

УДК 539.0  
MSC2010 74B20

© С. Н. Коробейников, А. А. Олейников, А. Ю. Ларичкин, А. В. Бабичев,  
В. В. Алёхин<sup>1</sup>

## Численная реализация лагранжевой формулировки определяющих соотношений изотропного гиперупругого материала Генки

Лагранжева формулировка определяющих соотношений изотропного гиперупругого материала Генки реализована в пакете MSC.Marc. Достоверность реализации подтверждается сравнением численных решений, полученных с использованием пакета MSC.Marc, с точными решениями трехмерных задач о простом сдвиге и об одноосном растяжении стержня из материала Генки. Получены новые решения задачи о возникновении шейки и послекритическом деформировании стержня при его растяжении заданным перемещением торца.

Ключевые слова: *изотропная гиперупругость, материал Генки, метод конечных элементов, пакет MSC.Marc.*

### Введение

В работе [25] проведен подробный анализ существующих формулировок определяющих соотношений гиперупругости и отмечена выдающаяся среди этих соотношений роль изотропного гиперупругого материала Генки. В [25] отмечается, что «... для изотропной гиперупругой среды единственной парой сопряжённых лагранжевых тензоров напряжений и деформаций из семейства Хилла, пролонгирующих

---

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090, г. Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 15; Новосибирский государственный университет, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2; Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 631013, г. Комсомольск-на-Амуре, просп. Ленина, 27; Институт геологии и минералогии им. В. С. Соболева СО РАН, 630090, г. Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 3. Электронная почта: s.n.korobeynikov@mail.ru, cvmi@knastu.ru, larichkin@hydro.nsc.ru, babichev@igm.nsc.ru, alekhin@hydro.nsc.ru

закон Гука из области малых в область умеренных деформаций и имеющих прикладное значение, является пара тензоров  $(\bar{\tau}, \mathbf{E}^{(0)})$ . . . ». Напомним, что классический закон Гука для изотропных упругих материалов строится в виде зависимости тензора напряжений Коши  $\mathbf{s}$  от тензора деформаций Коши  $\boldsymbol{\epsilon}$ :  $\mathbf{s} = \Phi(\boldsymbol{\epsilon})$ , где  $\Phi$  — однородная изотропная функция первой степени от  $\boldsymbol{\epsilon}$  (см., например, [19]). Определяющие соотношения закона Гука имеют механический смысл только для бесконечно малых деформаций, так как тензор деформаций Коши  $\boldsymbol{\epsilon}$  не объективен, т.е. этот тензор нельзя использовать для построения определяющих соотношений нелинейной среды (см., например, [34]). При замене пары тензоров  $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\epsilon})$  в законе Гука на пару тензоров  $(\bar{\tau}, \mathbf{E}^{(0)})$ , где  $\bar{\tau}$  — тензор напряжений Нолла, а  $\mathbf{E}^{(0)}$  — правый тензор логарифмических деформаций (правый тензор деформаций Генки), приходим к модели изотропного гиперупругого материала Генки, которую можно использовать для моделирования деформирования эластомеров в условиях больших деформаций, так как тензоры  $\bar{\tau}$  и  $\mathbf{E}^{(0)}$  объективны по Лагранжу [23, 24].

Л. Ананд [1, 2] показал, что в интервале  $(0,7;1,3)$  изменения главных удлинений деформация многих эластомеров описывается моделью материала Генки. Это означает, что если исследователя интересует моделирование процессов деформирования эластомеров в указанных рамках изменения главных удлинений, то ему можно воспользоваться моделью материала Генки. При этом константы этой модели материала нетрудно определить из экспериментов по одноосному деформированию образцов, в результате выполнения которых надо определить модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  (обычно для эластомеров значение коэффициента Пуассона при обработке экспериментов в логарифмических деформациях близко к значению 0.5, т.е. эластомеры зачастую принадлежат к почти несжимаемым материалам). Отметим, что для других известных моделей материалов, описывающих деформирование эластомеров, определение констант материалов более затруднительно, чем для модели Генки (см., например, [5]).

При построении замкнутой системы уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) в переменных Лагранжа наиболее подходящей парой сопряжённых по Хиллу тензоров напряжений и деформаций [13, 14] (отметим, что пара тензоров  $(\bar{\tau}, \mathbf{E}^{(0)})$  является сопряжённой по Хиллу для изотропной гиперупругой среды [25]) является пара  $(\mathbf{S}^{(2)}, \mathbf{E}^{(2)})$ , где  $\mathbf{S}^{(2)}$  — второй тензор напряжений Пиола – Кирхгофа, а  $\mathbf{E}^{(2)}$  — тензор деформаций Грина – Лагранжа [6, 7, 15, 19, 29]. Главным преимуществом тензора деформаций Грина – Лагранжа перед другими тензорами деформаций семейства Хилла (включая и тензор  $\mathbf{E}^{(0)}$ ) является то, что компоненты этого тензора в переменных Лагранжа определяются непосредственно в системе отсчета без спектрального представления этого тензора (т.е. не требуется определять его собственные значения и векторы). Таким же свойством обладает правый тензор деформаций Коши – Грина  $\mathbf{C}$  (этот тензор не входит в семейство тензоров деформаций Хилла), который связан с тензором  $\mathbf{E}^{(2)}$  следующим равенством:  $\mathbf{E}^{(2)} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$  ( $\mathbf{I}$  — единичный тензор). Главная идея работы [25] состояла в выводе выражений для второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа  $\mathbf{S}^{(2)}$  и тензора упругости четвертого порядка  $\mathbb{C}$  (осуществляющего линейную связь материальных производных тензоров  $\mathbf{S}^{(2)}$  и  $\mathbf{E}^{(2)}$ ) для изотропного гиперупругого материала Генки через собственные значения и собственные проекции тензора  $\mathbf{C}$ .

Преимущества выражений искомым тензоров через собственные проекции вместо главных осей представлены в [24, 25]. Таким образом, в [25] получены формулы для определения тензоров  $\mathbf{S}^{(2)}$  и  $\mathbf{C}$  для модели изотропного гиперупругого материала Генки, удобные для дальнейшего использования в пакете MSC.Marc.

Самым мощным инструментом численного решения нелинейных задач МДТТ в настоящее время признан метод конечных элементов (МКЭ) (см., например, [3, 4, 7, 17, 19, 39]). Математические основы МКЭ для решения линейных задач МДТТ представлены в [16, 32]. Отметим, что при реализации МКЭ решения нелинейных задач посредством линеаризации представляются последовательностью решений линейных задач.

Одним и тем же термином «МКЭ» называют частные случаи двух методов дискретизации уравнений МДТТ: Ритца и Бубнова – Галёркина. Первый метод основан на вариационных формулировках, а второй — на слабых формах уравнений МДТТ (отметим, что естественная вариационная формулировка подходит только для самосопряженных задач, а слабая форма уравнений — для более широкого класса задач). Развитый математический аппарат с набором сформулированных и доказанных теорем об оптимальности этих методов, сходимости приближенных решений к точным, полноте пространств аппроксимирующих функций и так далее (см., например, [16, 32]) обеспечил надежный базис для развития алгоритмов и их реализации для численных решений задач МДТТ. На заре становления этих двух методов (около столетия назад) базисные функции для представления неизвестных конструировались в пространстве  $C^\infty$  (обычно использовались тригонометрические функции). Но такие базисные функции оказались малоприспособными для практических приложений, поэтому оба этих метода оказались в тени на несколько десятилетий, а в 50-е годы XX века в лидеры численных методов решения задач МДТТ вышел метод конечных разностей, основанный на разностных аппроксимациях сильных форм уравнений МДТТ. Однако опубликованная в 1943 г. работа Ф. Куранта (см., например, [32]) привела к тому, что уже через два десятилетия методы Ритца и Бубнова – Галёркина вновь вышли в лидеры численных методов решения задач МДТТ, каковыми и остаются до настоящего времени. Главной идеей этой работы (с которой связывают рождение МКЭ) является предложение использовать базисные функции из соболева пространства  $H^1$  для аппроксимации искомым неизвестных (вместо традиционного использования гладких базисных функций), даже если неизвестные принадлежат пространствам гладких функций.

Ещё в 60-е годы XX века специалисты Национального агентства космонавтики и аэронавтики (NASA) США разработали пакет NASTRAN, основанный на конечно-элементной аппроксимации уравнений линейной теории упругости (в настоящее время этот пакет развивается и распространяется корпорацией MSC.Software под маркой MSC.Nastran). Спустя десятилетие появились коммерческие пакеты, реализующие МКЭ для решения нелинейных задач МДТТ, такие как ABAQUS, ADINA, ANSYS, MARC и др. Первым пакетом такого рода стал пакет MARC, разработанный в начале 70-х годов XX века корпорацией MARC Analysis Research. В настоящее время этот пакет развивается и распространяется корпорацией MSC.Software под маркой MSC.Marc [26]. Этот пакет открыт для введения новых моделей материалов и может использоваться для решения геометрически

нелинейных задач МДТТ с большими деформациями.

Целью настоящей работы является завершение теоретических исследований по построению определяющих соотношений изотропного гиперупругого материала Генки в переменных Лагранжа. Мы устраняем допущенную в [25] ошибку в представлении тензора упругости  $\mathbf{C}$ . Далее мы представляем конечно-элементную формулировку гиперупругости для материала Генки в вариантах методов Ритца и Бубнова – Галёркина и приводим основные шаги реализации модели материала Генки в пользовательской программе (user's subroutine) `hypela2.f` пакета `MSC.Marc` [28]. Мы представляем решения трехмерных тестовых задач деформирования тел из материала Генки, полученных с использованием пакета `MSC.Marc`, демонстрирующие правильность развитых теоретических положений и достоверность работы разработанной пользовательской программы `hypela2.f`. Кроме того, мы приводим решение новой задачи о возникновении и развитии шейки растянутого стержня из материала Генки.

## 1. Определяющие соотношения изотропного гиперупругого материала Генки

Определяющие соотношения изотропного гиперупругого материала Генки получаются обобщением закона Гука для бесконечно малых деформаций упругих тел из изотропных материалов. Лагранжева формулировка этих определяющих соотношений имеет следующую запись в виде, свободном от выбора базиса [25]:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \lambda(\text{tr}\mathbf{E}^{(0)})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}^{(0)}, \quad (1)$$

где  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  — тензор напряжений Нолла;  $\mathbf{E}^{(0)}$  — правый тензор логарифмических деформаций (правый тензор деформаций Генки);  $\mathbf{I}$  — единичный тензор второго порядка;  $\lambda, \mu$  — параметры Ламэ. Запись определяющих соотношений (1) имеет следующую эквивалентную форму [25]:

$$\mathbf{S}^{(2)} = \sum_{i=1}^m \tau_i / \mu_i \mathbf{C}_i, \quad (2)$$

где  $\mathbf{S}^{(2)}$  — второй тензор напряжений Пиола – Кирхгофа;  $\mu_i > 0$ ,  $\mathbf{C}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — собственные значения и собственные проекции правого тензора деформаций Коши – Грина  $\mathbf{C}$  соответственно;  $m$  —  $m$ -индекс (см. [24, 25]);  $\tau_i$  — собственные значения тензора напряжений Нолла  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ , которые для материала Генки определяются через главные удлинения  $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$  из следующих равенств:

$$\tau_i = \lambda \ln J + 2\mu \ln \lambda_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (3)$$

С использованием величин  $\tau_i$  соотношения (1) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{i=1}^m \tau_i \mathbf{C}_i. \quad (4)$$

При получении выражения тензора упругости  $\mathbb{C}$  в [25] было использовано ошибочное тождество ((24) в [25]). Для исправления этой ошибки надо это тождество заменить на следующее:

$$(\mathbf{C}_i \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{C}_i) : \mathbf{X} = \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{C}_i \quad (\text{не суммировать по } i),$$

которое справедливо для любого тензора  $\mathbf{X} \in \mathcal{T}_{\text{sym}}^2$  ( $\mathcal{T}_{\text{sym}}^2 \subset \mathcal{T}^2$  — совокупность всех симметричных тензоров второго порядка  $\mathcal{T}^2$ ). Для исправления последствий использования ошибочного тождества надо в работе [25] сделать замены операции  $\otimes$  на операцию  $\overset{\text{sym}}{\otimes}$  в правой части формулы (86), во втором слагаемом первого слагаемого правой части формулы (88), во втором и третьем слагаемых первого слагаемого правой части формулы (89) и во втором слагаемом правой части формулы (93). Формула (93) работы [25] представляет выражение тензора упругости  $\mathbb{C}$ , связывающего материальные производные тензоров  $\mathbf{S}^{(2)}$  и  $\mathbf{E}^{(2)}$ :

$$\dot{\mathbf{S}}^{(2)} = \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}}^{(2)}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}^{(2)}$  — тензор деформаций Грина – Лагранжа, который связан с правым тензором деформаций Коши – Грина следующим выражением:

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (6)$$

В (5) и далее точка над величиной обозначает частную производную этой величины по некоторому монотонно возрастающему параметру деформирования (времени)  $t$ . Приведем правильное выражение тензора упругости  $\mathbb{C}$ , в котором, в целях использования в приложениях, заменяем собственные проекции  $\mathbf{U}_i$  правого тензора кратности удлинений  $\mathbf{U}$  (см. [25]) на собственные проекции  $\mathbf{C}_i$  тензора  $\mathbf{C}$  (справедливо равенство  $\mathbf{U}_i = \mathbf{C}_i$ ), а также главные удлинения  $\lambda_i$  выражаем через собственные значения  $\mu_i$  тензора  $\mathbf{C}$  ( $i = 1, \dots, m$ ):

$$\mathbb{C} \equiv \sum_{i,j=1}^m \frac{\lambda}{\mu_i \mu_j} \mathbf{C}_i \otimes \mathbf{C}_j + \sum_{i=1}^m \frac{2(\mu - \tau_i)}{\mu_i^2} \mathbf{C}_i \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{C}_i + \sum_{i \neq j=1}^m \frac{2}{\mu_i - \mu_j} \left( \frac{\tau_i}{\mu_i} - \frac{\tau_j}{\mu_j} \right) \mathbf{C}_i \overset{\text{sym}}{\otimes} \mathbf{C}_j. \quad (7)$$

Здесь и далее используется обозначение  $\sum_{i \neq j=1}^m$  для представления суммирования по  $i, j = 1, \dots, m$  при  $i \neq j$ . При этом предполагаем, что значение этой суммы равно нулевому тензору при  $m = 1$ .

Доказательство того, что тензор упругости  $\mathbb{C}$  обладает как двумя минорными, так и главной симметрией, проводится аналогично тому, как проводились доказательства утверждений 4.2, 4.3 в [25].

Также можно показать, что тензор  $\mathbb{C}$  объективен по Лагранжу (определение объективности по Лагранжу тензоров второго и четвёртого порядков приведено в [25]).

## 2. Сильная, слабая и вариационная формулировки уравнений движения изотропной гиперупругой среды Генки

Выпишем полную систему уравнений движения тела из изотропного гиперупругого материала Генки, которую можно получить из общих уравнений деформирования гиперупругой среды (см., например, [19])

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\mathbf{S}^{(2)} + \mathbf{S}^{(2)} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} && \text{в } V, \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* && \text{на } S_u, \\
 \mathbf{T} \equiv \mathbf{N} \cdot (\mathbf{S}^{(2)} + \mathbf{S}^{(2)} \cdot \nabla \mathbf{u}) &= \mathbf{T}^* && \text{на } S_T, \\
 \mathbf{E}^{(2)} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T) && \text{в } V, \\
 \mathbf{S}^{(2)} &= \frac{\partial \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \mathbf{E}^{(2)}}, \quad \tilde{W} = \frac{\lambda}{2} \ln^2 J + \mu(\ln^2 \lambda_1 + \ln^2 \lambda_2 + \ln^2 \lambda_3) && \text{в } V.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь и далее:  $V$  — область, занимаемая телом  $\mathfrak{B}$  в отсчётной конфигурации;  $S_u$ ,  $S_T$  — части граничной поверхности  $S = S_u \cup S_T$  ( $S = S_u \cap S_T = \emptyset$ ), ограничивающей область  $V$ , на которых заданы компоненты вектора перемещений  $\mathbf{u}$  и вектора напряжений  $\mathbf{T}$  соответственно;  $\nabla$  — оператор Гамильтона (символический набла-вектор);  $\mathbf{N}$  — вектор внешней нормали единичной длины к поверхности  $S_T$ ;  $\mathbf{f}$  — вектор массовых сил;  $\rho$  — массовая плотность материала в отсчётной конфигурации; символ «\*» обозначает заданную величину. Здесь под параметром  $t$  понимаем естественное время.

**Утверждение 3.1.** *Определяющие соотношения изотропного гиперупругого материала Генки (8)<sub>5</sub> эквивалентны определяющим соотношениям (2).*

*Доказательство.* Для любой пары сопряженных по Хиллу тензоров напряжений и деформаций в случае изотропного гиперупругого материала справедлива запись определяющих соотношений в виде (см. формулы (54), (55) в [25])

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W_E(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}, \quad W_E(\mathbf{E}) = W_E(f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3)) = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \tag{9}$$

где  $f \in C^2$  — скалярная функция, генерирующая семейство Хилла лагранжевых тензоров деформаций. В частности, из (9) получаем

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{E}^{(0)}}, \quad \mathbf{S}^{(2)} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{E}^{(2)}}. \tag{10}$$

Для материала Генки имеем (см. формулу (62) в [25])

$$\tilde{W} = \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2 + \mu \sum_{k=1}^3 (\ln \lambda_k)^2.$$

Из (10) получаем (см. формулу (57) в [25])

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \ln \lambda_i} \mathbf{C}_i, \quad \mathbf{S}^{(2)} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{W}}{\partial f_i^{(2)}} \mathbf{C}_i, \quad (11)$$

где  $f_i^{(2)} \equiv (\lambda_i^2 - 1)/2$ . Сравнивая выражения (11)<sub>1</sub> и (4), получаем  $\tau_i = \partial \tilde{W} / \partial \ln \lambda_i$ . Имеем

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial f_i^{(2)}} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \ln \lambda_i} \frac{\partial \ln \lambda_i}{\partial f_i^{(2)}} = \tau_i \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \ln \lambda_i}{\partial \lambda_i} = \frac{\tau_i}{\mu_i}. \quad (12)$$

Подставляя выражение для  $\partial \tilde{W} / \partial f_i^{(2)}$  из (12) в (11)<sub>2</sub>, приходим к представлению (2) для тензора  $\mathbf{S}^{(2)}$ . Так как формулу (11)<sub>2</sub> мы получили из формулы (10)<sub>2</sub>, то утверждение доказано.  $\square$

Уравнения движения (8)<sub>1</sub> справедливы в предположении о принадлежности компонент вектора перемещений к классу функций гладкости  $C^2$  (дважды непрерывно дифференцируемых) по пространственным переменным. Для справедливости слабой формы уравнений движения достаточно предположения о том, что компоненты вектора перемещений принадлежат соболеву пространству функций  $H^1$  [7]. Вводим поля векторов *виртуальных перемещений*, которые обозначаем через  $\delta \mathbf{u}$  и определяем следующим образом. Рассмотрим произвольные векторные поля, принадлежащие соболеву пространству функций  $H^1$  и равные нулевому вектору на той части границы  $S$ , где заданы компоненты вектора перемещений ( $S_u$ ), т.е.

$$\delta \mathbf{u} \in \mathfrak{W} \equiv \{\delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } S_u \mid \delta \mathbf{u} \in H^1\}.$$

Слабая форма уравнений движения (8)<sub>1</sub> (в литературе по механике сплошной среды слабую форму уравнений движения принято называть уравнением баланса виртуальных работ или виртуальных мощностей) имеет следующий вид [19]:

$$\int_V \mathbf{S}^{(2)} : \delta \mathbf{E}^{(2)} dV = \int_V \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_T} \mathbf{T}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathfrak{W}, \quad (13)$$

где вариация тензора деформаций Грина – Лагранжа определяется следующим образом:

$$\delta \mathbf{E}^{(2)} \equiv \frac{1}{2} [\nabla(\delta \mathbf{u}) + \nabla(\delta \mathbf{u})^T + \nabla(\delta \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla(\delta \mathbf{u})^T].$$

Для изотропного гиперупругого материала Генки к уравнению (13) добавляются кинематические связи (8)<sub>4</sub> и определяющие соотношения (8)<sub>5</sub>. На вектор  $\mathbf{u}$ , входящий в (13), накладываются только граничные условия (8)<sub>2</sub> (эти граничные условия называются *жесткими*), а граничные условия (8)<sub>3</sub> (так же, как и уравнения движения (8)<sub>1</sub>) следуют из уравнения (13), поэтому они называются *естественными*. При решении задач методом Бубнова – Галёркина, основанном на слабой форме (13), граничные условия (8)<sub>2</sub> выполняются точно, а граничные условия (8)<sub>3</sub> — приближенно.

Пренебрегая инерционным членом (т.е. полагая  $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ), получаем из уравнений движения уравнения равновесия. Для уравнений равновесия, кроме сильной и слабой форм, которые получаются из (8) и (13), отбрасыванием инерционного члена можно дать и вариационные формулировки, которые основаны на введении некоторых функционалов от искомым полей тензоров и векторов и определении стационарных значений функционалов в точках равновесия. Такие вариационные принципы для уравнений гиперупругости известны (см., например, [20, 36]). Однако эти принципы имеют небольшое прикладное значение. Проблема прямого нахождения точек равновесия состоит в том, что, как правило, при больших деформациях решения задач гиперупругости неединственны. То есть для одного и того же значения параметра деформирования  $t$  может существовать несколько равновесных конфигураций, а в результате применения некоторой процедуры численного решения обычно определяется только одна точка равновесия с неизвестным статусом относительно устойчивости равновесного состояния. Поэтому в настоящее время исследователи предпочитают вместо определения отдельных точек равновесия проследивать весь путь *квазистатического движения* гиперупругого тела, определяя равновесные конфигурации в точках интегральной кривой, описывающей это движение. Отметим, что при некоторых предположениях о виде векторов внешних сил  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{T}^*$  для определения равновесных конфигураций можно одновременно определить статус их устойчивости по отношению к динамическим возмущениям (см., например, [19]). Для формулировки задачи квазистатического движения гиперупругого тела в сильной форме отбрасываем в уравнении (8)<sub>1</sub> инерционный член и дифференцируем уравнения (8) по некоторому монотонно возрастающему параметру деформирования (который для простоты по-прежнему называем временем  $t$ ), в результате приходим к системе уравнений [19]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\dot{\mathbf{S}}^{(2)} + \dot{\mathbf{S}}^{(2)} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{S}^{(2)} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}) + \rho \dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{0} && \text{в } V, \\ \dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{u}}^* && \text{на } S_u, \\ \dot{\mathbf{T}} \equiv \mathbf{N} \cdot (\dot{\mathbf{S}}^{(2)} + \dot{\mathbf{S}}^{(2)} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{S}^{(2)} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}) &= \dot{\mathbf{T}}^* && \text{на } S_T, \\ \dot{\mathbf{E}}^{(2)} &= \frac{1}{2} (\nabla \dot{\mathbf{u}} + \nabla \dot{\mathbf{u}}^T + \nabla \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^T) && \text{в } V, \\ \dot{\mathbf{S}}^{(2)} &= \frac{\partial \hat{W}(\dot{\mathbf{E}}^{(2)})}{\partial \dot{\mathbf{E}}^{(2)}} && \text{в } V. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $\hat{W}$  — однородная потенциальная функция второй степени

$$\hat{W} \equiv \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{(2)} : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}}^{(2)} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{S}}^{(2)} = \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}}^{(2)} \quad (\mathbb{C} = \mathbb{C}^T).$$

Введение этой функции стало возможным вследствие главной симметрии тензора  $\mathbb{C}$ .

Уравнения (14) можно представить в слабой форме, однако эти уравнения допускают вариационную формулировку, которую мы здесь рассмотрим. Используем вариационный принцип Р. Хилла [10, 11, 12] (см. также [19]). Введём кинематически допустимые (варьируемые) поля скоростей вектора перемещений  $\dot{\mathbf{u}}$ , под

которыми понимаем произвольные векторные поля, удовлетворяющие (жёстким) граничным условиям (14)<sub>2</sub> на  $S_u$  из соболева пространства функций  $H^1$ , т.е.

$$\dot{\mathbf{u}} \in \mathfrak{U} \equiv \{\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* \text{ на } S_u \mid \dot{\mathbf{u}} \in H^1\}.$$

В вариационной формулировке Р. Хилла кинематические соотношения (14)<sub>4</sub> и определяющие соотношения (14)<sub>5</sub> предполагаются выполненными, но выполнение граничных условий (14)<sub>3</sub> заранее не требуется (т.е. эти граничные условия являются естественными). Запишем вариационное уравнение

$$\delta I(\dot{\mathbf{u}}) = 0, \quad (15)$$

где

$$I(\dot{\mathbf{u}}) \equiv \int_V \left[ \hat{W}(\dot{\mathbf{E}}^{(2)}) + \frac{1}{2} \mathbf{S}^{(2)} : (\nabla \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^T) - \rho \dot{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \right] dV - \int_{S_T} \dot{\mathbf{T}}^* \cdot \dot{\mathbf{u}} dS, \quad \dot{\mathbf{u}} \in \mathfrak{U}. \quad (16)$$

Вариационный принцип Р. Хилла формулируется следующим образом: уравнения (14)<sub>1</sub> и граничные условия (14)<sub>3</sub> являются уравнениями Эйлера и естественными граничными условиями вариационного уравнения (15). Наоборот, решение  $\hat{\mathbf{u}}$  уравнений (14)<sub>1</sub> и выполнение граничных условий (14)<sub>3</sub> поставляет стационарное значение функционалу (16), которое даётся формулой

$$I(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \left[ \int_{S_u} \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{u}}^* dS - \int_{S_T} \dot{\mathbf{T}}^* \cdot \hat{\mathbf{u}} dS - \int_V \rho \dot{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}} dV \right].$$

Это значение является минимальным при выполнении достаточного критерия единственности решений системы (14) (этот критерий представлен в [19]).

### 3. Конечно-элементная аппроксимация уравнений движения изотропной гиперупругой среды Генки

Как отмечалось во введении, слабая форма уравнений является базой для использования метода Бубнова – Галёркина. Рассмотрим конечно-элементную аппроксимацию уравнений (13) в варианте метода Бубнова – Галёркина.

Используем пошаговую процедуру интегрирования по времени уравнений движения. Предполагая, что в момент времени  $t$  решение найдено, рассматриваем уравнение (13) в момент времени  $t + \Delta t$  ( $\Delta t$  – шаг интегрирования). Переходя к компонентной записи в (13), производя линеаризацию, а затем конечно-элементную аппроксимацию неизвестных  $\mathbf{u}$  и полей  $\delta \mathbf{u}$ , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (подробности см. в [3, 7, 19, 39]):

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}. \quad (17)$$

Здесь  $\mathbf{M} \succ 0$  – матрица масс (не изменяется во времени),  ${}^t \mathbf{K}$  – симметричная матрица касательной жесткости,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$  – вектор внешних сил,  ${}^t \mathbf{F}$  – вектор внутренних

сил,  $\Delta \mathbf{U} \equiv {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - {}^t \mathbf{U}$  ( ${}^t \mathbf{U}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$  — векторы перемещений ансамбля узловых точек элементов, определённые в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$  соответственно). Здесь и в дальнейшем левый верхний индекс у величины обозначает тот момент времени, в который эта величина рассматривается.

Теперь рассмотрим вариант конечно-элементной аппроксимации уравнений квазистатического деформирования тела из гиперупругого материала в варианте метода Ритца.

Применяя конечно-элементную аппроксимацию компонент скорости вектора перемещений  $\dot{\mathbf{u}}$ , приходим к дискретному аналогу функционала (16) (подробности см. в [19])

$$\tilde{I}(\dot{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T {}^t \mathbf{K} \dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{R}},$$

где  $\dot{\mathbf{U}}$  — вектор допустимых скоростей перемещений узловых точек ансамбля элементов (с заданными значениями на границе  $S_u$ ),  $\dot{\mathbf{R}}$  — скорость вектора внешних сил. Из вариационного уравнения  $\delta \tilde{I}(\dot{\mathbf{U}}) = 0$  получаем систему квазилинейных алгебраических уравнений относительно вектора  $\dot{\mathbf{U}}$ . Присоединяя к ним начальные условия, приходим к задаче Коши

$${}^t \mathbf{K} \dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0, \quad (18)$$

где  $\mathbf{U}_0$  — заданный вектор начальных перемещений узловых точек. Аппроксимируя в (18) производные по времени с первым порядком точности, на каждом шаге по времени решаем систему линейных алгебраических уравнений относительно приращения вектора перемещения  $\Delta \mathbf{U}$  вида

$${}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}. \quad (19)$$

В правой части (19) заменили вектор  ${}^t \mathbf{R}$  на вектор  ${}^t \mathbf{F}$ , так как предполагается, что в момент времени  $t$  конечно-элементный ансамбль находится в равновесии, поэтому выполнен баланс внутренних и внешних сил, т. е.

$${}^t \mathbf{F} = {}^t \mathbf{R}.$$

Сравнивая уравнения (17) и (19), видим, что при отбрасывании инерционных сил система (17) сводится к системе (19). Таким образом, независимо от того, какой из двух методов аппроксимации уравнений МДТТ (Бубнова – Галёркина или Ритца) был выбран как база для конечно-элементной аппроксимации, дискретизованная система уравнений квазистатического движения получена одной и той же. На каждом шаге интегрирования решение можно уточнять. Обычно в пакетах, реализующих МКЭ, для уточнения решения используется метод Ньютона – Рафсона [3, 7, 19, 39]. При этом решение системы (17) или (19) рассматривается как решение для первой итерации метода Ньютона – Рафсона.

## 4. Введение модели изотропного гиперупругого материала Генки в пакет MSC.Marc

Матрица касательной жесткости  ${}^t \mathbf{K}$ , матрица масс  $\mathbf{M}$  и вектор внутренних сил  ${}^t \mathbf{F}$  конечно-элементного ансамбля (т.е. ансамбля узловых точек и конечных эле-

ментов) находятся с помощью операции *ассемблирования* из матриц касательных жёсткостей  ${}^t\mathbf{K}^e$ , матриц масс  $\mathbf{M}^e$  и векторов внутренних сил  ${}^t\mathbf{F}^e$  конечных элементов (подробности см. в [7, 19]):

$${}^t\mathbf{K} = A_{m=1}^M {}^t\mathbf{K}^m, \quad \mathbf{M} = A_{m=1}^M \mathbf{M}^m, \quad {}^t\mathbf{F} = A_{m=1}^M {}^t\mathbf{F}^m,$$

где знак  $A$  обозначает операцию ассемблирования,  $M$  — число конечных элементов в ансамбле. Для определения матриц касательных жёсткостей  ${}^t\mathbf{K}^e$  и векторов внутренних сил  ${}^t\mathbf{F}^e$  элементов операции, связанные с аппроксимацией компонент вектора перемещений и дифференцированием базисных функций по пространственным переменным, выполняются независимо от рассматриваемой модели материала. Разница в использовании моделей материалов состоит в том, что для каждой из моделей требуется вычислить вектор-столбец  $\mathbf{S}$  размерностью 6 и симметричную матрицу  $\mathbf{D}$  размерностью  $6 \times 6$  вида

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ & & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ & & & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ & \text{симм.} & & & D_{55} & D_{56} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Элементы вектора  $\mathbf{S}$  по соглашению, принятому в пакете MSC.Marc, связаны с компонентами тензора  $\mathbf{S}^{(2)}$  следующим образом:

$$S_1 = S_{11}^{(2)}, \quad S_2 = S_{22}^{(2)}, \quad S_3 = S_{33}^{(2)}, \quad S_4 = S_{12}^{(2)}, \quad S_5 = S_{23}^{(2)}, \quad S_6 = S_{13}^{(2)}, \quad (21)$$

а элементы матрицы  $\mathbf{D}$  определяются через компоненты тензора  $\mathbf{C}$  так:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \mathbb{C}_{1111}, & D_{12} &= \mathbb{C}_{1122}, & D_{13} &= \mathbb{C}_{1133}, \\ D_{14} &= \mathbb{C}_{1112}, & D_{15} &= \mathbb{C}_{1123}, & D_{16} &= \mathbb{C}_{1113}, \\ D_{22} &= \mathbb{C}_{2222}, & D_{23} &= \mathbb{C}_{2233}, & D_{24} &= \mathbb{C}_{2212}, \\ D_{25} &= \mathbb{C}_{2223}, & D_{26} &= \mathbb{C}_{2213}, & D_{33} &= \mathbb{C}_{3333}, \\ D_{34} &= \mathbb{C}_{3312}, & D_{35} &= \mathbb{C}_{3323}, & D_{36} &= \mathbb{C}_{3313}, \\ D_{44} &= \mathbb{C}_{1212}, & D_{45} &= \mathbb{C}_{1223}, & D_{46} &= \mathbb{C}_{1213}, \\ D_{55} &= \mathbb{C}_{2323}, & D_{56} &= \mathbb{C}_{2313}, & D_{66} &= \mathbb{C}_{1313}. \end{aligned} \quad (22)$$

Интегрирование по области, занимаемой элементом, проводится численно (обычно используются квадратурные формулы Гаусса – Лежандра [3, 39]). Таким образом, для каждого конечного элемента в точках интегрирования надо определить вектор  $\mathbf{S}$  и матрицу  $\mathbf{D}$  для каждого шага интегрирования (а также и для каждой итерации при уточнении решения методом Ньютона – Рафсона). Подходящей пользовательской программой (*user's subroutine*), позволяющей ввести модель материала Генки в пакет MSC.Marc, является программа `hypela2.f` [28], текст которой авторы работы написали на алгоритмическом языке FORTRAN77.

Представим основные шаги реализации модели Генки в программе `hypela2.f`:

- 1) **На входе:** даются компоненты тензора деформаций Грина – Лагранжа  $E_{11}^{(2)}$ ,  $E_{22}^{(2)}$ ,  $E_{33}^{(2)}$ ,  $2E_{12}^{(2)}$ ,  $2E_{23}^{(2)}$ ,  $2E_{13}^{(2)}$  и собственные значения  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  правого тензора деформаций Коши – Грина  $\mathbf{C}$ ;
- 2) определяем компоненты правого тензора деформаций Коши – Грина из (6):  $C_{ij} = 2E_{ij} + \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  – дельта Кронеккера);
- 3) определяем  $m$ -индекс по формулам (см. [24, 25])

$$m = \begin{cases} 3, & \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_1 \\ 2, & \mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3 \\ 1, & \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \end{cases};$$

- 4) находим собственные проекции  $\mathbf{C}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) тензора  $\mathbf{C}$ , используя формулы Сильвестра (см., например, [24, 25])

$$\mathbf{C}_i = \begin{cases} \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\mathbf{C} - \mu_j \mathbf{I}}{\mu_i - \mu_j} & \text{при } m = 2, 3 \\ \mathbf{I} & \text{при } m = 1 \end{cases};$$

- 5) **на выходе:** находим компоненты второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа из формул (2), (3) и заполняем элементы вектора  $\mathbf{S}$  в  $(20)_1$  в соответствии с соглашением (21); находим элементы матрицы  $\mathbf{D}$  в  $(20)_2$  из формул (7), (22).

Обычно исследователей интересуют значения компонент тензора напряжений Коши (тензора истинных напряжений). В пакете MSC.Marc предоставлена такая возможность. Тензор напряжений Коши  $\mathbf{s}$  определяется через второй тензор напряжений  $\mathbf{S}^{(2)}$  по формуле [19]

$$\mathbf{s} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^{(2)} \cdot \mathbf{F}^T.$$

## 5. Примеры численных расчётов

Для проверки правильности работы введённой в пакет MSC.Marc модели гиперупругого изотропного материала Генки получены решения как тестовых задач, так и задач о возникновении шейки в образце при его одноосном растяжении. В расчётах использовались константы материала Генки, близкие к константам реальных эластомеров (см, например, [1, 2, 5, 8, 9, 30]):  $\nu = 0,45$ ,  $E = 3,37$  МПа,  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>. Здесь  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – массовая плотность материала стержня. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона связаны с параметрами Ламэ следующим образом:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

## 5.1. Задача о растяжении куба

С целью проверки правильности работы модуля `hyperla2.f` при различных значениях  $m$ -индекса (1, 2 или 3) решалась задача о равномерном растяжении куба. Растягивающие напряжения прикладывались к граням куба таким образом, что  $m$ -индекс последовательно принимал значения  $m = 3$  (по всем трем направлениям к граням куба прикладывались напряжения различной величины),  $m = 2$  (по двум направлениям к граням куба прикладывались одинаковые напряжения, а по оставшемуся направлению — напряжения другой величины),  $m = 1$  (по всем направлениям к граням куба прикладываются напряжения одинаковой величины). Для всех трех случаев нагружения куба решения, полученные с помощью пакета MSC.Marc 2010, совпали с точными. В силу тривиальности задачи подробности расчётов не приводятся.

## 5.2. Задача о простом сдвиге

Приведем решение задачи о простом сдвиге (рис. 1).

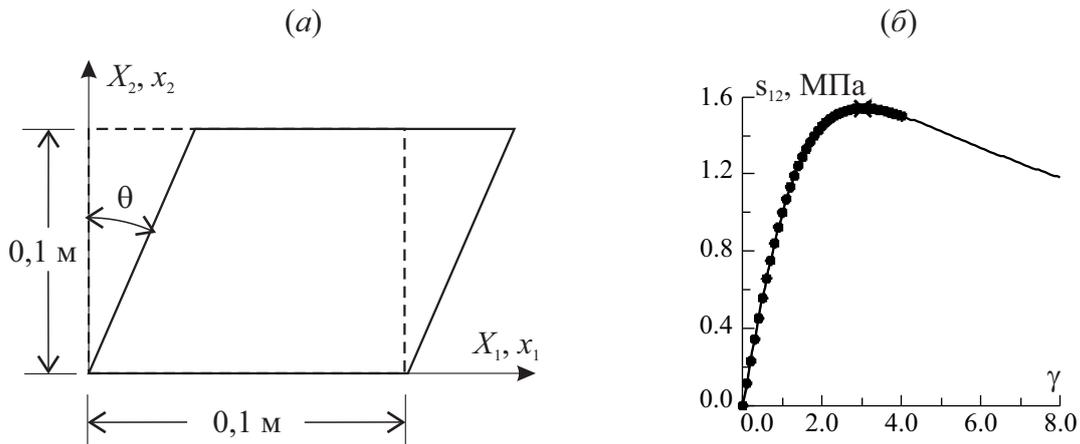


Рис. 1. Простой сдвиг: (а) геометрическая модель и схема деформирования куба; (б) зависимость сдвигового компонента тензора напряжения Коши от параметра  $\gamma = \tan \theta$  (сплошная кривая соответствует точному решению; маркерами отмечены точки равновесия, полученные в численных расчётах, крестом отмечена точка максимума на интегральной кривой).

Рассматривается куб с длиной рёбер 0,1 м, который находится в условиях простого сдвига. Кинематика деформирования куба задаётся законом движения (рис. 1,а):

$$x_1 = X_1 + \gamma(t)X_2 \quad (\gamma(t) = \tan \theta(t)), \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3.$$

Точное решение этой задачи при использовании для куба модели изотропного гиперупругого материала Генки приведено, например, в [37, 38]. Нас интересует эволюция сдвигового компонента тензора напряжений Коши  $s_{12}$  в зависимости от параметра  $\gamma$ , характеризующего сдвиг. Имеем [37, 38]

$$s_{12} = \frac{2\mu}{\sqrt{4 + \gamma^2}} \ln\left(1 + \frac{\gamma^2}{2} + \gamma\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}\right).$$

Конечно-элементная модель представлена одним восьмиузловым трёхмерным изопараметрическим конечным элементом с трилинейной интерполяцией геометрии и искомым полем компонент вектора перемещений (тип 7 в классификации пакета MSC.Marc 2010 [27]). Интегральная кривая точного решения и точки равновесия, полученные при численном решении уравнений квазистатического деформирования, приведены на рис. 1, б. Мы видим, что интегральная кривая имеет точку максимума, которая имеет в точном решении следующие координаты [37, 38]:

$$\gamma_m = 3,0177171, \quad s_{12,m} = 4\mu/\gamma_m = 1,32548684 \mu.$$

Эта точка отмечена крестом на интегральной кривой. Точки равновесия, полученные в численном решении, с большой точностью ложатся на интегральную кривую точного решения. Сгущение точек равновесия, полученных в численном решении, в окрестности точки максимума интегральной кривой объясняется тем, что использовалась технология интегрирования уравнений квазистатического движения с адаптивным шагом по времени. Величина этого шага выбирается из такого условия, согласно которому сходимость итерационного процесса в методе Ньютона – Рафсона обеспечивалась за желаемое число итераций на одном шаге по времени (в настоящем расчёте желаемое число итераций принято равным 5). Поэтому при увеличении степени нелинейности (при приближении к точке максимума интегральной кривой и последующем деформировании куба) шаг по времени автоматически уменьшается (для сходимости решения к точному требуется большее число итераций, чем в начальный момент интегрирования).

Настоящая задача решалась как квазистатическая, поэтому здесь время  $t$  играет только роль параметра деформирования и его величина не имеет какого-либо физического смысла.

### 5.3. Растяжение стержня заданным перемещением торца

Рассмотрим задачу о растяжении стержня заданным перемещением его торца (рис. 2).

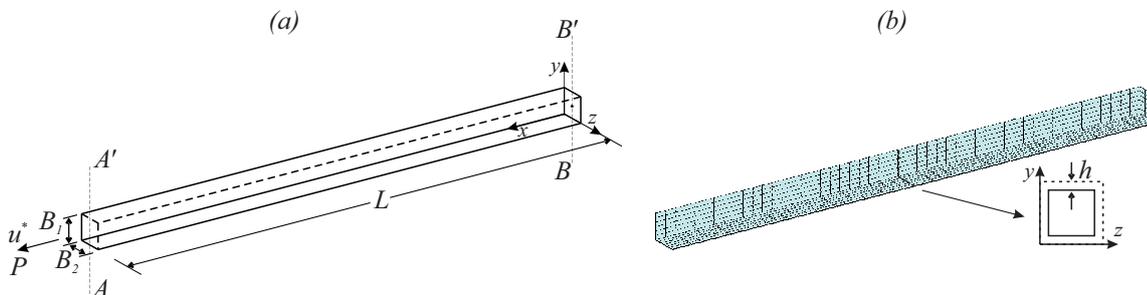


Рис. 2. Растяжение стержня заданным перемещением его торца: (а) геометрическая модель; (б) конечно-элементная модель стержня (внизу справа приведен тип возмущений, вводимых в геометрию стержня для конечно-элементной модели).

Сначала рассмотрим одноосное деформирование стержня, которое характеризует-

ся следующим полем компонент тензора напряжений Коши ( $s_{11} = s_{xx}$ ):

$$s_{11} \neq 0, \quad s_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; ij \neq 11).$$

Предполагаем, что стержень имеет прямоугольное сечение с линейными размерами  $B_1$ ,  $B_2$  и длину  $L$  до деформации (рис. 2,а). Полагаем поперечное сечение стержня  $x = 0$  неподвижным, поперечное сечение  $x = L$  перемещается по заданному закону  $u(t) = u^*(t)$ . Найдём точное решение задачи об одноосном растяжении стержня из изотропного гиперупругого материала Генки.

Пусть в результате деформации стержень, который имел линейные размеры  $(L, B_1, B_2)$ , приобрёл линейные размеры  $(l, b_1, b_2)$ . Так как деформация однородна, то в каждой точке стержня компоненты тензора деформаций Генки определяются следующим образом:

$$E_{11}^{(0)} = \ln \frac{l}{L}, \quad E_{22}^{(0)} = \ln \frac{b_1}{B_1}, \quad E_{33}^{(0)} = \ln \frac{b_2}{B_2}, \quad E_{12}^{(0)} = E_{23}^{(0)} = E_{13}^{(0)} = 0. \quad (23)$$

Для одноосного напряжённого состояния из (3) получаем

$$E_{22}^{(0)} = -\nu E_{11}^{(0)}, \quad E_{33}^{(0)} = -\nu E_{11}^{(0)}. \quad (24)$$

Кроме того, из (3) следует, что

$$\tau_{11} = E \ln \frac{l}{L}. \quad (25)$$

Из (23) и (24) получаем

$$b_1 = B_1 \left( \frac{l}{L} \right)^{-\nu}, \quad b_2 = B_2 \left( \frac{l}{L} \right)^{-\nu}. \quad (26)$$

Площадь поперечного стержня до деформации определяется из выражения

$$A = B_1 B_2. \quad (27)$$

Из (26) и (27) получаем выражение для площади поперечного сечения стержня после деформации

$$a = b_1 b_2 = \left( \frac{l}{L} \right)^{-2\nu} A. \quad (28)$$

Найдём величину  $J (= \det \mathbf{F})$ , используя (28):

$$J = \frac{V}{V_0} = \frac{la}{LA} = \left( \frac{l}{L} \right)^{(1-2\nu)}. \quad (29)$$

Так как тензоры напряжений Коши и Кирхгофа связаны равенством  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau}/J$  [19], то из (25) и (29) получаем значение компонента  $s_{11}$  тензора напряжений Коши  $\mathbf{s}$ :

$$s_{11} = E \left( \frac{l}{L} \right)^{(2\nu-1)} \ln \frac{l}{L}. \quad (30)$$

Растягивающая сила  $P$ , действующая в поперечном сечении стержня, имеет следующее значение:

$$P = as_{11}. \quad (31)$$

Из (28), (30), (31) получаем следующее выражение для определения силы  $P$ :

$$P = EA \left( \frac{l}{L} \right)^{-1} \ln \frac{l}{L}. \quad (32)$$

Обозначая  $\lambda_1 \equiv l/L$ , перепишем выражение (32)

$$P = EA \lambda_1^{-1} \ln \lambda_1. \quad (33)$$

Найдём скорость изменения силы  $P$ , дифференцируя левую и правую части (33) по параметру деформирования  $t$ :

$$\dot{P} = EA \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1^2} (1 - \ln \lambda_1). \quad (34)$$

Так как  $\dot{\lambda}_1 > 0$ , то из (34) получаем

$$\dot{P} \begin{cases} > 0 & \text{при } \lambda_1 < e \\ = 0 & \text{при } \lambda_1 = e \\ < 0 & \text{при } \lambda_1 > e \end{cases} \quad (e = 2,718281828459).$$

Таким образом, сила  $P$ , действующая в поперечном сечении стержня, монотонно возрастает в интервале изменения параметра  $\lambda_1 \in (1, e)$ , принимает максимальное (стационарное) значение при  $\lambda_1 = e$  и монотонно убывает в интервале  $\lambda_1 \in (e, +\infty)$ . Из (33) получаем максимальное значение силы  $P$ :

$$P_{\max} = \frac{EA}{e} \quad \text{при } l/L = e.$$

При одноосном однородном деформировании стержня перемещение  $u$  торца  $x = l$  связано с текущей длиной стержня  $l$  следующим выражением:

$$l(t) = L + u(t). \quad (35)$$

Из (32) и (35) получаем зависимость силы  $P$ , приложенной к торцу стержня, от перемещения  $u$ :

$$P = EA \left( 1 + \frac{u}{L} \right)^{-1} \ln \left( 1 + \frac{u}{L} \right). \quad (36)$$

Рассматривается стержень (рис. 2,а) с заданными выше константами материала, с запрещённым осевым перемещением на торце стержня в плоскости  $x = 0$  и с заданным перемещением  $u^*(t)$  на торце стержня, находящегося в недеформированном состоянии в плоскости  $x = L$ . Зададим следующие значения геометрических параметров стержня:  $B_1 = B_2 = 0.1$  м,  $L = 2$  м. Так как для квазистатического

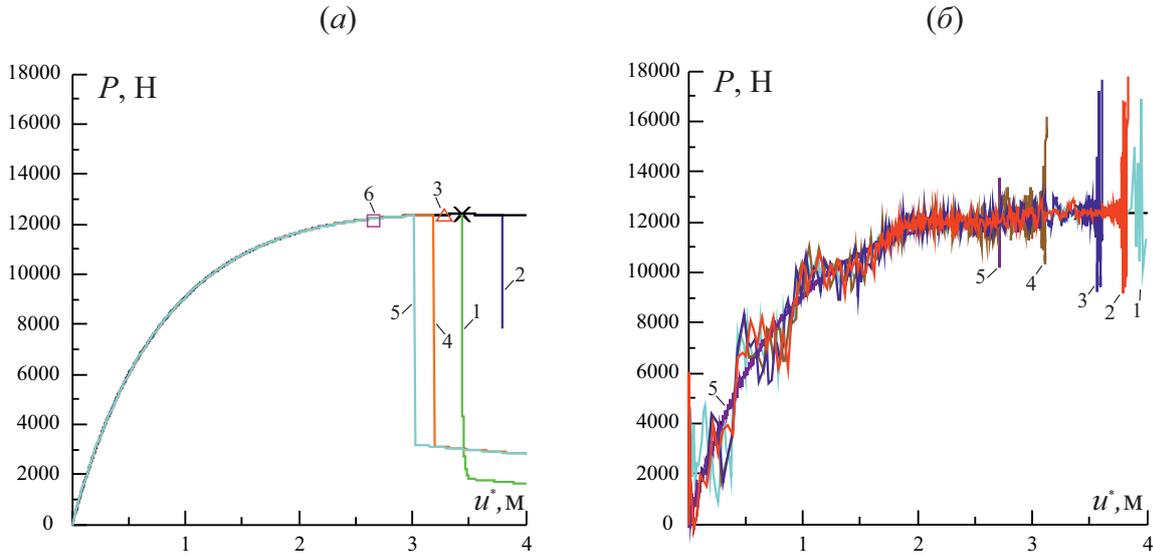


Рис. 3. Интегральные кривые решений задачи о растяжении стержня (сплошная кривая без номера соответствует фундаментальному решению статической задачи, крестом отмечена точка максимума на фундаментальном решении): (а) квазистатическое деформирование, кривые 1-6 соответствуют решениям задач S1-S6; (б) динамическое деформирование, кривые 1-5 соответствуют решениям задач D1-D5.

движения упругого тела  $t$  играет роль параметра деформирования (без какого-либо физического содержания), то для определённости задаём следующий закон движения торца  $x = l$ :

$$u^*(t) = 4t, \quad t \in [0, 1 \text{ сек}]. \quad (37)$$

Таким образом,  $u^*(1) = 4 \text{ м} (> u_{\max})$ , т.е. на заданном сегменте времени  $[0, 1 \text{ сек}]$  содержится точка поворота (максимума) фундаментального решения. Зависимость (36) приведена на рис. 3. Крестом отмечена точка максимума с координатами

$$u_{\max} = L(e - 1) = 3,436563657 \text{ м}, \quad P_{\max} = 12397,53716748 \text{ Н}.$$

Далее кривую с уравнением (36), приведённую на рис. 3, называем интегральной кривой фундаментального решения квазистатической задачи о растяжении стержня (т.е. фундаментальное решение отождествляем с решением задачи об одноосном растяжении стержня).

Первая конечно-элементная модель стержня представляет один восьмиузловой изопараметрический конечный элемент. Численное решение этой задачи получено без каких-либо затруднений, и это решение с высокой степенью точности совпадает с фундаментальным решением. В соответствии с классификацией особых точек решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (18) точка максимума является сингулярной точкой интегральной кривой с устранимой особенностью [31]. Эта точка является сингулярной, так как если бы мы выбрали в качестве параметра деформирования (но не монотонно возрастающего) силу  $P$ , то при решении системы уравнений (18) матрица  ${}^t\mathbf{K}$  в точке максимума (поворота) вырождается, при этом в окрестности этой точки итерационная процедура

метода Ньютона – Рафсона имеет плохие характеристики сходимости приближённого решения к точному. Однако при смене параметра деформирования (вместо  $P$  используем  $u^*$ , как это сделано в нашем решении) сингулярность устраняется и каких-либо трудностей не возникает в решении системы уравнений (18) [31].

Из исследований, проведенных в областях механики сплошной среды и наномеханики (см., например, [18, 21, 22, 33, 35]), известно, что во многих случаях точка поворота совпадает с точкой бифуркации (или близка к ней) решений задачи Коши (18). Точка бифуркации является существенно особой точкой интегральной кривой [31]. При любом выборе параметра деформирования эта особенность является неустранимой, и в окрестности этой сингулярной точки итерационная процедура метода Ньютона – Рафсона имеет плохие характеристики сходимости (в точке бифуркации матрица  ${}^t\mathbf{K}$  вырождается). Из решений задач упругопластичности известно, что при достижении максимальной нагрузки при одноосном деформировании образца в нём может возникнуть шейка, в этом случае точка поворота является одновременно и точкой бифуркации. С целью дальнейшего исследования возможности появления шейки при математическом моделировании растяжения стержня мы усложняем конечно-элементную модель, а именно: далее используем модель стержня, состоящую из 1800 изопараметрических восьмиузловых конечных элементов (рис. 2,б). Настоящая модель, в принципе, уже может воспроизводить появление шейки, а если фундаментальное решение является неустойчивым, то можно получить решение, интегральная кривая которого следует по боковой (от фундаментального решения) ветви. Трудность воспроизведения шейки в решении этой задачи состоит в том, что при чисто однородном напряженно-деформированном состоянии появление шейки равновероятно в любом месте стержня. При численном решении задачи о деформировании стержня без специально вводимых возмущений в геометрии и внешних силах возмущения, приводящие к выходу решения на боковую ветвь, вносятся самими вычислениями на компьютере с конечной арифметикой представления чисел (в наших вычислениях с двойной точностью числа представляются 15-ю значащими цифрами после плавающей запятой). Таким образом при решении задачи появление шейки в окрестности сингулярной точки интегральной кривой можно ожидать в любом месте, но если решение проследует через точку бифуркации по фундаментальному пути, то точка поворота может быть пройдена и без появления шейки. Тем не менее, даже без специально вводимых возмущений в геометрии и внешних силах, при использовании итерационной процедуры метода Ньютона – Рафсона в численное решение можно вводить возмущения разных типов при проведении расчётов с различными значениями допустимых погрешностей. В своих расчётах мы используем следующие значения относительных погрешностей:

$$\varepsilon_D = \varepsilon_F = 0,0001; 0,001; 0,01,$$

где  $\varepsilon_D$ ,  $\varepsilon_F$  — относительные погрешности решений задачи по векторам перемещений и внутренних сил соответственно [3, 19].

Приведём детали задания граничных условий для конечно-элементной модели стержня (см. рис. 2,б). Узел, который находится в центре поперечного сечения стержня  $x = 0$ , закреплён по всем степеням свободы, т.е. в этом узле полагается

выполнение равенств  $u = v = w = 0$ ; здесь и далее  $u, v, w$  — компоненты вектора перемещения стержня по осям  $x, y, z$  соответственно. Всем остальным узлам, принадлежащим этому сечению стержня, запрещается перемещаться в направлении оси  $x$  (т.е. для этих узлов предполагается выполнение равенства  $u = 0$ ). Кроме того, узловым точкам, находящимся на линии  $BB'$ , запрещены перемещения по оси  $z$  (т.е. для этих точек полагается выполнение равенства  $w = 0$ ). Для всех узловых точек, находящихся в момент времени  $t = 0$  на плоскости  $x = L$ , задан компонент вектора перемещений  $u(t) = u^*(t)$ . Кроме того, для узла, который совпадает с центральной точкой поперечного сечения  $x = L$ , запрещены перемещения по осям  $y$  и  $z$  (т.е. полагается  $v = w = 0$ ). Дополнительно к этому мы запрещаем перемещаться по оси  $z$  узловым точкам, находящимся на линии  $AA'$  (т.е. для этих точек полагается выполнение равенства  $w = 0$ ). Для тех узловых точек, которые находятся в плоскостях  $x = 0$  и  $x = L$  и для которых не наложены какие-либо ограничения на компоненты вектора перемещений, полагаются равными нулю компоненты вектора напряжений Коши. Все боковые грани стержня предполагаются свободными поверхностями, т.е. на этих гранях все компоненты вектора напряжений Коши полагаются равными нулю. Принятые выше граничные условия позволяют воспроизводить как одноосное деформирование стержня, так и деформированные конфигурации, отличные от одноосного деформирования, которые могут иметь место при неустойчивых процессах его деформирования.

Для изучения поведения решения в окрестности максимальной нагрузки мы вводим целенаправленные возмущения геометрии стержня, а именно: все узловые точки центрального сечения стержня, находящиеся на гранях стержня, сдвигаются на величину  $h$  к центру стержня (рис. 2,б).

Для представления численных решений задачи о растяжении стержня будем строить интегральные кривые в виде зависимости « $u^* \sim P$ », где  $u^*$  — заданное перемещение торца  $x = l$ , а  $P$  — общая сила, действующая на этом торце. Так как перемещение торца  $u^*$  задаётся как функция времени  $t$ , то пакет MSC.Marc для каждого значения времени  $t$ , для которого получено решение, однозначно определяет значение величины  $u^*$ . Однако прямо получить значение  $P$  из результатов расчётов, полученных в пакете MSC.Marc, нельзя. При решении статической задачи мы определяем значение растягивающей силы  $P$  суммированием значений  $x$ -компонента сил реакции, полученных во всех узловых точках торца  $x = l$ . К сожалению, при обработке решений динамической задачи такой подход использовать не удаётся, так как, по-видимому, пакет MSC.Marc 2010 при решении рассматриваемой задачи неправильно определяет значения сил реакции в узловых точках торца  $x = l$ . Поэтому для определения силы  $P$  в решениях динамических задач мы используем для определения силы  $P$  формулу (31). Так как справедливо равенство  $s_{11} = \tau_{11}/J$ , то, используя (2), получаем

$$P = \tau_{11}a/J = S_{11}^{(2)}\lambda_1^2a/J. \quad (38)$$

Используя (28),(29), получаем из (38)

$$P = S_{11}^{(2)}\lambda_1A. \quad (39)$$

Из представления тензора деформаций Грина – Лагранжа (см. [25])

$$\mathbf{E}^{(2)} \equiv \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \mathbf{C}_i \quad (40)$$

имеем

$$\lambda_1 = \sqrt{2E_{11}^{(2)} + 1}. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (39), приходим к окончательному выражению растягивающей силы

$$P = S_{11}^{(2)} \sqrt{2E_{11}^{(2)} + 1} A.$$

Отметим, что в пакете MSC.Marc при включении опции «Large strain – Total Lagrangian» в файле результатов расчёта вида \*.t16 термин «Global stress» обозначает массив компонент второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа  $\mathbf{S}^{(2)}$ , а термин «Total strain» обозначает массив компонент тензора деформаций Грина – Лагранжа  $\mathbf{E}^{(2)}$ . Поэтому для вычисления растягивающей силы в решениях динамических задач мы заказываем в запись файла \*.t16 массивы «Global stress» и «Total strain», а при вычислении силы  $P$  используем значения  $S_{11}^{(2)}$  и  $E_{11}^{(2)}$  в узловой точке, совпадающей с центром торца  $x = l$ . Отметим, что в решениях задач квазистатического деформирования стержня мы заказываем в запись файла \*.t16 вместо массивов «Global stress» и «Total strain» массив «Reaction force».

На рис. 3 приведены интегральные кривые решений квазистатических и динамических задач о растяжении стержня. При решении задач квазистатического деформирования стержня (рис. 3,а) называем решениями задач S1, S2, S3 соответственно решения задач при значении  $h = 0$  и следующих значениях параметров  $\varepsilon_D = \varepsilon_F$ : 0,0001; 0,001; 0,01. Также называем решениями задач S4, S5, S6 соответственно решения задач при значениях параметров  $\varepsilon_D = \varepsilon_F = 0,0001$  и следующих значениях параметра  $h$ : 0,0001; 0,0005; 0,0025 м. Кривые с номерами 1-6 на рис. 3,а являются интегральными кривыми решений задач S1-S6 соответственно. Так как наряду с фундаментальным решением в окрестности точки максимума обнаруживаются решения, соответствующие возникновению шейки в стержне, то делаем вывод, что точка максимума является одновременно и точкой бифуркации, т.е. эта точка интегральной кривой фундаментального решения является существенно особой точкой. Видим, что существенная разница в решениях при различных типах возмущений проявляется в окрестности этой сингулярной точки. Только одна из интегральных кривых решений, приведённых на рис. 3,а (кривая 2), соответствующая решению задачи S2, проходит точку максимума без возникновения шейки. Шейка в этом решении возникает в закритическом режиме деформирования, после прохождения точки максимума.

В решениях задач динамического деформирования стержня мы использовали метод Ньюмарка со стандартными значениями параметров  $\delta = 0,5$ ,  $\alpha = 0,25$  (см., например [3, 19]). Отметим, что при таких значениях параметров метод Ньюмарка не приводит к численной диссипации энергии и имеет второй порядок точности во времени. На рис. 3,б приведены интегральные кривые решений динамических задач деформирования стержня. В решениях этих задач мы используем только

одни значения параметров  $\varepsilon_D = \varepsilon_F = 0,0001$ . Мы называем решением задачи D1 решение динамической задачи со значением параметра  $h = 0$ , а решениями задач D2, D3, D4 — решения динамических задач при следующих значениях параметра  $h$ : 0,0001; 0,0005; 0,0025 м. Для оценки влияния скорости приложения заданного перемещения торца на сценарий деформирования стержня мы решали также задачу динамического деформирования со значением параметра  $h = 0,0025$  м и следующим законом движения торца  $x = l$ :

$$u^*(t) = 0,4t, \quad t \in [0, 10 \text{ сек}]. \quad (42)$$

Эту задачу называем задачей D5. Кривые с номерами 1-5 являются интегральными кривыми задач D1-D5 соответственно. Из графиков, представленных на рис. 3,б, видно, что кривые решения динамических задач в окрестности точки максимума фундаментального решения квазистатической задачи переходят в режим «болтанки» с увеличивающейся амплитудой силы реакции  $P$ . Причём срыв решения в режим «болтанки» происходит тем раньше, чем больше значение параметра  $h$ .

На рис. 4-7 приведены деформированные конфигурации стержня для некоторых точек интегральных кривых, представленных на рис. 3.

В левой части этих рисунков приведены деформированные конфигурации, полученные в начальные моменты перехода от деформирования в режиме, близком к одноосному, к режиму шейкообразования. В правой части представлены режимы деформирования развитого шейкообразования, вплоть до дальнейшего деформирования в условиях «разрыва» стержня. Отметим, что в настоящем исследовании условия разрушения с разделением материала стержня не моделировались, поэтому разделение частей стержня сопровождается сильным удлинением элементов, находящихся в зоне возникновения шейки. На рис. 4-7 наряду с залитыми формами деформированных конфигураций контурными линиями обозначена недеформированная конфигурация стержня.

Деформированная конфигурация, приведённая в левой части рис. 4,б, при значении заданного перемещения  $u^* = 3,7899$  м ( $u^* > u_{\max}^*$ ) соответствует фундаментальному решению задачи растяжения стержня (в условиях одноосного деформирования), а при дальнейшем небольшом увеличении перемещения торца  $x = l$  до значения  $u^* = 3,7916$  м в стержне уже присутствует шейка (см. правую часть рис. 4,б). Из вида деформированных конфигураций, представленных на рис. 4, которые получены в решениях задач S1-S3 (задачах о деформировании стержня с идеальной геометрией при значении параметра  $h = 0$ ), следует, что шейка может инициироваться как в районе торцов, так и в центральной части стержня. Но при решениях задач S4-S6 (деформированные конфигурации представлены на рис. 5) о деформировании стержня с центральным вырезом (параметр  $h > 0$ ) шейка во всех случаях инициируется вырезом и возникает тем раньше, чем больше значение параметра  $h$  (т.е. чем больше глубина выреза).

Здесь интересно отметить появление крутильных форм закритического деформирования стержня, представленных на рис. 5,а,б. При этом деформированные конфигурации стержней, полученные при решениях задач S4 и S5 и приведённые на рис. 5,а и рис. 5,б, соответствуют закручиванию стержней в противоположных направлениях. К сожалению, развитых послекритических деформаций для задачи

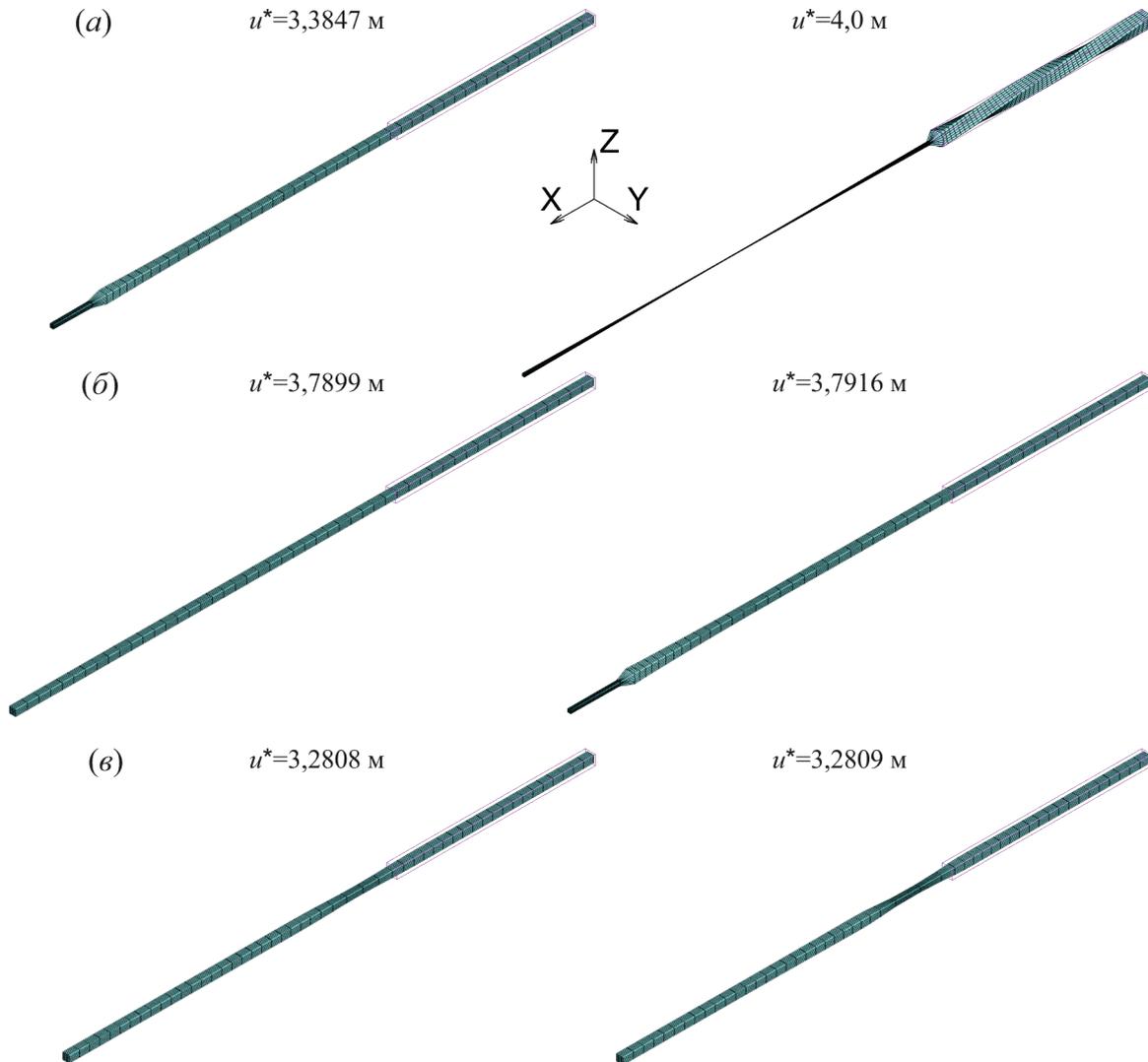


Рис. 4. Деформированные конфигурации, полученные в решениях следующих статических задач о деформировании стержня заданным перемещением  $u^*$ : (а) S1, (б) S2, (в) S3.

S6 получить не удалось, но для деформированной конфигурации, представленной на рис. 5, в, можно отметить закручивание центральной части стержня в районе шейки.

В решениях динамических задач о деформировании стержня вид послекритических деформаций не зависит так сильно от значений параметров  $\varepsilon_D$  и  $\varepsilon_F$ , как в решениях задач квазистатики, поэтому представлены решения задач D1-D5, полученные только с одними значениями  $\varepsilon_D = \varepsilon_F = 0,0001$ . Так же, как и в решениях квазистатических задач S1, S2, при решении задачи D1 о деформировании стержня с идеальной геометрией ( $h = 0$ ) шейка возникает около торца стержня (рис. 6, а). При наличии выреза шейка всегда инициируется в центральном сечении стержня, но для стержня с минимальной рассматриваемой величиной выреза  $h = 0,0001 \text{ м}$  (задача D2) наряду с развитием шейки в центральном сечении стержня наблю-

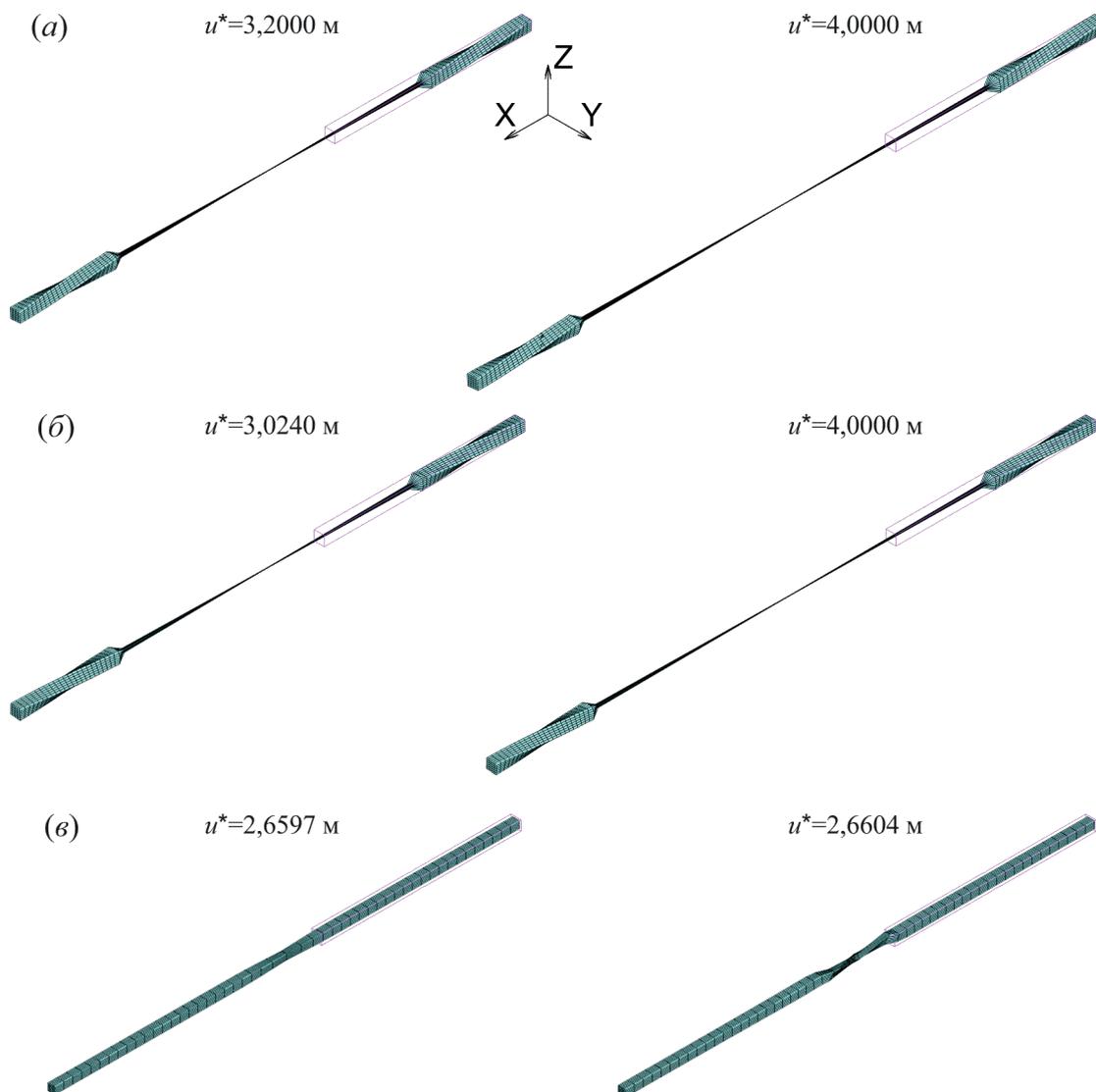


Рис. 5. Деформированные конфигурации, полученные в решениях следующих статических задач о деформировании стержня заданным перемещением  $u^*$ : (а) S4, (б) S5, (в) S6.

дается развитие ещё одной шейки в районе торца  $x = 0$  (рис. 6,б). В остальном закритические деформации в решениях задач с различными значениями параметра  $h$  (задачи D2-D4) развиваются примерно по одному сценарию (см. рис. 6,б,в, 7,а), причём шейка начинает развиваться тем раньше, чем больше значение параметра  $h$ . Такую же закономерность мы наблюдали в решениях задач квазистатического деформирования стержня S4-S6. Однако в решениях задач динамического деформирования стержня шейка возникает при больших значениях перемещения торца стержня  $u^*$ . В закритических динамических движениях стержня также наблюдается закручивание частей стержня, но не так отчётливо выраженное, как в решениях задач квазистатического деформирования.

При уменьшении скорости приложения заданного перемещения торца стержня

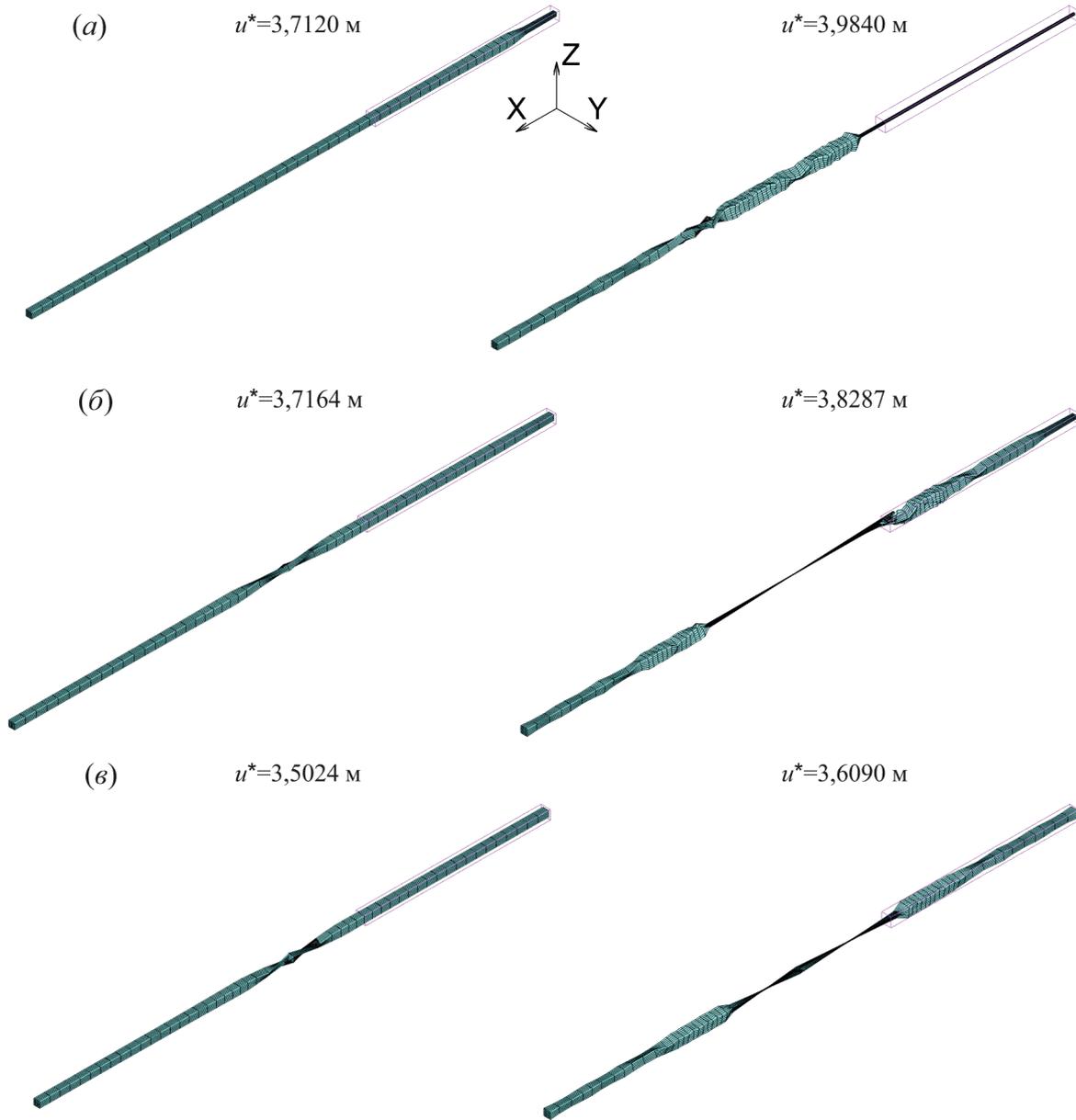


Рис. 6. Деформированные конфигурации, полученные в решениях следующих динамических задач о деформировании стержня заданным перемещением  $u^*$ : (а) D1, (б) D2, (в) D3.

в 10 раз картина его деформирования приближается к картине деформирования этого же стержня в режиме квазистатики. При этом кривая 5 для решения задачи D5 на рис. 3,б близка по форме к кривой 6, полученной в решении задачи квазистатического деформирования стержня S6 с той же самой глубиной выреза ( $h = 0,0025$  м). То же самое справедливо и для деформированных конфигураций (т.е. они близки для близких значений  $u^*$ ), представленных на рис. 5,в и 7,б. Таким образом, быстрое приложение заданного перемещения  $u^*$  торца  $x = l$  позволяет увеличивать его критическое значение (т.е. значение перемещения  $u^*$ , при котором инициируется шейка в стержне) по сравнению с критическим значением,

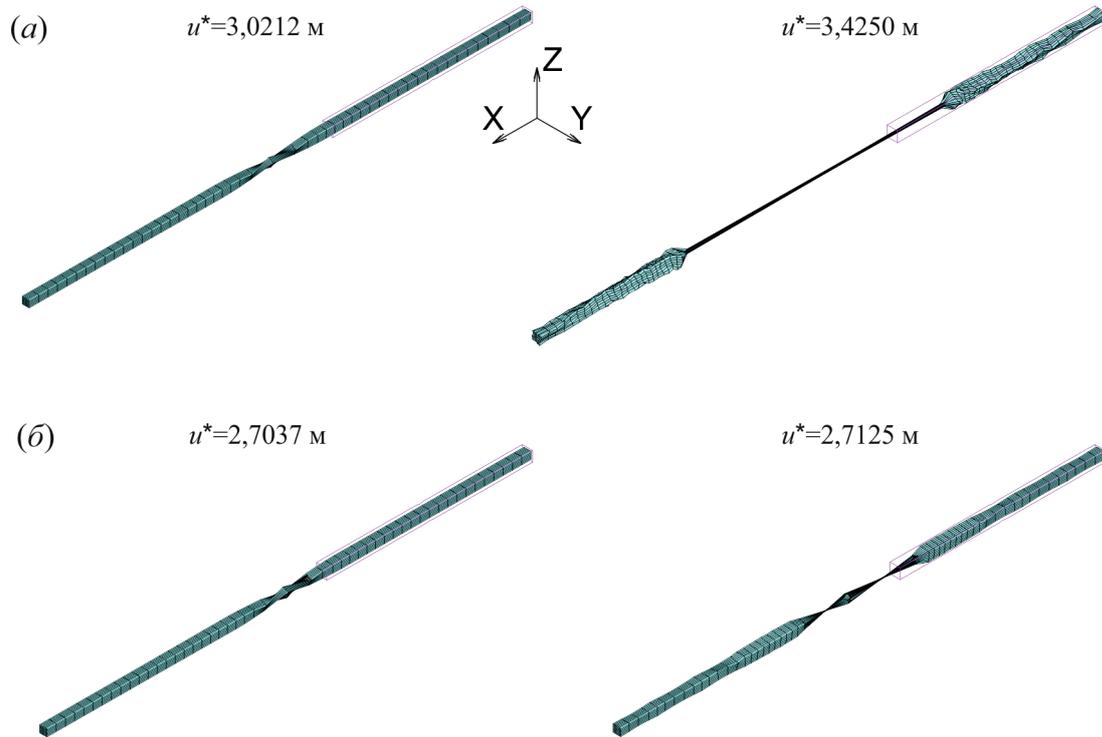


Рис. 7. Деформированные конфигурации, полученные в решениях следующих динамических задач о деформировании стержня заданным перемещением  $u^*$ : (а) D4, (б) D5.

полученным при более медленном приложении заданного перемещения  $u^*$  и, как в предельном случае, в режиме квазистатического деформирования.

## 6. Заключение

Уточнены выражения второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа и тензора упругости четвертого порядка, дающего линейную связь материальных производных второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа, и тензора деформаций Грина – Лагранжа для изотропного гиперупругого материала Генки. Эти выражения основаны на использовании собственных проекций правого тензора деформаций Коши – Грина. Полученные выражения второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа и тензора упругости четвертого порядка удобны для использования в конечно-элементных пакетах прикладных программ, так как не требуют для своей записи выражений тензоров в главных осях лагранжевых тензоров деформаций и справедливы для любой кратности собственных значений этих тензоров деформаций.

Представлены детали введения развитой лагранжевой формулировки модели изотропного гиперупругого материала Генки в коммерческий пакет MSC.Marc 2010 с использованием программы hypera2.f, которая предназначена для введения новых моделей гиперупругих материалов в этот пакет прикладных программ. Введённая модель материала проверена на решениях тестовых задач квазистатического де-

формирования о простом сдвиге и об одноосном деформировании стержня из изотропного гиперупругого материала Генки. Также получены решения новых задач о шейкообразовании стержня из этого материала в условиях как квазистатического, так и динамического деформирования. Предполагается, что стержень растягивается заданным перемещением его торца. Показано, что при одноосном докритическом деформировании стержня шейка может реализовываться в любом поперечном сечении стержня (в частности, при использовании различных точностей определения равновесных конфигураций получены сценарии шейкообразования стержня как в районе торца, так и в центральном поперечном сечении стержня). Однако при введении возмущения геометрии стержня в виде выреза небольшой глубины в центральном поперечном сечении стержня шейка инициируется и развивается главным образом в районе этой вырезки. При компьютерном моделировании закритического деформирования обнаружены крутильные формы равновесных конфигураций. Численными решениями показано, что в решениях динамических задач о растяжении стержня также развивается шейка при достижении заданными перемещениями некоторых критических значений, которые больше соответствующих значений, полученных в условиях квазистатического деформирования.

## Список литературы

- [1] L. Anand, “On Hencky’s approximate strain-energy function for moderate deformations”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **46**:1 (1979), 78–82.
- [2] L. Anand, “Moderate deformations in extension-torsion of incompressible isotropic elastic materials”, *J. Mech. Phys. Solids.*, **34** (1986), 293–304.
- [3] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1996.
- [4] J. Bonet, R. D. Wood, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [5] R. Brown, *Physical Testing of Rubber (4th ed.)*, Springer, N.Y., 2006.
- [6] A. Curnier, L. Rakotomanana, “Generalized strain and stress measures: critical survey and new results”, *Eng. Trans.*, **39**:3–4 (1991), 461–538.
- [7] A. Curnier, *Computational Methods in Solid Mechanics*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994.
- [8] H. Darijani, R. Naghdabadi, “Hyperelastic materials behavior modeling using consistent strain energy density functions”, *Acta Mech.*, **213** (2010), 235–254.
- [9] H. Darijani, R. Naghdabadi, “Constitutive modeling of solids at finite deformation using a second-order stress-strain relation”, *Int. J. Engng Sci.*, **48** (2010), 223–236.
- [10] R. Hill, “On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain”, *J. Mech. Phys. Solids.*, **5**:4 (1957), 229–241.
- [11] R. Hill, “A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids”, *J. Mech. Phys. Solids.*, **6**:3 (1958), 236–249.
- [12] R. Hill, “Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time”, *J. Mech. Phys. Solids.*, **7**:3 (1959), 209–225.
- [13] R. Hill, “On constitutive inequalities for simple materials — I”, *J. Mech. Phys. Solids.*, **16**:4 (1968), 229–242.
- [14] R. Hill, “Aspects of invariance in solid mechanics”, *Advances in Applied Mechanics*, **18**, Academic Press, New York, 1978, 1–75.

- 
- [15] G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*, Wiley, Chichester et al., 2000.
- [16] T. J. R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [17] M. Kleiber, *Incremental Finite Element Modelling in Non-linear Solid Mechanics*, Ellis Horwood, Chichester, 1989.
- [18] С. Н. Коробейников, “Применение метода конечных элементов к решению нелинейных задач по деформированию и потере устойчивости атомных решеток”, Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Институт гидродинамики; № 1-97, Новосибирск, 1997.
- [19] С. Н. Коробейников, *Нелинейное деформирование твердых тел*, Из-во СО РАН, Новосибирск, 2000.
- [20] С. Н. Коробейников, “Строго сопряженные тензоры напряжений и деформаций”, *ПМТФ*, **41**:3 (2000), 149–154.
- [21] С. Н. Коробейников, “Численное решение уравнений с особенностями деформирования упругопластических оболочек вращения”, *Вычислительные технологии*, **6**:5 (2001), 39–59.
- [22] S. N. Korobeinikov, “The numerical solution of nonlinear problems on deformation and buckling of atomic lattices”, *Int. J. Fracture*, **128** (2004), 315–323.
- [23] S. N. Korobeinikov, “Objective tensor rates and applications in formulation of hyperelastic relations”, *J. Elast.*, **93** (2008), 105–140.
- [24] S. N. Korobeinikov, “Families of continuous spin tensors and applications in continuum mechanics”, *Acta Mech.*, **216**:1-4 (2011), 301–332.
- [25] С. Н. Коробейников, А. А. Олейников, “Лагранжева формулировка определяющих соотношений гиперупругого материала Генки”, *Дальневосточный математический журнал*, **11**:2 (2011), 155–180.
- [26] *MARC Users Guide. V. A: Theory and Users Information*, MSC. Software Corporation, Santa Ana (CA), 2010.
- [27] *MARC Users Guide. V. B: Element Library*, MSC. Software Corporation, Santa Ana (CA), 2010.
- [28] *MARC Users Guide. V. D: User Subroutines and Special Routines*, MSC. Software Corporation, Santa Ana (CA), 2010.
- [29] R. W. Ogden, *Non-linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- [30] J. Plešek, A. Kruisová, “Formulation, validation and numerical procedures for Hencky’s elasticity model”, *Computers and Structures*, **84** (2006), 1141–1150.
- [31] В. И. Шалашин, Е. Б. Кузнецов, *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация*, URSS, М., 1999.
- [32] Г. Стренг, Дж. Фикс, *Теория метода конечных элементов*, Мир, М., 1977.
- [33] J. M. T. Thompson, “Bifurcational instability of an atomic lattice”, *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering*, Ed. by J. M. T. Thompson, Wiley: Chichester et al., 1982, 101–124.
- [34] C. Truesdell, W. Noll, *The Non-linear Field Theories of Mechanics. V. III/3: Handbuch der Physik*, ed. S. Flügge, Springer, New York, 1965.
- [35] V. Tvergaard, A. Needleman, “On the development of localized buckling patterns”, *Collapse: the Buckling of Structures in Theory and Practice: Proc. Int. Symp.*, Eds: J. M. T. Thompson, G. W. Hunt, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983, 11–24.
- [36] К. Васидзу, *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*, Мир, М., 1987.
- [37] H. Xiao, O. T. Bruhns, A. Meyers, “Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate”, *Acta Mech.*, **124** (1997), 89–105.
- [38] H. Xiao, O. T. Bruhns, A. Meyers, “Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate”, *J. Elast.*, **47** (1997), 51–68.

- [39] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method (4th ed.)*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 22 ноября 2012 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-08-00707), проекта Минобрнауки по госзаданию (НИР 1.2582.2011) и Программы президиума РАН (проект 25.3).

---

*Korobeynikov S. N., Oleinikov A. A., Babichev A. V., Larichkin A. Yu., Alyokhin V. V.* Computer implementation of Lagrangian formulation of Hencky's isotropic hyperelastic material constitutive relations. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2013. V. 13. № 2. P. 222–249.

#### ABSTRACT

Lagrangian formulation of Hencky's isotropic hyperelastic material constitutive relations is implemented into MSC.Marc code. Reliability of implementation proves to be true due to the comparison of numerical solutions obtained with the use of MSC.Marc code with exact solutions of three-dimensional problems on simple shear and on uniaxial extension of a rod with Hencky's isotropic hyperelastic material model. New solutions of a problem on origin of a neck and postcritical deformation of the rod are obtained at its extension by the prescribed displacement of the edge face.

Key words: *isotropic hyperelasticity, Hencky's material, finite element method, MSC.Marc code.*