*Дальневосточный математический журнал.* 2014. Том 14. № 1. С. 6–17

УДК 519.624.8
MSC2010 74P01

© Э. М. Вихтенко, Г. Ву, Р. В. Намм[1]

# Методы решения полукоэрцитивных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа

Для эллиптического полукоэрцитивного вариационного неравенства Синьорини рассматривается схема двойственности, основанная на модифицированном функционале Лагранжа. Строится и обосновывается устойчивый метод решения исследуемого неравенства.

Ключевые слова: *вариационное неравенство, задача Синьорини, функционал чувствительности, функционал Лагранжа, двойственный функционал, седловая точка, метод Удзавы, проксимальная регуляризация.*

## Введение

Построение и исследование методов решения эллиптических вариационных неравенств в механике основывается обычно на предположении сильной выпуклости минимизируемых функционалов. Для решения таких неравенств получили широкое развитие методы двойственности, основанные на классических функционалах Лагранжа с линейной зависимостью от двойственных переменных. Однако для ряда практически важных вариационных неравенств сильная выпуклость минимизируемых функционалов имеет место только на подпространствах конечной коразмерности исходного пространства [1]. Применение в такого рода полукоэрцитивных неравенствах классических функционалов Лагранжа не гарантирует сходимости известных методов поиска седловых точек [2, 3]. В данной работе применительно к скалярной полукоэрцитивной задаче Синьорини исследуется итеративный метод Удзавы, основанный на модификации классического функционала Лагранжа.

[1]Тихоокеанский государственный университет, 680035, г.Хабаровск, ул.Тихоокеанская, 136; 641-773, Чангвонский национальный университет, Чангвон, Южная Корея, Вычислительный центр ДВО РАН, 680000 Хабаровск, ул. Ким-Ю-Чена, д. 65. Электронная почта: vikht@mail.khstu.ru; gswoo@changwon.ac.kr; namm@mail.khstu.ru

Показывается, что данный метод сходится к решению задачи Синьорини по функционалу, и, при необходимой регулярности решений вспомогательных задач, сходится по аргументу к седловой точке классического функционала Лагранжа. В основе доказательства сходимости предложенных методов лежит утверждение о слабой полунепрерывности снизу функционала чувствительности. Доказательство данного характеристического свойства функционала чувствительности приводится впервые.

# 1. Функционал чувствительности и модифицированный метод двойственности

Рассмотрим задачу условной минимизации [4, 5]

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int\limits_\Omega f\, v \, d\Omega \to \min, \\ v \in K = \{w \in H^1(\Omega) : \ \gamma\, w \geq 0 \text{ п.в. на } \Gamma\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega \subset R^n$ ($n$=2, 3) — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma$, $f \in L_2(\Omega)$ — заданная функция и $\gamma\, v \in H^{1/2}(\Gamma)$ — след функции $v \in H^1(\Omega)$ на $\Gamma$.

Так как функционал $J(v)$ не является сильно выпуклым (коэрцитивным) на $H^1(\Omega)$, задача (1) может не иметь решения. Однако если

$$\int\limits_\Omega f \, d\Omega < 0, \tag{2}$$

то $J(v) \to +\infty$ при $\|v\|_{H^1(\Omega)} \to \infty$ ($v \in K$), и поэтому задача разрешима [4, 5]. Более того, условие (2) обеспечивает единственность решения. В дальнейшем считаем данное условие выполненным.

Для упрощения дальнейшего изложения при обозначении следов функций на границе области будем опускать символ оператора следа $\gamma$.

Рассмотрим классический функционал Лагранжа

$$L(v, l) = J(v) - \int\limits_\Gamma l\, v \, d\Gamma = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int\limits_\Omega f\, v \, d\Omega - \int\limits_\Gamma l\, v \, d\Gamma$$
$$\forall\ (v, l) \in H^1(\Omega) \times L_2(\Gamma).$$

Обозначим через $(L_2(\Gamma))^+$ конус неотрицательных функций из пространства $L_2(\Gamma)$.

**Определение 1.** *Точка $(v^*, l^*) \in H^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^+$ называется седловой точкой функционала $L(v, l)$, если выполняется двустороннее неравенство*

$$L(v^*, l) \leq L(v^*, l^*) \leq L(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in H^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^+.$$

В работе [3] показано, что если решение $u^*$ задачи Синьорини (1) принадлежит пространству $H^2(\Omega)$, то классический функционал Лагранжа $L(v,l)$ имеет единственную седловую точку $\left(u^*, \frac{\partial u^*}{\partial n}\right)$, т.е. $v^* = u^*$ п.в. в $\Omega$ и $l^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ п.в. на $\Gamma$, где $n$ — единичный вектор внешней нормали к $\Gamma$.

Для любого $\mu \in L_2(\Gamma)$ введем множество

$$K_\mu = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \ -v \le \mu \text{ на } \Gamma \right\}.$$

Нетрудно заметить, что если функция $\mu \in L_2(\Gamma)$ ограничена снизу на $\Gamma$, то соответствующее множество $K_\mu$ не является пустым. Множество $K_\mu$ может быть пустым, если $\mu \in L_2(\Gamma) \setminus H^{1/2}(\Gamma)$ и не ограничена снизу на $\Gamma$ [6, 7].

Определим для функции $\mu \in L_2(\Gamma)$ функционал чувствительности

$$\chi(\mu) = \inf_{v \in K_\mu} J(v).$$

Если $K_\mu = \varnothing$, то полагаем $\chi(\mu) = +\infty$. Тогда $\chi(\mu)$ является собственным выпуклым функционалом на $L_2(\Gamma)$ [8, 9], но его эффективная область $\mathrm{dom}\chi = \{\mu \in L_2(\Gamma)\colon \chi(\mu) < +\infty\}$ не совпадает с $L_2(\Gamma)$. Заметим, что $\mathrm{dom}\chi$ является выпуклым, но не замкнутым множеством. При этом $\overline{\mathrm{dom}\chi} = L_2(\Gamma)$.

Несложно увидеть, что $\chi(0) = \inf\limits_{v \in K} J(v) = J(u^*)$.Обозначим $u_\mu = \arg\min\limits_{v \in K_\mu} J(v)$. Тогда $\chi(\mu) = J(u_\mu)$. Условие разрешимости (2) обеспечивает существование точек $u_\mu$ [5] в случае, если $K_\mu \neq \emptyset$.

**Теорема 1.** *Функционал чувствительности слабо полунепрерывен снизу на $L_2(\Gamma)$.*

*Доказательство.* Так как $\chi(\mu)$ — выпуклый функционал, то достаточно показать, что он полунепрерывен снизу (в смысле сходимости по норме) в $L_2(\Gamma)$. Возьмем произвольную сходящуюся последовательность $\{\mu_i\} \subset L_2(\Gamma)$, и пусть $\bar{\mu} = \lim\limits_{i\to\infty} \mu_i$. Функционал чувствительности $\chi(\mu)$ будет полунепрерывным снизу, если $\lim\limits_{i\to\infty} \chi(\mu_i) = +\infty$ при $\bar{\mu} \notin \mathrm{dom}\chi$ и $\varliminf\limits_{i\to\infty} \chi(\mu_i) \ge \chi(\bar{\mu})$ при $\bar{\mu} \in \mathrm{dom}\chi$.

1. Пусть $\bar{\mu} \notin \mathrm{dom}\chi$. Можно считать, что $\mu_i \in \mathrm{dom}\chi$. Покажем, что

$$\lim_{i\to\infty} \|u_{\mu_i}\|_{H^1(\Omega)} = \infty.$$

Допустим противное, т.е. пусть у последовательности $\{u_{\mu_i}\}$ существует ограниченная подпоследовательность. Не ограничивая общности доказательства, полагаем, что сама последовательность $\{u_{\mu_i}\}$ является ограниченной в $H^1(\Omega)$. Так как вложение $H^1(\Omega) \subset H^{1/2}(\Gamma)$ непрерывно, то $\|u_{\mu_i}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le C$, $C > 0$ — const, и, кроме того, $\{u_{\mu_i}\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\Gamma)$. Пусть $\hat{u} \in H^{1/2}(\Gamma)$ есть ее слабая предельная точка в $H^{1/2}(\Gamma)$. Снова, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\hat{u}$ есть слабый предел $\{u_{\mu_i}\}$ в $H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда $\{u_{\mu_i}\}$ сильно (по норме) сходится к $\hat{u}$ в $L_2(\Gamma)$. Так как $-u_{\mu_i} \le \mu_i$ на $\Gamma$, то $-\hat{u} \le \bar{\mu}$ на $\Gamma$, что означает $K_{\bar{\mu}} \neq \varnothing$ и, следовательно, $\bar{\mu} \in \mathrm{dom}\chi$. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{i\to\infty} \|u_{\mu_i}\|_{H^1(\Omega)} = \infty$. Далее обозначим

$$\bar{u}_{\mu_i} = \frac{1}{mes\Gamma} \int\limits_\Gamma u_{\mu_i}\, d\Gamma, \quad \tilde{u}_{\mu_i} = u_{\mu_i} - \bar{u}_{\mu_i}.$$

Так как $-u_{\mu_i} \le \mu_i$ на $\Gamma$, то

$$-\bar{u}_{\mu_i} \le \frac{1}{mes\Gamma} \int\limits_{\Gamma} \mu_i \, d\Gamma.$$

Для функций $\mu_i \in L_2(\Gamma)$ ($i$=1,2,...) справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{\Gamma} \mu_i \, d\Gamma \right| \le (mes\Gamma)^{1/2} \|\mu_i\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Следовательно,

$$-\bar{u}_{\mu_i} \le \frac{1}{(mes\Gamma)^{1/2}} \|\mu_i\|_{L_2(\Gamma)}, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Так как $\lim\limits_{i\to\infty} \|\mu_i - \bar{\mu}\|_{L_2(\Gamma)} = 0$, то $\|\mu_i\|_{L_2(\Gamma)} \le C_1$, $C_1$ — const, $i$=1,2,.... Отсюда

$$-\bar{u}_{\mu_i} \le C_2, \quad C_2 > 0 \ - \ const, \quad i = 1, 2 \dots . \tag{3}$$

Воспользуемся представлением $u_{\mu_i} = \bar{u}_{\mu_i} + \tilde{u}_{\mu_i}$. Тогда можем записать

$$\begin{aligned} \chi(\mu_i) = J(u_{\mu_i}) = J(\bar{u}_{\mu_i} + \tilde{u}_{\mu_i}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla \tilde{u}_{\mu_i}|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f(\bar{u}_{\mu_i} + \tilde{u}_{\mu_i}) \, d\Omega = \\ = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla \tilde{u}_{\mu_i}|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f \, \tilde{u}_{\mu_i} \, d\Omega - \bar{u}_{\mu_i} \int\limits_{\Omega} f \, d\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Для функции $\tilde{u}_{\mu_i}$ выполняется условие $\int\limits_{\Gamma} \tilde{u}_{\mu_i} \, d\Gamma = 0$. Тогда (см. [5, с. 73]) существует постоянная $\kappa > 0$, не зависящая от $\tilde{u}_{\mu_i}$, такая, что

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla \tilde{u}_{\mu_i}|^2 \, d\Omega \ge \kappa \|\tilde{u}_{\mu_i}\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Отсюда и из (4) вытекает оценка

$$\chi(\mu_i) \ge \frac{\kappa}{2} \|\tilde{u}_{\mu_i}\|^2_{H^1(\Omega)} - \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\tilde{u}_{\mu_i}\|_{H^1(\Omega)} - \bar{u}_{\mu_i} \int\limits_{\Omega} f \, d\Omega. \tag{5}$$

Так как $\|u_{\mu_i}\|_{H^1(\Omega)} \to \infty$ при $i \to \infty$, то хотя бы одна из величин $\|\tilde{u}_{\mu_i}\|_{H^1(\Omega)}$, $\|\bar{u}_{\mu_i}\|_{H^1(\Omega)}$ стремится к бесконечности. С учетом неравенств (2), (3), (5) это означает, что $J(u_{\mu_i}) \to +\infty$ при $i \to \infty$ или $\lim\limits_{i\to\infty} \chi(u_{\mu_i}) = +\infty$.

2. Пусть теперь $\bar{\mu} \in \mathrm{dom}\chi$. Снова можно считать, что $\mu_i \in \mathrm{dom}\chi$. Из последовательности $\{\mu_i\}$ выделим подпоследовательность $\{\mu_{i^k}\}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \chi(\mu_{i^k}) = \varliminf_{i\to\infty} \chi(\mu_i).$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{u_{\mu_{i^k}}\}$, где $u_{\mu_{i^k}} = \arg\min\limits_{v \in K_{\mu_{i^k}}} J(v)$. Из неравенств (3), (5) вытекает, что $\{u_{\mu_{i^k}}\}$ является ограниченной последовательностью в $H^1(\Omega)$ (иначе $\lim\limits_{k\to\infty} \chi(\mu_{i^k}) = +\infty$ и требуемое неравенство доказано). Так как $H^1(\Omega) \subset H^{1/2}(\Gamma)$, то $\{u_{\mu_{i^k}}\}$ ограничена и в $H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда последовательность $\{u_{\mu_{i^k}}\}$ слабо компактна в $H^{1/2}(\Gamma)$. Пусть $\hat{u}$ — ее слабая предельная точка. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\{u_{\mu_{i^k}}\}$ является слабо сходящейся последовательностью, т.е. $\hat{u}$ есть слабый предел $\{u_{\mu_{i^k}}\}$. Так как $H^{1/2}(\Gamma)$ компактно вкладывается в $L_2(\Gamma)$ и $L_2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$ ($H^{-1/2}(\Gamma)$ — сопряженное пространство к $H^{1/2}(\Gamma)$), то $\{u_{\mu_{i^k}}\}$ сходится в $L_2(\Gamma)$ к $\hat{u}$.

Последовательности $\{\mu_{i^k}\}$ и $\{u_{\mu_{i^k}}\}$ имеют следующие свойства: $\mu_{i^k} \to \bar{\mu}$ в $L_2(\Gamma)$, $u_{\mu_{i^k}} \to \hat{u}$ в $L_2(\Gamma)$ и $-u_{\mu_{i^k}} \leq \mu_{i^k}$ на $\Gamma$. Тогда $-\hat{u} \leq \bar{\mu}$ на $\Gamma$. Обозначим

$$\hat{\hat{u}} = \arg\min_{-v=\hat{u} \text{ на } \Gamma} J(v).$$

Рассмотрим разность $J(u_{\mu_{i^k}}) - J(\hat{\hat{u}})$. Получаем

$$J(u_{\mu_{i^k}}) - J(\hat{\hat{u}}) = \int\limits_\Omega \nabla\hat{\hat{u}} \cdot \nabla(u_{\mu_{i^k}} - \hat{\hat{u}})\, d\Omega - \int\limits_\Omega f(u_{\mu_{i^k}} - \hat{\hat{u}})\, d\Omega + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla(u_{\mu_{i^k}} - \hat{\hat{u}})|^2\, d\Omega =$$

$$=< \Theta, u_{\mu_{i^k}} - \hat{\hat{u}} > + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla(u_{\mu_{i^k}} - \hat{\hat{u}})|^2\, d\Omega,$$

где

$$< \Theta, v >= \int\limits_\Omega \nabla\hat{\hat{u}} \cdot \nabla v\, d\Omega - \int\limits_\Omega f\, v\, d\Omega$$

и, при этом, $\Theta \in H^{-1/2}(\Gamma)$ [4, 6]. Так как $\{u_{\mu_{i^k}}\}$ слабо сходится к $\hat{u}$ в $H^{1/2}(\Gamma)$, то

$$\lim_{k\to\infty} < \Theta, u_{\mu_{i^k}} - \hat{\hat{u}} >= 0.$$

Поэтому

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_{\mu_{i^k}}) \geq J(\hat{\hat{u}}) \geq \chi(\bar{\mu})$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \chi(\mu_{i^k}) \geq \chi(\bar{\mu}).$$

Теорема доказана.

Известно, что в классических методах двойственности для обеспечения сходимости итерационных алгоритмов необходимо согласование длины шага сдвига по двойственной переменной $l$ с константой положительной определенности квадратичной формы минимизируемого функционала. Применение таких методов в полукоэрцитивном вариационном неравенстве (1) не возможно, так как в задаче (1) квадратичная форма $a(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega$ лишь неотрицательно определена.

На пространстве $H^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ определим модифицированный функционал Лагранжа

$$M(v,l) = J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma} \Big( \big((l - r\,v)^+\big)^2 - l^2 \Big)\, d\Gamma,$$

где $r > 0$ — const, символ $w^+$ означает $\max\{0, w\}$, т.е. $(l - r\,v)^+ = \max\{0, l - r\,v\}$.

**Определение 2.** *Точка $(v^*, l^*) \in H^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ называется седловой точкой функционала $M(v,l)$, если выполняется двустороннее неравенство*

$$M(v^*, l) \le M(v^*, l^*) \le M(v, l^*) \quad \forall (v,l) \in H^1(\Omega) \times L_2(\Gamma).$$

Известно, что $L(v,l)$ и $M(v,l)$ обладают одним и тем же множеством седловых точек [3, 10, 11].

Введем двойственный функционал

$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in H^1(\Omega)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma} \Big( \big((l - r\,v)^+\big)^2 - l^2 \Big)\, d\Gamma \right\}. \tag{6}$$

Двойственный функционал имеет и другое представление [10, 11]

$$\underline{M}(l) = \inf_{\mu \in L_2(\Gamma)} \left\{ \chi(\mu) + \int\limits_{\Gamma} l\,\mu\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma} \mu^2\, d\Gamma \right\}, \tag{7}$$

где $\chi(\mu)$ — определенный ранее функционал чувствительности.

Для произвольного фиксированного $l \in L_2(\Gamma)$ рассмотрим функционал

$$F_l(\mu) = \chi(\mu) + \int\limits_{\Gamma} l\,\mu\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma} \mu^2\, d\Gamma, \quad r > 0 - const.$$

Из теоремы 1 вытекает, что $F_l(\mu)$ слабо полунепрерывный снизу функционал на $L_2(\Gamma)$.

Так как $\chi(\mu)$ полунепрерывен снизу в $L_2(\Gamma)$, то его надграфик $epi\chi$ есть выпуклое замкнутое множество в $L_2(\Gamma) \times R$, $R = (-\infty, +\infty)$. По теореме отделимости [12, с. 164] существуют такие $\alpha \in L_2(\Gamma)$ и $\gamma \in R$, что

$$\int\limits_{\Gamma} \alpha\,\mu\, d\Gamma + \chi(\mu) + \gamma \ge 0 \quad \forall\, \mu \in \mathrm{dom}\chi.$$

Следовательно, для функционала $F_l(\mu)$ справедлива оценка

$$F_l(\mu) \ge -\int\limits_{\Gamma} \alpha\,\mu\, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma} l\,\mu\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma} \mu^2\, d\Gamma + \gamma \quad \forall\, \mu \in L_2(\Gamma).$$

Поэтому $F_l(\mu) \to +\infty$ при $\|\mu\|_{L_2(\Gamma)} \to \infty$, т.е. $F_l(\mu)$ коэрцитивен в $L_2(\Gamma)$.

Из слабой полунепрерывности снизу и коэрцитивности $F_l(\mu)$ следует существование элемента $\mu(l) = \arg \min\limits_{\mu \in L_2(\Gamma)} F_l(\mu)$. Из сильной выпуклости $F_l(\mu)$ на $\mathrm{dom}\chi$ вытекает, что для любого $l \in L_2(\Gamma)$ элемент $\mu(l)$ единственный.

Замечание. В ранее опубликованных работах [3, 10, 11, 13] при доказательстве существования и единственности элемента $\mu(l) = \arg \min\limits_{\mu \in L_2(\Gamma)} F_l(\mu)$ ошибочно предполагалось, что функционал чувствительности $\chi(\mu)$ непрерывен. В данной работе эта неточность исправлена.

**Теорема 2.** *Двойственный функционал* $\underline{M}(l)$ *непрерывен в* $L_2(\Gamma)$.

*Доказательство.* Для любого $\mu \in L_2(\Gamma)$ имеем

$$\chi(\mu(l)) + \int\limits_\Gamma l\,\mu(l)\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu^2(l)\,d\Gamma + \frac{r}{2}\|\mu - \mu(l)\|^2_{L_2(\Gamma)} \le \chi(\mu) + \int\limits_\Gamma l\,\mu\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu^2\,d\Gamma.$$

Возьмем два произвольных элемента $l_1$, $l_2 \in L_2(\Gamma)$, и пусть $\mu_1 = \mu(l_1)$, $\mu_2 = \mu(l_2)$. Тогда из последнего неравенства следует

$$\begin{gathered}\chi(\mu_1) + \int\limits_\Gamma l_1\,\mu_1\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu_1^2\,d\Gamma + \frac{r}{2}\|\mu_2 - \mu_1\|^2_{L_2(\Gamma)} \le \chi(\mu_2) + \int\limits_\Gamma l_1\,\mu_2\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu_2^2\,d\Gamma,\\ \chi(\mu_2) + \int\limits_\Gamma l_2\,\mu_2\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu_2^2\,d\Gamma + \frac{r}{2}\|\mu_1 - \mu_2\|^2_{L_2(\Gamma)} \le \chi(\mu_1) + \int\limits_\Gamma l_2\,\mu_1\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu_1^2\,d\Gamma.\end{gathered} \tag{8}$$

Складывая неравенства в (8), получаем неравенство

$$r\|\mu_1 - \mu_2\|^2_{L_2(\Gamma)} \le \int\limits_\Gamma (l_1 - l_2)(\mu_2 - \mu_1)\,d\Gamma, \tag{9}$$

откуда приходим к оценке

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{L_2(\Gamma)} \le \frac{1}{r}\|l_1 - l_2\|_{L_2(\Gamma)}. \tag{10}$$

Из неравенств (8) также вытекает

$$\int\limits_\Gamma l_2(\mu_2 - \mu_1)\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma (\mu_2^2 - \mu_1^2)\,d\Gamma \le \chi(\mu_1) - \chi(\mu_2) \le \int\limits_\Gamma l_1(\mu_2 - \mu_1)\,d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma (\mu_2^2 - \mu_1^2)\,d\Gamma.$$

Перейдем в последнем соотношении к пределу $l_2 \to l_1$ в $L_2(\Gamma)$. Тогда, с учетом (10), получаем

$$\lim_{l_2 \to l_1} \chi(\mu_2) = \chi(\mu_1).$$

Отсюда делаем вывод, что двойственный функционал $\underline{M}(l)$ непрерывен в $L_2(\Gamma)$. Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Двойственный функционал* $\underline{M}(l)$ *дифференцируем по Гато в* $L_2(\Gamma)$ *и его производная* $\nabla \underline{M}(l)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* $1/r$*, то есть*

$$\|\nabla \underline{M}(l_1) - \nabla \underline{M}(l_2)\|_{L_2(\Gamma)} \leq \frac{1}{r}\|l_1 - l_2\|_{L_2(\Gamma)} \quad \forall\, l_1, l_2 \in L_2(\Gamma).$$

*Доказательство.* Из непрерывности вогнутого функционала $\underline{M}(l)$ вытекает, что субдифференциал $\partial(-\underline{M}(l))$ выпуклого функционала $(-\underline{M}(l))$ не является пустым для любого $l \in L_2(\Gamma)$.

Пусть $(-t) \in \partial(-\underline{M}(l))$. Тогда для любого $\xi \in L_2(\Gamma)$ справедливо неравенство

$$\underline{M}(\xi) \leq \underline{M}(l) + < t, \xi - l >, \tag{11}$$

где $< \cdot, \cdot >$ — скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$.

Из (11) следует, что

$$\chi(\mu(\xi)) + \int_\Gamma \xi\, \mu(\xi)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma \mu^2(\xi)\, d\Gamma \leq \chi(\mu(l)) + \int_\Gamma l\, \mu(l)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma \mu^2(l)\, d\Gamma + <t, \xi - l> \leq$$
$$\leq \chi(\mu(\xi)) + \int_\Gamma l\, \mu(\xi)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma \mu^2(\xi)\, d\Gamma + < t, \xi - l > .$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_\Gamma \mu(\xi)(\xi - l)\, d\Gamma \leq < t, \xi - l > \quad \forall\, \xi \in L_2(\Gamma).$$

Для произвольного $h \in L_2(\Gamma)$ и любого $\beta > 0$ положим $\xi = l + \beta h$. При таком выборе $\xi$ последнее неравенство запишется как

$$\int_\Gamma \mu(l + \beta\, h) h\, d\Gamma \leq < t, h > \quad \forall\, h \in L_2(\Gamma)$$

Устремляя $\beta$ к нулю и учитывая (10), получаем

$$\int_\Gamma \mu(l) h\, d\Gamma \leq < t, h > \quad \forall\, h \in L_2(\Gamma)$$

и, следовательно,

$$\int_\Gamma \mu(l) h\, d\Gamma = < t, h > \quad \forall\, h \in L_2(\Gamma).$$

Отсюда, в силу единственности для любого $l \in L_2(\Gamma)$ элемента $\mu(l)$, следует, что $\underline{M}(l)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\Gamma)$ и $\nabla \underline{M}(l) = \mu(l) = t$. Неравенство (10) завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим двойственную задачу

$$\begin{cases} \underline{M}(l) - \max, \\ l \in L_2(\Gamma). \end{cases} \tag{12}$$

Для решения задачи (12) рассмотрим градиентный метод максимизации

$$l^{k+1} = l^k + \theta_k \mu(l^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (l^0 \in L_2(\Gamma)), \tag{13}$$

где

$$\mu(l^k) = \arg \min_{\mu \in L_2(\Gamma)} \left\{ \chi(\mu) + \int\limits_\Gamma l^k \, \mu \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_\Gamma \mu^2 \, d\Gamma \right\},$$

$$\theta_k \in [\beta, 2r - \beta], \quad \beta \in (0, r].$$

**Теорема 4.** *Для алгоритма (13) выполняется предельное равенство*

$$\lim_{k \to \infty} \|\mu(l^k)\|_{L_2(\Gamma)} = 0.$$

*Доказательство.* Из теоремы 3 следует, что для любого $h \in L_2(\Gamma)$ справедливо равенство [14]

$$\underline{M}(l + h) - \underline{M}(l) = \int\limits_0^1 < \mu(l + t\,h), h > dt.$$

Отсюда, по аналогии с [15, стр. 31] следует утверждение теоремы.

Алгоритм (13) переписывается следующим образом [10]:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad u^{k+1} = \arg \min_{v \in H^1(\Omega)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_\Gamma \left( \left( \left( l^k + r\,v \right)^+ \right)^2 - (l^k)^2 \right) d\Gamma \right\} \quad (l^0 \in L_2(\Gamma)), \\
&(ii) \quad l^{k+1} = l^k + \theta_k \max \left\{ -u^{k+1}, -\frac{l^k}{r} \right\}, \quad \theta_k \in [\beta, 2r - \beta], \ \beta \in [0, r].
\end{aligned} \tag{14}$$

Алгоритм (14) сходится по функционалу, то есть

$$\lim_{k \to \infty} J(u^k) = \min_{v \in K} J(v) = J(u^*),$$

где, как и ранее, $u^*$ — решение задачи (1).

Действительно, $\chi(\mu)$ — слабо полунепрерывный снизу на $L_2(\Gamma)$ функционал. Поэтому

$$\varliminf_{k \to \infty} \left\{ \chi(\mu(l^k)) + \int\limits_\Gamma l^k \, \mu(l^k) \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_\Gamma \mu^2(l^k) \, d\Gamma \right\} = \varliminf_{k \to \infty} \chi(\mu(l^k)) \geq \chi(0) = J(u^*).$$

С другой стороны,

$$\underline{M}(l^k) = \chi(\mu(l^k)) + \int\limits_\Gamma l^k \, \mu(l^k) \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_\Gamma m^2(l^k) \, d\Gamma =$$

$$= \inf_{\mu \in L_2(\Gamma)} \left\{ \chi(\mu) + \int\limits_\Gamma l^k \, \mu \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_\Gamma \mu^2 \, d\Gamma \right\} \leq \chi(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\{ \chi(\mu(l^k)) + \int\limits_{\Gamma} l^k\, \mu(l^k)\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma} \mu^2(l^k)\, d\Gamma \right\} \le \chi(0).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \chi(\mu(l^k)) + \int\limits_{\Gamma} l^k\, \mu(l^k)\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma} \mu^2(l^k)\, d\Gamma \right\} = \chi(0) = J(u^*).$$

Из теоремы 4 теперь следует

$$\lim_{k\to\infty} J(u^k) = \lim_{k\to\infty} \chi(\mu(l^k)) = \chi(0) = J(u^*).$$

## 2. Сходимость модифицированного метода двойственности к седловой точке

Пусть решение $u^*$ задачи (1) принадлежит классу $H^2(\Omega)$. Тогда, как отмечено в параграфе 1, пара $\left(u^*, \frac{\partial u^*}{\partial n}\right)$ будет единственной седловой точкой для классического $L(v,l)$ и модифицированного $M(v,l)$ функционалов Лагранжа. Заметим, что $u^* \in H^2(\Omega)$, если $\Omega$ есть выпуклое ограниченное множество в $R^n$ [16].

Рассмотрим отображение градиентного сдвига $P(l) = l + \theta\nabla\underline{M}(l)$.

**Теорема 5.** *Пусть решение $u^*$ задачи (1) принадлежит классу $H^2(\Omega)$. Тогда отображение градиентного сдвига $P(l)$ при $\theta \in [\beta, 2r-\beta]$, $\beta \in [0, r]$ удовлетворяет условиям*

$$P\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad \text{и} \quad \left\| P\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) - P(l) \right\|_{L_2(\Gamma)} < \left\| \frac{\partial u^*}{\partial n} - l \right\|_{L_2(\Gamma)} \quad \forall l \ne \frac{\partial u^*}{\partial n}.$$

*Доказательство.* Так как $\frac{\partial u^*}{\partial n}$ является решением двойственной задачи (12) [10], то $\nabla\underline{M}\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) = 0$. Поэтому $P(\frac{\partial u^*}{\partial n}) = \frac{\partial u^*}{\partial n}$.

Возьмем $l \ne \frac{\partial u^*}{\partial n}$. Тогда

$$\left\| P\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) - P(l) \right\|^2_{L_2(\Gamma)} = \left\| \frac{\partial u^*}{\partial n} + \theta\nabla\underline{M}\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) - l - \theta\underline{M}(l) \right\|^2_{L_2(\Gamma)} =$$

$$= \left\| \frac{\partial u^*}{\partial n} - l + \theta\left(\nabla\underline{M}\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) - \underline{M}(l)\right) \right\|^2_{L_2(\Gamma)} = \tag{15}$$

$$= \left\| \frac{\partial u^*}{\partial n} - l \right\|^2_{L_2(\Gamma)} + \theta^2 \left\| \mu\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) - \mu(l) \right\|^2_{L_2(\Gamma)} + 2\theta \left\langle \frac{\partial u^*}{\partial n} - l, \mu\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) - \mu(l) \right\rangle.$$

Как и в теореме 2, для произвольных $l_1$, $l_2 \in L_2(\Gamma)$ обозначим $\mu_1 = \mu(l_1)$, $\mu_2 = \mu(l_2)$ и воспользуемся неравенством (9). Тогда из (15) следует

$$\left\| P\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) - P(l) \right\|^2_{L_2(\Gamma)} \le$$

$$\leq \left\| \frac{\partial u^*}{\partial n} - l \right\|^2_{L_2(\Gamma)} + \theta^2 \left\| \mu\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) - \mu(l) \right\|^2_{L_2(\Gamma)} - 2\theta\, r \left\| \mu\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) - \mu(l) \right\|^2_{L_2(\Gamma)} =$$

$$= \left\| \frac{\partial u^*}{\partial n} - l \right\|^2_{L_2(\Gamma)} - \theta(2r-\theta) \left\| \mu\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) - \mu(l) \right\|^2_{L_2(\Gamma)} =$$

$$= \left\| \frac{\partial u^*}{\partial n} - l \right\|^2_{L_2(\Gamma)} - \theta(2r-\theta) \left\| \mu(l) \right\|^2_{L_2(\Gamma)} \leq \left\| \frac{\partial u^*}{\partial n} - l \right\|^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 5 вытекает, что итерационный процесс (13) для решения двойственной задачи (12) при условии $u^* \in H^2(\Omega)$ вырабатывает ограниченную последовательность $\{l^k\}$, обладающую свойством

$$\left\| l^{k+1} - \frac{\partial u^*}{\partial n} \right\|_{L_2(\Gamma)} < \left\| l^k - \frac{\partial u^*}{\partial n} \right\|_{L_2(\Gamma)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mu(l^k)\|_{L_2(\Gamma)} = 0$, сделаем естественное предположение о существовании функции $\mu^* \in L_2(\Gamma)$ такой, что $\mu(l^k) \leq \mu^*$ п.в. на $\Gamma$, $k$=0,1,2,…. Тогда можно показать, что и последовательность $\{u^k\}$, вырабатываемая в алгоритме (14), ограничена в $H^1(\Omega)$ [10, теор. 2]. Следовательно, последовательность $\{(u^k, l^k)\}$ будет ограниченной в $H^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$.

Последовательность $\{u^k\}$, вырабатываемая на шаге $(i)$ алгоритма (14), обладает большей, чем $H^1(\Omega)$, регулярностью.

**Теорема 6.** *Пусть $\Omega$ — ограниченная область в $R^n$ с границей класса $C^{1,1}$ и начальный элемент $l^0$ в алгоритме (14) принадлежит $H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда последовательность $\{u^k\}$ (k=1,2,…) алгоритма (14) принадлежит классу $H^2(\Omega)$ и определяется единственным образом.*

Доказательство утверждения можно найти в [10].

**Теорема 7.** [10] Пусть решение $u^*$ задачи (1) принадлежит классу $H^2(\Omega)$, а последовательность $\{u^k\}$ ограничена в $H^2(\Omega)$. Тогда последовательность $\{(u^k, l^k)\}$, вырабатываемая алгоритмом (14), сходится в $H^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ к седловой точке $\left(u^*, \frac{\partial u^*}{\partial n}\right)$ при произвольном выборе начального элемента $l^0 \in H^{1/2}(\Gamma)$.

# Список литературы


[1] Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости*, Мир, М., 1974.

[2] Р. Гловински, Ж. Л. Лионс, Р. Тремольер, *Численное исследование вариационных неравенств*, Мир, М, 1979.

[3] Г. Ву, Р. В. Намм, С. А. Сачков, “Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:1 (2006), 26–36.

[4] И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек, *Решение вариационных неравенств в механике*, Мир, М., 1986.

[5] Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980.

[6] А. М. Хлуднев, *Задачи теории упругости в негладких областях*, Физматлит, М., 2010.

[7] W. Mclean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, University Press, Cambridge, United Kingdom, 2000.

[8] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.

[9] D. P. Bertsecas, *Convex Optimization Theory*, Athena Scientific, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, USA, 2009.

[10] Э. М. Вихтенко, Г. Ву, Р. В. Намм, "О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:8 (2010), 1357–1366.

[11] Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм, "Характеристические свойства модифицированного функционала Лагранжа для контактной задачи теории упругости с заданным трением", *Дальневост. матем. журн.*, **9**:1–2 (2009), 38–47.

[12] А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988.

[13] Н. Н. Кушнирук, Р. В. Намм, "Метод множителей Лагранжа для решения полукоэрцитивной модельной задачи с трением", *Сибирский ж. вычисл. матем.*, **12**:4 (2009), 409–420.

[14] Л. В. Канторович, Г. Л. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М, 1984.

[15] Б. Т. Поляк, *Введение в оптимизацию*, Наука, М, 1983.

[16] Р. В. Намм, А. Г. Подгаев, "О $W_2^2$-регулярности решений полукоэрцитивных вариационных неравенств", *Дальневосточный матем. журн.*, **3**:2 (2002), 210–215.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 13 ноября 2013 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-98513-р_восток-а) и фонда Чангвонского национального университета (респ. Корея) в 2013-2014 гг.

---

*Vikhtenko E. M., Woo G., Namm R. V.* The methods for solution semi-coercive variational inequalities of mechanics on the basis of modified Lagrangian functionals. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 1. P. 6–17.

ABSTRACT

The duality scheme based on a modified Lagrangian functional is considered for an elliptic semi-coercive variational Signorini's inequality. The sustainable method for the solution of an investigated inequality is constructed and justified.

Key words: *variational inequality, Signorini's problem, sensitivity functional, Lagrangian functional, dual functional, saddle point, Uzawa method, proximal regularization.*