Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 1. С. 3–8

УДК 511.334
MSC2010 11F03, 11F12

© В. А. Быковский[1]

Ряды Эйзенштейна – Гекке и их свойства

Для обычных рядов Эйзенштейна относительно конгруэнцподгруппы $\Gamma_0(N)$ нарушается свойство мультипликативности коэффициентов Фурье, если N делится на квадрат натурального числа, большего единицы. Построенные в работе ряды Эйзенштейна – Гекке лишены этого недостатка, что является очень важным при изучении формул следа в пространствах автоморфных форм. Подобного типа результаты были получены ранее Гелбартом и Жаке с помощью теории аделей.

Ключевые слова: *модулярная форма, ряд Эйзенштейна, оператор Гекке.*

Пусть N — натуральное и $N = N_1 N_0^2 N_2$ — его мультипликативное разложение с НОД$(N_1, N_2) = 1$. Обозначим через $(\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})^\wedge$ группу характеров Дирихле мультипликативной группы $(\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})^*$ (обратимые элементы кольца классов вычетов $\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z}$). Определим множества

$$V(N) \subset (\mathbb{Z}^+)^3 \times (\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})^*, \qquad V^\wedge(N) \subset (\mathbb{Z}^+)^3 \times (\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})^\wedge,$$

состоящие в первом случае из элементов

$$(N_1, N_0, N_2; a) = (N_1, N_0, N_2; a \,(\mathrm{mod}\ N_0)), \qquad \text{НОД}(a, N_1 N_0) = 1,$$

а во втором из

$$(N_1, N_0, N_2; \psi).$$

Элементы $V(N)$ определяют множество неэквивалентных параболических вершин $\Gamma_0(N)$ (см. [1]) по правилу

$$\alpha = (N_1, N_0, N_2; a) \longrightarrow r = a/N_1 N_0.$$

Напомним, что ряд Эйзенштейна в вершине r определяется равенством

$$E_\alpha(s; r) = \sum_{\sigma \in \Gamma_0(N)_r \backslash \Gamma_0(N)} \mathrm{Im}^s(\sigma_r^{-1} \sigma z), \qquad \sigma_r \Gamma_0(N)_\infty \sigma_r^{-1} = \Gamma_0(N)_r.$$

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: admin@iam.khv.ru

Согласно [2]

$$E_{(N_1,N_0,N_2;a)}(s;r)=\frac{N_2^{-s}}{2}\sum_{c,d}\frac{y^s}{|N_1N_0cz+d|^{2s}},$$

где суммирование ведется по всем целым c,d для которых

$$\text{НОД}(c,N_0N_2)=\text{НОД}(d,N_1N_0c)=1,\qquad cd+a\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ N_0).$$

Определим ряды Эйзенштейна – Гекке для $\alpha=(N_1,N_0,N_2;\psi)\in V^\wedge(N)$

$$E^\wedge_\alpha(s;z)=\frac{N_2^{-s}}{2\sqrt{\varphi(N_0)}}\sum_{c,d}\frac{\psi(cd)y^s}{|N_1N_0cz+d|^{2s}},$$

где суммирование ведется по всем целым c,d с

$$\text{НОД}(c,N_0N_2)=\text{НОД}(d,N_1N_0c)=1.$$

С помощью соотношений ортогональности для характеров Дирихле находим

$$E_{(*,a)}(s;z)=\frac{1}{\sqrt{\varphi(N_0)}}\sum_{\psi\in(\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})^\wedge}\overline{\psi(-a)}E^\wedge_{(*,\psi)}(s;z),$$

$$E^\wedge_{(*,\psi)}(s;z)=\frac{1}{\sqrt{\varphi(N_0)}}\sum_{a\,(\mathrm{mod}\ N_0)}\psi(-a)E_{(*,a)}(s;z),$$

$$\sum_{\psi\in(\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})^\wedge}E^\wedge_{(*,\psi)}(s_1;z_1)\overline{E^\wedge_{(*,\psi)}(s_2;z_2)}=\sum_{a\,(\mathrm{mod}\ N_0)}^{*}E_{(*,a)}(s_1;z_1)\overline{E_{(*,a)}(s_2;z_2)}.$$

Для $N_0=1,2$ обычные ряды Эйзенштейна являются собственными функциями операторов Гекке, а при $N_0>2$ — нет. Поэтому иногда удобнее работать с рядами Эйзенштейна – Гекке, которые лишенны этого недостатка, и которые при $N_0=1,2$ совпадают с обычными рядами Эйзенштейна. Этот факт впервые был отмечен в [3]. Ввиду громоздкости предложенного там доказательства, мы еще раз детально рассмотрим этот вопрос, опираясь на идеи работы [4].

Положим для характера $\psi\,(\mathrm{mod}\ N_0)$ и модулярной группы $\Gamma=\Gamma_0(1)$

$$R(s;\psi;z)=\sum_{\sigma=\begin{pmatrix}*&*\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\psi(cd)\operatorname{Im}^s\big(\sigma(N_0z)\big).$$

Лемма. *Функция $R(s;\psi;z)$ автоморфна относительно $\Gamma_0(N_0^2)$.*

Доказательство. Пусть

$$g=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N_0^2).$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0^{1/2} & 0 \\ 0 & N_0^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & N_0 B \\ C/N_0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0^{1/2} & 0 \\ 0 & N_0^{-1/2} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} * & * \\ cA + dC/N_0 & dD + cN_0B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0^{1/2} & 0 \\ 0 & N_0^{-1/2} \end{pmatrix}$$

и

$$\psi(cA + dC/N_0)\psi(dD + cN_0B) = \psi(c)\psi(A)\psi(d)\psi(D) = \psi(cd)\psi(AD) = \psi(cd).$$

Поэтому

$$R(s;\psi;gz) = \sum_{\sigma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \psi(cd) \mathrm{Im}^s\big(\sigma(N_0 gz)\big) = \sum_{\sigma' = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \psi(cd) \mathrm{Im}^s\big(\sigma'(N_0 z)\big),$$

где

$$\sigma' = \begin{pmatrix} * & * \\ cA + dC/N_0 & dD + cN_0B \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$R(s;\psi;gz) = \sum_{\sigma' = \begin{pmatrix} * & * \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \psi(c'd') \mathrm{Im}^s\big(\sigma'(N_0 z)\big) = R(s;\psi;z).$$

Лемма доказана. □

Теорема. *Пусть* $\alpha = (N_1, N_0, N_2; \psi) \in V^\wedge(N)$ *и для натурального* n *НОД*$(n, N) = 1$*. Тогда* $E_\alpha^\wedge(s;z)$ *— собственная функция оператора Гекке* $T(n)$ *и*

$$T(n)E_\alpha^\wedge(s;z) = \left(\sum_{n_1 n_2 = n} \overline{\psi}(n_1)\psi(n_2)(n_1/n_2)^{s-1/2} \right) E_\alpha^\wedge(s;z).$$

Доказательство. Согласно определению,

$$E_\alpha^\wedge(s;z) = \frac{N_2^{-s}}{2\sqrt{\varphi(N_0)}} \left(\sum_{(t,N)=1} \frac{\mu(t)\psi^2(t)}{t^{2s}} \right) \left(\sum_{(c,d)} \frac{\psi(cd) y^s}{|N_1 N_0 cz + d|^{2s}} \right),$$

где суммирование ведется по всем целочисленным парам $(c,d) \neq (0,0)$, у которых

$$\text{НОД}(c, N_0N_2) = \text{НОД}(d, N_1N_0) = 1.$$

Следовательно,

$$E_\alpha^\wedge(s;z)=\frac{N_2^{-s}}{2\sqrt{\varphi(N_0)}}\left(\sum_{(t,N)=1}\frac{\mu(t)\psi^2(t)}{t^{2s}}\right)\sum_{t_1\backslash N_1N_0}\mu(t_1)\psi(t_1)\times$$

$$\times\sum_{t_2\backslash N_0N_2}\mu(t_2)\psi(t_2){\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}}}'\frac{\psi(cd)y^s}{|N_1N_0t_2cz+dt_1|^{2s}}=$$

$$=\frac{(N/N_0)^{-s}}{\sqrt{\varphi(N_0)}}\prod_{p\backslash N}\left(1-\frac{\psi^2(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}\sum_{t_1\backslash N_1N_0}\mu(t_1)\psi(t_1)\sum_{t_2\backslash N_0N_2}\frac{\mu(t_2)\psi(t_2)}{(t_1t_2)^s}R\left(s;\psi;N_1\frac{t_2}{t_1}z\right).$$

При этом мы воспользовались очевидным равенством

$$\frac{1}{2}{\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}}}'\frac{\psi(cd)y^s}{|cN_0z+d|^{2s}}=\left(\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\psi^2(t)}{t^{2s}}\right)R(s;\psi;z).$$

Запишем доказанное тождество в более коротком виде

$$E_\alpha^\wedge(s;z)=\sum_{t_1\backslash N_1N_0}\sum_{t_2\backslash N_0N_2}l_{t_1,t_2}(\alpha;s)R\left(s;\psi;N_1\frac{t_2}{t_1}z\right)$$

и заметим, что

$$T(n)E_\alpha^\wedge(s;z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{n_1n_2=n}\sum_{m\,(\mathrm{mod}\,n_2)}E_\alpha^\wedge\left(s;\frac{n_1z+N_0m}{n_2}\right)=$$

$$=\sum_{t_1\backslash N_1N_0}\sum_{t_2\backslash N_0N_2}l_{t_1,t_2}(\alpha;s)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{n_1n_2=n}\sum_{m\,(\mathrm{mod}\,n_2)}R\left(s;\psi;\frac{N_1t_2}{t_1}\left(\frac{n_1z+N_0m}{n_2}\right)\right)=$$

$$=\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{n_1n_2=n}\sum_{m\,(\mathrm{mod}\,n_2)}R\left(s;\psi;\frac{n_1(N_1t_2z/t_1)+mt_2N_1N_0/t_1}{n_2}\right)=$$

$$=\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{n_1n_2=n}\sum_{m\,(\mathrm{mod}\,n_2)}R\left(s;\psi;\frac{n_1z'+m}{n_2}\right),$$

где

$$z'=N_1\frac{t_2}{t_1}z.$$

При замене

$$\frac{N_1N_0}{t_1}t_2m\to m$$

мы воспользовались леммой. Имея в виду равенства

$$\begin{pmatrix}* & *\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & N_0m\\ 0 & n_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & *\\ cn_1 & dn_2+N_0cm\end{pmatrix}$$

и

$$\psi(cd)=\overline{\psi}(n)\psi(cn_1)\psi(dn_2+N_0dm),$$

находим

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{n_1 n_2 = n} \sum_{m \,(\mathrm{mod}\ n_2)} R\left(s; \psi; \frac{n_1 z' + m}{n_2}\right) =$$

$$= \sum_{\sigma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \psi(cd) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{n_1 n_2 = n} \mathrm{Im}^s \left(\sigma\left(\frac{n_1 N_0 z' + N_0 m}{n_2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\overline{\psi}(n)}{\sqrt{n}} \sum_{\sigma' = \begin{pmatrix} * & * \\ c' & d' \end{pmatrix}} \psi(c'd') \, \mathrm{Im}^s\big(\sigma'(N_0 z')\big),$$

где суммирование ведется по классам

$$\Gamma_\infty \setminus \left\{ \sigma' = \begin{pmatrix} * & * \\ c' & d' \end{pmatrix} \;\middle|\; a', b', c', d' \in \mathbb{Z};\ \det \sigma' = n \right\}.$$

Поэтому последняя сумма равна

$$\frac{\overline{\psi}(n)}{\sqrt{n}} \sum_{n_1 n_2 = n} n_2 \sum_{\text{НОД}(c', d') = n_2} \psi(c'd') \frac{n^s (N_0 y')^s}{|c' N_0 z' + d'|^{2s}} =$$

$$= \left(\sum_{n_1 n_2 = n} \overline{\psi}(n_1) \psi(n_2) (n_1/n_2)^{s - 1/2} \right) R(s; \psi; z').$$

Множитель n_2 перед внутренней суммой возник по причине того, что для НОД$(c', d') = n_2$ сравнение

$$a'd' \equiv n \,(\mathrm{mod}\ c')$$

имеет ровно n_2 решений $a' \,(\mathrm{mod}\ c')$. Комбинируя это равенство с выражениями для $T(n) E_\alpha^\wedge(s; z)$ установленными ранее, получим утверждение леммы 2. $\square$

Список литературы

[1] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971; Русский перевод: *Введение в арифметическую теорию автоморфных функций*, Мир, М..

[2] J.-M. Deshouillers, H. Ivaniec, "Kloosterman sums and Fourier coofficients of cups forms", *Invent. Math.*, **70** (1988), 219–288.

[3] V. A. Bykovskii, N. V. Kuznetsov, A. I. Vinogradov, "Generalized summation formula for inhomogeneous convolution", *In Proc. Int. Conf. Automorphic functions and their applications*, Khabarovsk, 1989, 18–63.

[4] M. N. Huxley, "Scattering matrices for congruence subgroups", *Modular Forms*, ed. by R. Rankin, 1984, 141–156.

[5] S. Gelbart, H. Jacquet, "Forms on GL(2) from the analytic point of viev", *Proc. Symp. Pure Math.*. V. 33, part 1, RI, Providence, 1979, 213–251.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 4 апреля 2016 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00335).

Bykovskii V. A. The Eisenstein-Hecke series and their properties. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 1. P. 3–8.

ABSTRACT

Let $\Gamma_0(N)$ be the congruence subgroup of level N. If N is not a square-free number then the Fourier coefficients of the classical Eisenstein series are not multiplicative. In the paper we construct the modified Eisenstein-Hecke series with the desired property of multiplicativity. This result is of great importance for investigating trace formulas on the space of cusp forms. Similar results were obtained earlier by S. Gelbart and H. Jacquet using the theory of adeles.

Key words: *modular form, Eisenstein series, Hecke operator.*