. пер.: В. Прагер, *Введение в механику сплошных сред*, Изд-во иностр. лит., М., 1963.

[84] C. Sansour, “On the dual variable of the logarithmic strain tensor, the dual variable of the Cauchy

stress tensor, and related issues", *Int. J. Solids Struct.*, **38**, (2001), 9221–9232.

[85] M. Scheidler, "Time rates of generalized strain tensors. Part I: Component formulas", *Mechanics of Materials*, **11**, (1991), 199–210.

[86] A.V. Shutov, R. Kreißig, "Application of a coordinate-free tensor formalism to the numerical implementation of a material model", *ZAMM*, **88**:11, (2008), 888–909.

[87] J.C. Simo, T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer, Berlin, 1998.

[88] C. Truesdell, W. Noll, *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, v.III/3, Handbuch der Physik, ed. S. Flügge, Springer, New York, 1965.

[89] П.В. Трусов, О.И. Дударь, И.А. Келлер, *Тензорная алгебра и анализ*, Пермский ТУ, Пермь, 1998.

[90] K.Y. Volokh, Comments and authors' reply on "Linear stress-strain relations in nonlinearelasticity" by A. Chiskis and R. Parnes (Acta Mech. 146, 109-113, 2001), *Acta Mech.*, **171**, (2004), 241–245.

[91] G. Weber, L. Anand, "Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **79**, (1990), 173–202.

[92] H. Xiao, "Unified explicit basis-free expressions for time rate and conjugate stress of an arbitrary Hill's strain", *Int. J. Solids Struct.*, **32**:22, (1995), 3327–3340.

[93] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate", *Acta Mech.*, **124**, (1997), 89–105.

[94] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate", *J. Elast.*, **47**, (1997), 51–68.

[95] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Strain rates and material spins", *J. Elast.*, **52**, (1998), 1–41.

[96] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Objective corotational rates and unified work-conjugacy relation between Eulerian and Lagrangean strain and stress measures", *Arch. Mech.*, **50**:6, (1998), 1015–1045.

[97] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Direct relationship between the Lagrangean logarithmic strain and the Lagrangean stretching and the Lagrangean Kirchhoff stress", *Mechanics Research Communications*, **25**:1, (1998), 59–67.

[98] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Existence and uniqueness of the integrable-exactly hypoelastic equation $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{*} = \lambda(\operatorname{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$ and its significance to finite inelasticity", *Acta Mech.*, **138**, (1999), 31–50.

[99] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "A natural generalization of hypoelasticity and Eulerian rate type formulation of hyperelasticity", *J. Elast.*, **56**, (1999), 59–93.

[100] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "The choice of objective rates in finite elastoplasticity: general results on the uniqueness of the logarithmic rate", *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **456**, (2000), 1865–1882.

[101] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Basis issues concerning finite strain measures and isotropic stress-deformation relations", *J. Elast.*, **67**, (2002), 1–23.

[102] H. Xiao, L.S. Chen, "Hencky's elasticity model and linear stress-strain relations in isotropic finite hyperelasticity", *Acta Mech.*, **157**, (2002), 51–60.

[103] H. Xiao, L.S. Chen, "Hencky's logarithmic strain and dual stress-strain and strain-stress relations in isotropic finite hyperelasticity", *Int. J. Solids Struct.*, **40**, (2003), 1455–1463.

[104] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Explicit dual stress-strain and strain-stress relations of incompressible isotropic hyperelastic solids via deviatoric Hencky strain and Cauchy stress", *Acta Mech.*, **168**, (2004), 21–33.

[105] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems", *Acta Mech.*, **176**, (2005), 135–151.

[106] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Elastoplasticity beyond small deformations", *Acta Mech.*, **182**, (2006), 31–111.

[107] H. Xiao, L.H. He, "A unified exact analysis for the Poynting effects of cylindrical tubes made of Hill's class of Hookean compressible elastic materials at finite strain", *Int. J. Solids Struct.*, **44**, (2007), 718–731.

[108] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, "Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems", *Acta Mech.*, **188**, (2007), 227–244.

[109] H. Xiao, Z.F. Yue, L.H. He, "Hill's class of compressible elastic materials and finite bending problems: Exact solutions in unified form", *Int. J. Solids Struct.*, **48**, (2011), 1340–1348.

[110] M. Yeganeh, R. Naghdabadi, "Axial effects investigation in fixed-end circular bars under torsion with a finite deformation model based on logarithmic strain", *Int. J. Mech. Sci.*, **48**, (2006), 75-84.

[111] X. Zhou, K.K. Tamma, "On the applicability and stress update formulations for corotational stress

rate hypoelasticity constitutive models", *Finite Elements in Analysis and Design*, **39**, (2003), 783-816.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 04 июля 2011 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-08-00684) и Интеграционного проекта СО РАН (проект 119).

---

*Korobeynikov S. N., Oleinikov A. A.* Lagrangian formulation of Hencky's hyperelastic material. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 2. P. 155–180.

ABSTRACT

New representation of the fourth order elasticity tensor for Hencky's hyperelastic isotropic material is obtained. Compactness of this representation is followed by use of eigenprojections of the right Cauchy – Green strain tensor. It is shown that the obtained elasticity tensor possesses both minor symmetries, and the major symmetry.

Key words: *isotropic hyperelasticity, Hencky's material, elasticity tensor, eigenprojections.*