Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 1. С. 9–23

УДК 517.5
MSC2010 30A10, 30C10, 30C15

© Я. А. Верёвкин[1]

Алгебры Понтрягина некоторых момент-угол комплексов

Мы рассматриваем задачу описания алгебры Понтрягина (гомологий петель) момент-угол комплексов и многообразий. Момент-угол комплекс Z_K представляет собой клеточный комплекс, составленный из произведений полидисков и торов, параметризированных симплексами в конечном симплициальном комплексе K. На Z_K есть естественное действие тора, которое играет важную роль в торической топологии. В случае, когда K является триангуляцией сферы, Z_K является топологическим многообразием, которое имеет интересные геометрические структуры.

Образующие алгебры Понтрягина $H_*(\Omega Z_K)$, когда K является флаговым комплексом, были описаны в работе Грбич, Панова, Терио и Ву. Описание соотношений часто является трудной задачей, даже когда K имеет всего несколько вершин. В этой работе мы опишем эти соотношения в случае, когда K является границей пятиугольника или шестиугольника. В этом случае известно, что Z_K является связной суммой произведений сфер с двумя сферами в каждом произведении. Поэтому $H_*(\Omega Z_K)$ является алгеброй с одним соотношением, и мы выписываем это одно соотношение явно, что даёт новое гомотопическое доказательство результата Макгаврана. Интересной особенностью наших соотношений является то, что они включают в себя итерированные произведения Уайтхеда, которые обращаются в нуль при гомоморфизме Гуревича. Таким образом, это соотношение не может быть получено исключительно из результата Макгаврана.

Ключевые слова: *момент-угол комплекс, алгебра Понтрягина.*

1. Введение

В этой работе мы рассмотрим задачу описания алгебры Понтрягина (гомологий петель) момент-угол комплексов и многообразий. Момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ пред-

[1]Московский государственный университет, 119992, ГСП-2, г. Москва, Ленинские горы, МГУ механико-математический факультет, кафедра высшей геометрии и топологии. Электронная почта: verevkin_j.a@mail.ru

ставляет собой клеточный комплекс, составленный из произведений полидисков и торов, параметризованных симплексами в конечном симплициальном комплексе $\mathcal{K}$. Он имеет естественное действие тора и играет важную роль в торической топологии [1]. В случае, когда $\mathcal{K}$ является триангуляцией сферы, $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является топологическим многообразием и имеет интересные геометрические структуры.

Набор образующих алгебры Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ в случае, когда $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс, был описан в [2]. Описание соотношений является трудной задачей, даже если $\mathcal{K}$ имеет мало вершин. Здесь мы опишем эти соотношения в случае, когда $\mathcal{K}$ является границей пятиугольника или шестиугольника. В этом случае известно, что $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является связной суммой произведений сфер с двумя сферами в каждом произведении (см. Макгавран [3], а также [4], [5]). Поэтому $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является алгеброй с единственным соотношением, и мы опишем это соотношение явно, таким образом приводя новое теоретико-гомотопическое доказательство результата Макгаврана. Интересной особенностью нашего соотношения является то, что оно включает в себя итерированные произведения Уайтхеда, которые переходят в ноль при гомоморфизме Гуревича. Таким образом, форма этого соотношения не может быть выведена только из результата Макгаврана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за помощь, внимание и ценные советы. Также автор благодарен Ивану Лимонченко за ценные обсуждения.

2. Основные понятия и предварительные определения

Пусть $\mathcal{K}$ — *симплициальный комплекс* на множестве $[m] = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, т.е. $\mathcal{K}$ — семейство подмножеств $I \subset [m]$, замкнутое относительно включения. Подмножества $I \in \mathcal{K}$ называются *симплексами*. Симплициальный комплекс называется *флаговым*, если любой минимальный несимплекс состоит из двух элементов. Другими словами, $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс, если каждое множество вершин, попарно соединенных рёбрами, порождает симплекс.

Для любого $I \subset [m]$ определим *полный подкомплекс* (ограничение $\mathcal{K}$ на I):

$$\mathcal{K}_I = \{J \in \mathcal{K} \colon J \subset I\}.$$

Пусть — коммутативное кольцо с единицей. *Кольцом граней* симплициального комплекса $\mathcal{K}$ называется фактор-кольцо градуированного кольца многочленов $k[v_1, \dots, v_m]$ по идеалу, порождённому несимплексами:

$$k[\mathcal{K}] = k[v_1, \dots, v_m] \big/ \big(v_{i_1} \dots v_{i_k} \colon \{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}\big), \quad \deg v_i = 2.$$

Рассмотрим единичный полидиск в комплексном пространстве:

$$\mathbb{D}^m = \big\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon |z_i|^2 \leqslant 1, \quad i = 1, \dots, m\big\}.$$

Для каждого подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ определим следующее подмножество в полидиске:

$$B_I = \big\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{D}^m \colon |z_i|^2 = 1 \quad \text{, если } i \notin I\big\}$$

Определим *момент-угол комплекс*, соответствующий симплициальному комплексу $\mathcal{K}$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} B_I \subset \mathbb{D}^m,$$

где объединение берётся в $\mathbb{D}^m$. Аналогично, рассмотрим подмножество

$$(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} BT^I \subset BT^m$$

где $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$, $BT^I = \big\{(x_1, \ldots, x_m) \in BT^m \colon x_i = *, \text{ если } i \notin I\big\}$.

Мы рассматриваем гомологии и когомологии с коэффициентами в кольце k и в дальнейшем не указываем это в обозначениях.

Теорема 2.1 ([1]). *Существуют изоморфизмы колец*

$$H^*((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \cong k[\mathcal{K}],$$
$$H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \operatorname{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k[\mathcal{K}], k) \cong H\big(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes k[\mathcal{K}], d\big),$$
$$H^p(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{I \subset [m]} \widetilde{H}^{p-|I|-1}(\mathcal{K}_I),$$

где $k[\mathcal{K}]$ *— кольцо граней,* $du_i = v_i$, $dv_i = 0$, $\quad \deg u_i = 1$, $\deg v_i = 2$.

Теорема 2.2 ([1]). *Момент-угол комплекс* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ *является гомотопическим слоем вложения* $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$.

Гомотопическое расслоение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$ приводит к точной последовательности алгебр Понтрягина:

$$1 \to H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \to H_*\big(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}\big) \to \Lambda[\mu_1, \ldots, \mu_m] \to 0,$$

и $\Lambda[\mu_1, \ldots, \mu_m] = H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^m) = H_*(T^m)$. Таким образом, $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ — коммутаторная подалгебра некоммутативной алгебры $H_*\big(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}\big)$. Эта алгебра может быть описана явно в случае, когда $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс

Теорема 2.3 ([1]). *Пусть* $\mathcal{K}$ *— флаговый комплекс. Тогда*

$$H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; k) \cong T\langle \mu_1, \ldots, \mu_m \rangle / (\mu_i^2 = 0, \mu_i\mu_j + \mu_j\mu_i = 0, \text{ если } \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

где $T\langle \mu_1, \ldots, \mu_m \rangle$ *— свободная (тензорная) алгебра,* $\deg \mu_i = 1$.

Здесь $\mu_i \in H_1(\Omega((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}))$ — каноническая образующая, соответствующая i-му координатному отображению $S^1 = \Omega(\mathbb{C}P^\infty)^m \to \Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$.

Следующий результат описывает мультипликативные образующие коммутаторной алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

Теорема 2.4 ([2]). *Пусть* $\mathcal{K}$ *— флаговый комплекс. Тогда подалгебра* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \subset H_*\big(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}\big)$ *мультипликативно порождена итерированными коммутаторами следующего вида:*

$$[\mu_i, \mu_j], \quad [\mu_{k_1}, [\mu_j, \mu_i]], \quad \ldots, \quad [\mu_{k_1}, [\mu_{k_2}, [\mu_{k_3}, \ldots, [\mu_{k_{m-2}}, [\mu_j, \mu_i]] \ldots]]], \tag{2.1}$$

где $k_1 < k_2 < \cdots < k_p < j > i$, $k_s \neq i$ *для любого* s, *и* i *— наименьшая вершина в некоторой связной компоненте, не содержащей* j, *полного подкомплекса* $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_p,j,i\}} \subset \mathcal{K}$. *Более того, это множество мультипликативных образующих минимально, то есть коммутаторы 2.1 образуют базис в подмодуле неразложимых элементов в* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

3. Случай пятиугольника

В этом разделе $\mathcal{K}$ — граница пятиугольника. То есть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ с максимальными симплексами $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{5, 1\}$. Мы опишем когомологии, гомологии и алгебру Понтрягина $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Когомологии

Структура кольца когомологий $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ может быть описана с помощью Теоремы 2.1. Нетривиальные группы когомологий таковы:

$$
\begin{aligned}
H^0(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) &\cong \widetilde{H}^{-1}(\mathcal{K}_\varnothing) \cong k,\\
H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) &\cong \bigoplus_{|I|=2} \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_I) \cong k^5,\\
H^4(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) &\cong \bigoplus_{|I|=3} \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_I) \cong k^5,\\
H^7(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) &\cong \widetilde{H}^1(\mathcal{K}) \cong k.
\end{aligned}
$$

Для описания кольца когомологий удобно работать с алгеброй Кошуля $\Lambda[u_1, \ldots, u_5] \otimes k[\mathcal{K}]$. Образующие $H^7(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ представляются любыми одночленами вида $u_i u_{i+1} u_{i+2} v_{i+3} v_{i+4} \in \Lambda[u_1, \ldots, u_5] \otimes k[\mathcal{K}]$, где индексы берутся по модулю 5. Все эти одночлены представляют собой один и тот же класс когомологий. Действительно, из тождеств

$$
\begin{aligned}
&[d(u_1u_2u_3u_4v_5)] = [d(u_1u_2u_3u_5v_4)] = [d(u_1u_2u_4u_5v_3)] = \\
&= [d(u_1u_3u_4u_5v_2)] = [d(u_2u_3u_4u_5v_1)] = 0
\end{aligned}
$$

вытекает, что

$$
\begin{aligned}
&[u_2u_3u_4v_5v_1] - [u_1u_2u_3v_4v_5] = [u_1u_2u_5v_3v_4] - [u_1u_2u_3v_4v_5] = \\
&= -[u_1u_4u_5v_2v_3] + [u_1u_2u_5v_3v_4] = [u_3u_4u_5v_1v_2] - [u_1u_4u_5v_2v_3] = \\
&= [u_3u_4u_5v_1v_2] - [u_2u_3u_4v_1v_5] = 0.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Обозначим $t = [u_1u_2u_3v_4v_5] \in H^7(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ и вычислим произведение в кольце когомологий. Выберем базис в $H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ и $H^4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, как показано в таблице 1. Для любого заданного элемента базиса $H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ существует единственный элемент базиса

$H^4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ такой, что произведение этих двух элементов есть t. Произведение любых двух других базисных элементов $H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ и $H^4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ нулевое. Например,

$$[u_1v_3] \cdot [u_4u_5v_2] = [u_1u_4u_5v_2v_3] = [u_1u_2u_3v_4v_5] = t,$$

где второе равенство следует из (3.1).

Из этих равенств мы получаем таблицу произведений в когомологиях.

Таблица 1. Классы когомологий и их произведения.

$H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$H^4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	Произведение
$[u_1v_3]$	$[u_4u_5v_2]$	t
$[u_2v_4]$	$-[u_1u_5v_3]$	t
$[u_3v_5]$	$[u_1u_2v_4]$	t
$[u_4v_1]$	$[u_2u_3v_5]$	t
$[u_5v_2]$	$[u_3u_4v_1]$	t

Гомологии

Для описания гомологий $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ мы воспользуемся клеточным разбиением из [1, § 4.4]. Каждый множитель $\mathbb{D}$ из $\mathbb{D}^m$ разбивается на три клетки: точка $1 \in \mathbb{D}$ — 0-нумерная клетка; дополнение к 1 в граничной окружности — 1-мерная клетка, которую мы обозначим через S; и внутренность диска $\mathbb{D}$ — 2-мерная клетка, которую мы обозначим через D. Взяв произведение, мы получаем клеточное разбиение полидиска $\mathbb{D}^m$, клетки которого имеют вид

$$\prod_{i\in I} D_i \times \prod_{j\in J} S_j,$$

где $I, J \subset [m]$ и $I \cap J = \varnothing$. Клетки $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \subset \mathbb{D}^m$ задаются условием $I \in \mathcal{K}$.

Теперь мы опишем клеточные циклы, двойственные когомологическим классам, указанным в таблице 1. Клеточные циклы приведены в таблице 2. Например, коцепь u_1v_3 принимает значение 1 на цепи $S_1D_3 + D_1S_3$ и обнуляется на всех других цепях.

Таблица 2. Клеточные циклы, представляющие базисные классы гомологий.

$H_3(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$H_4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$
$S_1D_3 + D_1S_3$	$D_2S_4S_5 - S_2S_4D_5$
$S_2D_4 + D_2S_4$	$-S_1S_3D_5 - S_1D_3S_5$
$S_3D_5 + D_3S_5$	$-D_1S_2S_4 + S_1S_2D_4$
$S_4D_1 + D_4S_1$	$-D_2S_3S_5 + S_2S_3D_5$
$S_5D_2 + D_5S_2$	$D_1S_3S_4 - S_1S_3D_4$

Алгебра Понтрягина

Канонический элемент $\mu_i \in H_1(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})$ является образом при гомоморфизме Гуревича гомотопического класса отображения $S^1 \to \Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$, сопряжённого i-му координатному вложению $S^2 \hookrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$. Обозначим последнее отображение через $\widehat{\mu}_i$, а сопряжённое к нему обозначим через $\mu_i\colon S^1 \to \Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$ (мы используем одно и то же обозначение μ_i для отоборажения и образа при гомоморфизме Гуревича, однако это не приведёт к путанице). Коммутатор $[\mu_i,\mu_j] = \mu_i\mu_j + \mu_j\mu_i$ в алгебре Понтрягина $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})$ сопряжён к отображению Уайтхеда $[\widehat{\mu}_i,\widehat{\mu}_j]\colon S^3 \to (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$. Оно поднимается до отображения $S_3 \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ (из гомотопического расслоения $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$); и, таким образом, мы можем рассматривать $[\mu_i,\mu_j]$ как элемент из $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Итерированные произведения Уайтхеда $[\widehat{\mu}_{i_1},[\widehat{\mu}_{i_2},\ldots[\widehat{\mu}_{i_{k-1}},\widehat{\mu}_{i_k}]\ldots]]\colon S^{k+1} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}, k \geqslant 2$, и итерированные коммутаторы $[\mu_{i_1},[\mu_{i_2},\ldots[\mu_{i_{k-1}},\mu_{i_k}]\ldots]] \in H_k(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \subset H_k(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})$ рассматриваются аналогично.

Предупреждение: когда мы рассматриваем $[\widehat{\mu}_{i_1},[\widehat{\mu}_{i_2},\ldots[\widehat{\mu}_{i_{k-1}},\widehat{\mu}_{i_k}]\ldots]]$ как элемент в $\pi_{k+1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, он *не* представляется в виде произведения Уайтхеда, так как в $\pi_2(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ нет элементов $\widehat{\mu}_i$. Эти элементы лежат в $\pi_2((\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})$, а их произведения Уайтхеда поднимаются в $\pi_{k+1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

Пусть $h\colon \pi_k(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H_k(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ гомоморфизм Гуревича. Из описания выше можно вывести следующее соответствие между итерированными коммутаторами и клеточными цепями.

Лемма 3.1. *Образ Гуревича $h([\widehat{\mu}_{i_1},[\widehat{\mu}_{i_2},\ldots[\widehat{\mu}_{i_{k-1}},\widehat{\mu}_{i_k}]\ldots]]) \in H_{k+1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ представляется клеточной цепью $S_{i_1}\ldots D_{i_{k-1}}S_{i_k} + S_{i_1}\ldots S_{i_{k-1}}D_{i_k}$.*

Теперь запишем коммутаторы, соответствующие базисным клеточным цепям:

$$S_iD_j + D_iS_j \leftrightarrow [\mu_i,\mu_j]$$
$$S_iS_jD_k + S_iD_jS_k \leftrightarrow [\mu_i,[\mu_j,\mu_k]].$$

Эти коммутаторы приведены в таблице 3.

Таблица 3. Коммутаторы.

$H_2(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$H_3(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$
$[\mu_3,\mu_1]$	$[\mu_4,[\mu_5,\mu_2]]$
$[\mu_4,\mu_2]$	$-[\mu_1,[\mu_5,\mu_3]]$
$[\mu_5,\mu_3]$	$-[\mu_2,[\mu_4,\mu_1]]$
$[\mu_4,\mu_1]$	$-[\mu_3,[\mu_5,\mu_2]]$
$[\mu_5,\mu_2]$	$[\mu_3,[\mu_4,\mu_1]]$

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — граница пятиугольника.*

а) Существует гомотопическая эквивалентность $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq (S^3 \times S^4)^{\#5}$, где $(S^3 \times S^4)^{\#5}$ — связная сумма пяти экземпляров $S^3 \times S^4$.

б) $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — алгебра с 10 образующими

$$\alpha_1 = [\mu_3, \mu_1], \quad \alpha_2 = [\mu_4, \mu_1], \quad \alpha_3 = [\mu_4, \mu_2], \quad \alpha_4 = [\mu_5, \mu_2], \quad \alpha_5 = [\mu_5, \mu_3],$$
$$\beta_1 = [\mu_4, [\mu_5, \mu_2]], \quad \beta_2 = [\mu_3, [\mu_5, \mu_2]], \quad \beta_3 = [\mu_1, [\mu_5, \mu_3]], \quad \beta_4 = [\mu_3, [\mu_4, \mu_1]],$$
$$\beta_5 = [\mu_2, [\mu_4, \mu_1]],$$

которые удовлетворяют единственному соотношению

$$[\alpha_1, \beta_1] - [\alpha_2, \beta_2] - [\alpha_3, \beta_3] + [\alpha_4, \beta_4] - [\alpha_5, \beta_5] = 0, \tag{3.2}$$

где $\deg \alpha_i = 2, \deg \beta_i = 3$, $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - (-1)^{\deg\alpha\cdot\deg\beta}\beta\alpha$.

Каждое слагаемое $[\alpha_i, \beta_i]$ в (3.2) соответствует одной строке в таблице 3.

Доказательство теоремы 3.2. Сначала выведем соотношение (3.2). 10 образующих $\alpha_1, \ldots, \alpha_5, \beta_1, \ldots, \beta_5$ — в точности образующие, задаваемые теоремой 2.4 в случае, когда $\mathcal{K}$ — граница пятиугольника. Геометрически образующая $\alpha_1 \in H_2(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ задаётся отображением $S^2 \to \Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, сопряжённым поднятию $S^3 \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ произведения Уайтхеда $[\widehat{\mu}_3, \widehat{\mu}_1]$, как описано в диаграмме

$$\begin{tikzcd} & S^3 \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "{[\widehat{\mu}_3,\widehat{\mu}_1]}"] & \\ \mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[r] & (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K} \arrow[r] & (\mathbb{C}P^\infty)^m \end{tikzcd}$$

Образующая $\beta_1 \in H_3(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ задаётся аналогично отображением $S^3 \to \Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, сопряжённым поднятию $S^4 \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ в диаграмме

$$\begin{tikzcd} & S^4 \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "{[\widehat{\mu}_4,[\widehat{\mu}_5,\widehat{\mu}_2]]}"] & \\ \mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[r] & (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K} \arrow[r] & (\mathbb{C}P^\infty)^m \end{tikzcd}$$

Раскроем каждый коммутатор в тензорной алгебре $T\langle\mu_1, \ldots, \mu_5\rangle$, используя [6]:

$$\begin{aligned} [\alpha_1, \beta_1] = \; & -\mu_1\mu_3\mu_2\mu_5\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4\mu_2\mu_5 + \mu_1\mu_3\mu_4\mu_5\mu_2 - \mu_1\mu_3\mu_5\mu_2\mu_4 - \\ & -\mu_3\mu_1\mu_2\mu_5\mu_4 + \mu_3\mu_1\mu_4\mu_2\mu_5 + \mu_3\mu_1\mu_4\mu_5\mu_2 - \mu_3\mu_1\mu_5\mu_2\mu_4 + \\ & +\mu_2\mu_5\mu_4\mu_1\mu_3 - \mu_4\mu_2\mu_5\mu_1\mu_3 - \mu_4\mu_5\mu_2\mu_1\mu_3 + \mu_5\mu_2\mu_4\mu_1\mu_3 + \\ & +\mu_2\mu_5\mu_4\mu_3\mu_1 - \mu_4\mu_2\mu_5\mu_3\mu_1 - \mu_4\mu_5\mu_2\mu_3\mu_1 + \mu_5\mu_2\mu_4\mu_3\mu_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\alpha_2, \beta_2] = \; & -\mu_1\mu_4\mu_2\mu_5\mu_3 + \mu_1\mu_4\mu_3\mu_2\mu_5 + \mu_1\mu_4\mu_3\mu_5\mu_2 - \mu_1\mu_4\mu_5\mu_2\mu_3 - \\ & -\mu_4\mu_1\mu_2\mu_5\mu_3 + \mu_4\mu_1\mu_3\mu_2\mu_5 + \mu_4\mu_1\mu_3\mu_5\mu_2 - \mu_4\mu_1\mu_5\mu_2\mu_3 + \\ & +\mu_2\mu_5\mu_3\mu_1\mu_4 - \mu_3\mu_2\mu_5\mu_1\mu_4 - \mu_3\mu_5\mu_2\mu_1\mu_4 + \mu_5\mu_2\mu_3\mu_1\mu_4 + \\ & +\mu_2\mu_5\mu_3\mu_4\mu_1 - \mu_3\mu_2\mu_5\mu_4\mu_1 - \mu_3\mu_5\mu_2\mu_4\mu_1 + \mu_5\mu_2\mu_3\mu_4\mu_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha_3,\beta_3] = \; & +\mu_2\mu_4\mu_1\mu_3\mu_5 + \mu_2\mu_4\mu_1\mu_5\mu_3 - \mu_2\mu_4\mu_3\mu_5\mu_1 - \mu_2\mu_4\mu_5\mu_3\mu_1 + \\
& +\mu_4\mu_2\mu_1\mu_3\mu_5 + \mu_4\mu_2\mu_1\mu_5\mu_3 - \mu_4\mu_2\mu_3\mu_5\mu_1 - \mu_4\mu_2\mu_5\mu_3\mu_1 - \\
& -\mu_1\mu_3\mu_5\mu_2\mu_4 - \mu_1\mu_5\mu_3\mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_5\mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_5\mu_3\mu_1\mu_2\mu_4 - \\
& -\mu_1\mu_3\mu_5\mu_4\mu_2 - \mu_1\mu_5\mu_3\mu_4\mu_2 + \mu_3\mu_5\mu_1\mu_4\mu_2 + \mu_5\mu_3\mu_1\mu_4\mu_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha_4,\beta_4] = \; & -\mu_2\mu_5\mu_1\mu_4\mu_3 + \mu_2\mu_5\mu_3\mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_5\mu_3\mu_4\mu_1 - \mu_2\mu_5\mu_4\mu_1\mu_3 - \\
& -\mu_5\mu_2\mu_1\mu_4\mu_3 + \mu_5\mu_2\mu_3\mu_1\mu_4 + \mu_5\mu_2\mu_3\mu_4\mu_1 - \mu_5\mu_2\mu_4\mu_1\mu_3 + \\
& +\mu_1\mu_4\mu_3\mu_2\mu_5 - \mu_3\mu_1\mu_4\mu_2\mu_5 - \mu_3\mu_4\mu_1\mu_2\mu_5 + \mu_4\mu_1\mu_3\mu_2\mu_5 + \\
& +\mu_1\mu_4\mu_3\mu_5\mu_2 - \mu_3\mu_1\mu_4\mu_5\mu_2 - \mu_3\mu_4\mu_1\mu_5\mu_2 + \mu_4\mu_1\mu_3\mu_5\mu_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha_5,\beta_5] = \; & -\mu_3\mu_5\mu_1\mu_4\mu_2 + \mu_3\mu_5\mu_2\mu_1\mu_4 + \mu_3\mu_5\mu_2\mu_4\mu_1 - \mu_3\mu_5\mu_4\mu_1\mu_2 - \\
& -\mu_5\mu_3\mu_1\mu_4\mu_2 + \mu_5\mu_3\mu_2\mu_1\mu_4 + \mu_5\mu_3\mu_2\mu_4\mu_1 - \mu_5\mu_3\mu_4\mu_1\mu_2 + \\
& +\mu_1\mu_4\mu_2\mu_3\mu_5 - \mu_2\mu_1\mu_4\mu_3\mu_5 - \mu_2\mu_4\mu_1\mu_3\mu_5 + \mu_4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 + \\
& +\mu_1\mu_4\mu_2\mu_5\mu_3 - \mu_2\mu_1\mu_4\mu_5\mu_3 - \mu_2\mu_4\mu_1\mu_5\mu_3 + \mu_4\mu_1\mu_2\mu_5\mu_3.
\end{aligned}$$

Используя коммутационные соотношения $\mu_1\mu_2 = -\mu_2\mu_1$, $\mu_2\mu_3 = -\mu_3\mu_2$, $\mu_3\mu_4 = -\mu_4\mu_3$, $\mu_4\mu_5 = -\mu_5\mu_4$, $\mu_1\mu_5 = -\mu_5\mu_1$ в алгебре $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})$ (см. теорему 2.3), приводим каждое слагаемое в правой части к следующему каноническому виду: возьмём μ_j с минимальным индексом j (в нашем случае μ_1) и, используя коммутационные соотношения, переместим его влево на столько, на сколько это возможно. Далее возьмём μ_2 и, используя коммутационные соотношения, в которые не входит μ_1, переместим его влево настолько, насколько это возможно. Будем действовать таким образом, пока мы не достигнем μ_5. Например, канонический вид одночлена $\mu_4\mu_2\mu_3\mu_5\mu_1$ есть $\mu_3\mu_4\mu_1\mu_2\mu_5$. В результате этих действий мы получим

$$\begin{aligned}
[\alpha_1,\beta_1] = \; & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 + \mu_1\mu_4\mu_2\mu_3\mu_5 + \mu_1\mu_3\mu_4\mu_5\mu_2 - \mu_1\mu_3\mu_5\mu_2\mu_4 + \\
& +\mu_3\mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 + \mu_3\mu_1\mu_4\mu_2\mu_5 + \mu_3\mu_1\mu_4\mu_5\mu_2 - \mu_3\mu_1\mu_5\mu_2\mu_4 + \\
& +\mu_2\mu_4\mu_1\mu_5\mu_3 - \mu_4\mu_1\mu_2\mu_5\mu_3 - \mu_4\mu_1\mu_5\mu_2\mu_3 + \mu_5\mu_2\mu_4\mu_1\mu_3 - \\
& -\mu_2\mu_5\mu_3\mu_4\mu_1 - \mu_4\mu_2\mu_5\mu_3\mu_1 - \mu_5\mu_3\mu_4\mu_1\mu_2 - \mu_5\mu_2\mu_3\mu_4\mu_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha_2,\beta_2] = \; & -\mu_1\mu_4\mu_2\mu_5\mu_3 - \mu_1\mu_4\mu_2\mu_3\mu_5 - \mu_1\mu_3\mu_4\mu_5\mu_2 - \mu_1\mu_4\mu_5\mu_2\mu_3 - \\
& -\mu_4\mu_1\mu_2\mu_5\mu_3 - \mu_4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 + \mu_4\mu_1\mu_3\mu_5\mu_2 - \mu_4\mu_1\mu_5\mu_2\mu_3 + \\
& +\mu_2\mu_5\mu_3\mu_1\mu_4 + \mu_3\mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 - \mu_3\mu_1\mu_5\mu_2\mu_4 + \mu_5\mu_3\mu_1\mu_2\mu_4 + \\
& +\mu_2\mu_5\mu_3\mu_4\mu_1 + \mu_2\mu_3\mu_4\mu_1\mu_5 - \mu_3\mu_5\mu_2\mu_4\mu_1 + \mu_5\mu_2\mu_3\mu_4\mu_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha_3,\beta_3] = \; & +\mu_2\mu_4\mu_1\mu_3\mu_5 + \mu_2\mu_4\mu_1\mu_5\mu_3 - \mu_2\mu_3\mu_4\mu_1\mu_5 - \mu_2\mu_5\mu_3\mu_4\mu_1 - \\
& -\mu_4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 - \mu_4\mu_1\mu_2\mu_5\mu_3 - \mu_3\mu_4\mu_1\mu_2\mu_5 - \mu_4\mu_2\mu_5\mu_3\mu_1 - \\
& -\mu_1\mu_3\mu_5\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_5\mu_2\mu_3\mu_4 - \mu_3\mu_1\mu_5\mu_2\mu_4 + \mu_5\mu_3\mu_1\mu_2\mu_4 + \\
& +\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5\mu_2 + \mu_1\mu_4\mu_5\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1\mu_4\mu_5\mu_2 + \mu_5\mu_3\mu_1\mu_4\mu_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha_4,\beta_4] = \; & +\mu_1\mu_2\mu_5\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_5\mu_3\mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_5\mu_3\mu_4\mu_1 - \mu_2\mu_4\mu_1\mu_5\mu_3 + \\
& +\mu_1\mu_5\mu_2\mu_3\mu_4 + \mu_5\mu_3\mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_5\mu_2\mu_3\mu_4\mu_1 - \mu_5\mu_2\mu_4\mu_1\mu_3 - \\
& -\mu_1\mu_4\mu_2\mu_3\mu_5 - \mu_3\mu_1\mu_4\mu_2\mu_5 - \mu_3\mu_4\mu_1\mu_2\mu_5 - \mu_4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 - \\
& -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5\mu_2 - \mu_3\mu_1\mu_4\mu_5\mu_2 - \mu_3\mu_4\mu_1\mu_5\mu_2 + \mu_4\mu_1\mu_3\mu_5\mu_2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\alpha_5,\beta_5] = \;& -\mu_3\mu_1\mu_4\mu_5\mu_2 + \mu_3\mu_1\mu_5\mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_5\mu_2\mu_4\mu_1 - \mu_3\mu_4\mu_1\mu_5\mu_2 - \\
& -\mu_5\mu_3\mu_1\mu_4\mu_2 - \mu_5\mu_3\mu_1\mu_2\mu_4 - \mu_5\mu_2\mu_3\mu_4\mu_1 - \mu_5\mu_3\mu_4\mu_1\mu_2 + \\
& +\mu_1\mu_4\mu_2\mu_3\mu_5 - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 - \mu_2\mu_4\mu_1\mu_3\mu_5 + \mu_4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 + \\
& +\mu_1\mu_4\mu_2\mu_5\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_5\mu_3\mu_4 - \mu_2\mu_4\mu_1\mu_5\mu_3 + \mu_4\mu_1\mu_2\mu_5\mu_3.
\end{aligned}
$$

Суммируя эти выражения с соответствующими 3.2 знаками, мы получим требуемое соотношение (3.2).

Теперь докажем утверждение а). Рассмотрим отображение $f\colon (S^3 \vee S^4)^{\vee 5} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, заданное как букет отображений, соответствующих образующим $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$, $\beta_1,\ldots,\beta_5$ из начала доказательства. Так как имеет место соотношение (3.2), отображение f продолжается до отображения из связной суммы (которая отличается от букета одной 7-мерной клеткой), как показано в диаграмме:

$$
\begin{tikzcd}
(S^3 \vee S^4)^{\vee 5} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \\
(S^3 \times S^4)^{\# 5} \arrow[ur, dashed, "\widehat{f}"] &
\end{tikzcd}
$$

Отображение $\widehat{f}$ индуцирует изоморфизм в гомологиях и поэтому является гомотопической эквивалентностью, так как все пространства односвязны.

Чтобы закончить доказательство утверждения б), мы должны показать, что (3.2) — единственное соотношение для образующих $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$, $\beta_1,\ldots,\beta_5$. Мы построили гомотопическую эквивалентность между $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и связной суммой произведений сфер $X = (S^3 \times S^4)^{\# 5}$. Пространство X получается из букета сфер $X = (S^3 \vee S^4)^{\vee 5}$ приклеиванием 7-мерной клетки по сумме пяти произведений Уайтхеда. Переходя к алгебре Понтрягина, мы получаем, что $H_*(\Omega X)$ — фактор-алгебра свободной алгебры с 10 образующими по единственному соотношению, т.е. имеет вид, в точности описанный в утверждении б). Гомотопическая эквивалентность $X \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ влечёт за собой изоморфизм алгебр Понтрягина. Таким образом, нет никаких других соотношений, кроме (3.2). $\square$

4. Случай шестиугольника

В этом разделе $\mathcal{K}$ — граница шестиугольника. Таким образом, $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[6] = \{1,2,3,4,5,6\}$ с максимальными симплексами $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,5\}$, $\{5,6\}$, $\{6,1\}$. Опишем когомологии, гомологии и алгебру Понтрягина $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Вычислим когомологии и гомологии $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ аналогично случаю пятиугольника. Затем опишем алгебру Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, вычислив единственное соотношение на канонических образующих — итерированные коммутаторы из теоремы 2.4. В отличие от случая пятиугольника, в соотношении появляются итерированные коммутаторы вида $[\alpha_i,\alpha_j]$. Эти коммутаторы соответствуют произведениям Уайтхеда $[\widehat{\alpha}_i,\widehat{\alpha}_j]\colon S^5 \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, которые обращаются в ноль при гомоморфизме Гуревича и, таким образом, не могут быть обнаружены из кольца когомологий.

Когомологии

Структура кольца когомологий $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ может быть описана с помощью теоремы 2.1. Нетривиальные группы когомологий таковы:

$$\begin{aligned}
H^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \widetilde{H}^{-1}(\mathcal{K}_{\varnothing}) \cong k,\\
H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \bigoplus_{|I|=2} \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_I) \cong k^9,\\
H^4(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \bigoplus_{|I|=3} \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_I) \cong k^{16},\\
H^5(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \bigoplus_{|I|=4} \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_I) \cong k^9,\\
H^8(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \widetilde{H}^1(\mathcal{K}) \cong k.
\end{aligned}$$

Образующие группы $H^8(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ представляются любыми одночленами вида $u_i u_{i+1} u_{i+2} v_{i+3} v_{i+4} v_{i+5} \in \Lambda[u_1, \dots, u_6] \otimes k[\mathcal{K}]$, где индексы берутся по модулю 6. Все эти одночлены представляют один и тот же класс когомологий.

Обозначим $t = [u_1 u_2 u_3 v_4 v_5 v_6] \in H^8(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ и вычислим произведение в кольце когомологий. Выберем базис $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ и $H^5(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, как показано в таблице 4, 5. Любому базисному элементу из $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ соответствует единственный базисный элемент в $H^5(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ такой, что произведение этих двух элементов есть t. Произведение любых двух других базисных элементов из $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ и $H^5(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ есть ноль. Аналогично выберем базис для $H^4(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

Таблица 4. Классы когомологий и их произведения для $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ и $H^5(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

$H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$	$H^5(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$	Произведение
$[u_1 v_3]$	$[u_4 u_5 u_6 v_2]$	t
$[u_1 v_4]$	$-[u_2 u_3 u_5 v_6] + [u_2 u_3 u_6 v_5]$	t
$[u_1 v_5]$	$[u_2 u_3 u_4 v_6]$	t
$[u_2 v_4]$	$-[u_1 u_5 u_6 v_3]$	t
$[u_2 v_5]$	$-[u_1 u_3 u_6 v_4] + [u_1 u_4 u_6 v_3]$	t
$[u_2 v_6]$	$-[u_3 u_4 u_5 v_1]$	t
$[u_3 v_5]$	$[u_1 u_2 u_6 v_4]$	t
$[u_3 v_6]$	$[u_1 u_2 u_4 v_5] - [u_1 u_2 u_5 v_4]$	t
$[u_4 v_6]$	$-[u_1 u_2 u_3 v_5]$	t

Обратим внимание на то, что, в отличие от случая пятиугольника, некоторые классы когомологий в $H^4(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ и $H^5(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ не могут быть представлены одночленами в алгебре Кошуля $\Lambda[u_1, \dots, u_6] \otimes k[\mathcal{K}]$.

Таблица 5. Классы когомологий и их произведения для $H^4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

$H^4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$H^4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	Произведение
$[u_1u_5v_3]$	$-[u_2u_6v_4]$	t
$[u_3u_5v_1]$	$-[u_4u_6v_2]+[u_2u_6v_4]$	t
$[u_2u_3v_6]$	$-[u_4u_5v_1]$	t
$[u_5u_6v_2]$	$[u_3u_4v_1]$	t
$[u_1u_6v_3]$	$[u_4u_5v_2]$	t
$[u_3u_4v_6]$	$-[u_2u_5v_1]+[u_1u_5v_2]$	t
$[u_5u_6v_3]$	$-[u_2u_4v_1]+[u_1u_4v_2]$	t
$[u_1u_6v_4]$	$-[u_3u_5v_2]+[u_2u_5v_3]$	t

Гомологии

Клеточные циклы, двойственные классам когомологий в таблице 4, показаны в таблице 6, а клеточные циклы, двойственные классам когомологий в таблице 5, показаны в таблице 7.

Таблица 6. Клеточные циклы, двойственные базису когомологи для $H_3(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ и $H_5(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

$H_3(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$H_5(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$
$S_1D_3+D_1S_3$	$D_2S_4S_5S_6+S_2S_4S_5D_6$
$S_1D_4+D_1S_4$	$-S_2S_3S_5D_6-D_2S_3S_5S_6$
$S_1D_5+D_1S_5$	$D_2S_3S_4S_6+S_2S_3S_4D_6$
$S_2D_4+D_2S_4$	$S_1S_3S_5D_6-S_1D_3S_5S_6$
$S_2D_5+D_2S_5$	$S_1D_3S_4S_6-S_1S_3S_4D_6$
$S_2D_6+D_2S_6$	$-D_1S_3S_4S_5-S_1S_3S_4D_5$
$S_3D_5+D_3S_5$	$S_1S_2D_4S_6+S_1S_2S_4D_6$
$S_3D_6+D_3S_6$	$D_1S_2S_4S_5+S_1S_2S_4D_5$
$S_4D_6+D_4S_6$	$-S_1S_2S_3D_5-D_1S_2S_3S_5$

Алгебра Понтрягина

Аналогично тому, как поступили в случае пятиугольника, мы используем лемму 3.1, чтобы записать коммутаторы, соответствующие клеточным цепям в таблицах 6, 7. Они даны в первых двух столбцах таблиц 8, 9. Однако, в отличие от случая пятиугольника, гомоморфизм Гуревича $\pi_5(\mathcal{Z}_\mathcal{K})\to H_5(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ не инъективен; его ядро содержит коммутаторы вида $[[\mu_i,\mu_j],[\mu_k,\mu_l]]$. Эти «дополнительные» коммутаторы даны в третьем столбце таблицы 8 с некоторыми неизвестными коэффициентами k_i.

Таблица 7. Клеточные циклы, двойственные базису когомологий для $H_4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

$H_4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$H_4(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$
$S_1S_3D_5 + S_1D_3S_5$	$-D_2S_4S_6 - S_2D_4S_6$
$-S_1S_3D_5 + D_1S_3S_5$	$S_2S_4D_6 - D_2S_4S_6$
$S_2S_3D_6 - D_2S_3S_6$	$S_1S_4D_5 - D_1S_4S_5$
$D_2S_5S_6 - S_2S_5D_6$	$-S_1S_3D_4 + D_1S_3S_4$
$S_1D_3S_6 + S_1S_3D_6$	$-S_2S_4D_5 + D_2S_4S_5$
$S_3S_4D_6 - D_3S_4S_6$	$S_1S_2D_5 - D_1S_2S_5$
$-S_3S_5D_6 + D_3S_5S_6$	$-D_1S_2S_4 + S_1S_2D_4$
$S_1S_4D_6 + S_1D_4S_6$	$-D_2S_3S_5 + S_2S_3D_5$

Таблица 8. Коммутаторы в $H_2(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ и $H_4(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

$H_2(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$H_4(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	Дополнительные коммутаторы
$[\mu_3, \mu_1]$	$[\mu_4, [\mu_5, [\mu_6, \mu_2]]]$	$k_1[[\mu_2, \mu_5], [\mu_4, \mu_6]]$
$[\mu_4, \mu_1]$	$-[\mu_3, [\mu_5, [\mu_6, \mu_2]]]$	$k_2[[\mu_5, \mu_3], [\mu_6, \mu_2]] + k_3[[\mu_6, \mu_3], [\mu_5, \mu_2]]$
$[\mu_5, \mu_1]$	$[\mu_3, [\mu_4, [\mu_6, \mu_2]]]$	$k_4[[\mu_4, \mu_2], [\mu_6, \mu_3]]$
$[\mu_4, \mu_2]$	$-[\mu_1, [\mu_5, [\mu_6, \mu_3]]]$	$k_5[[\mu_6, \mu_3], [\mu_5, \mu_1]]$
$[\mu_5, \mu_2]$	$[\mu_1, [\mu_4, [\mu_6, \mu_3]]]$	$k_6[[\mu_4, \mu_1], [\mu_6, \mu_3]] + k_7[[\mu_6, \mu_4], [\mu_3, \mu_1]]$
$[\mu_6, \mu_2]$	$-[\mu_3, [\mu_4, [\mu_5, \mu_1]]]$	$k_8[[\mu_5, \mu_3], [\mu_4, \mu_1]]$
$[\mu_5, \mu_3]$	$[\mu_1, [\mu_2, [\mu_6, \mu_4]]]$	$k_9[[\mu_4, \mu_1], [\mu_6, \mu_2]]$
$[\mu_6, \mu_3]$	$[\mu_2, [\mu_4, [\mu_5, \mu_1]]]$	$k_{10}[[\mu_4, \mu_2], [\mu_5, \mu_1]] + k_{11}[[\mu_4, \mu_1], [\mu_5, \mu_2]]$
$[\mu_6, \mu_4]$	$-[\mu_2, [\mu_3, [\mu_5, \mu_1]]]$	$k_{12}[[\mu_5, \mu_2], [\mu_3, \mu_1]]$

Таблица 9. Коммутаторы в $H_3(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

$H_3(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$H_3(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$
$[\mu_1, [\mu_5, \mu_3]]$	$[\mu_6, [\mu_4, \mu_2]]$
$[\mu_3, [\mu_5, \mu_1]]$	$-[\mu_4, [\mu_6, \mu_2]]$
$-[\mu_3, [\mu_6, \mu_2]]$	$-[\mu_4, [\mu_5, \mu_1]]$
$[\mu_5, [\mu_6, \mu_2]]$	$[\mu_3, [\mu_4, \mu_1]]$
$[\mu_1, [\mu_6, \mu_3]]$	$[\mu_4, [\mu_5, \mu_2]]$
$-[\mu_4, [\mu_6, \mu_3]]$	$-[\mu_2, [\mu_5, \mu_1]]$
$[\mu_5, [\mu_6, \mu_3]]$	$-[\mu_2, [\mu_4, \mu_1]]$
$[\mu_1, [\mu_6, \mu_4]]$	$-[\mu_3, [\mu_5, \mu_2]]$

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — граница шестиугольника.*

а) Существует гомотопическая эквивалентность:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq (S^3 \times S^5)^{\#9} \# (S^4 \times S^4)^{\#8}.$$

б) $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ — алгебра с 34 образующими:

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = [\mu_3, \mu_1], \qquad \alpha_2 = [\mu_4, \mu_1], \qquad \alpha_3 = [\mu_5, \mu_1], \qquad \alpha_4 = [\mu_4, \mu_5], \\
\alpha_5 = [\mu_5, \mu_2], \quad \alpha_6 = [\mu_6, \mu_2], \quad \alpha_7 = [\mu_5, \mu_3], \quad \alpha_8 = [\mu_6, \mu_3], \quad \alpha_9 = [\mu_6, \mu_4], \\
\beta_1 = [\mu_1, [\mu_5, \mu_3]], \quad \beta_2 = [\mu_3, [\mu_5, \mu_1]], \quad \beta_3 = [\mu_3, [\mu_6, \mu_2]], \quad \beta_4 = [\mu_5, [\mu_6, \mu_2]], \\
\beta_5 = [\mu_1, [\mu_6, \mu_3]], \quad \beta_6 = [\mu_4, [\mu_6, \mu_3]], \quad \beta_7 = [\mu_5, [\mu_6, \mu_3]], \quad \beta_8 = [\mu_1, [\mu_6, \mu_4]], \\
\delta_1 = [\mu_6, [\mu_4, \mu_2]], \quad \delta_2 = [\mu_4, [\mu_6, \mu_2]], \quad \delta_3 = [\mu_4, [\mu_5, \mu_1]], \quad \delta_4 = [\mu_3, [\mu_4, \mu_1]], \\
\delta_5 = [\mu_4, [\mu_5, \mu_2]], \quad \delta_6 = [\mu_2, [\mu_5, \mu_1]], \quad \delta_7 = [\mu_2, [\mu_4, \mu_1]], \quad \delta_8 = [\mu_3, [\mu_5, \mu_2]], \\
\gamma_1 = [\mu_4, [\mu_5, [\mu_6, \mu_2]]], \quad \gamma_2 = [\mu_3, [\mu_5, [\mu_6, \mu_2]]], \quad \gamma_3 = [\mu_3, [\mu_4, [\mu_6, \mu_2]]], \\
\gamma_4 = [\mu_1, [\mu_5, [\mu_6, \mu_3]]], \quad \gamma_5 = [\mu_1, [\mu_4, [\mu_6, \mu_3]]], \quad \gamma_6 = [\mu_3, [\mu_4, [\mu_5, \mu_1]]], \\
\gamma_7 = [\mu_1, [\mu_2, [\mu_6, \mu_4]]], \quad \gamma_8 = [\mu_2, [\mu_4, [\mu_5, \mu_1]]], \quad \gamma_9 = [\mu_2, [\mu_3, [\mu_5, \mu_1]]],
\end{gathered}$$

которые удовлетворяют единственному соотношению:

$$\sum_{i=1}^{9} [\alpha_i, \gamma_i'] + \sum_{j=1}^{8} \sigma_j \cdot [\beta_j, \delta_j] = 0, \tag{4.1}$$

где

$$\begin{gathered}
\deg \alpha_i = 2, \qquad \deg \beta_i = \deg \delta_i = 3, \qquad \deg \gamma_i = 4, \\
\gamma_1' = -\gamma_1 + [\alpha_5, \alpha_9], \qquad \gamma_2' = \gamma_2 + [\alpha_7, \alpha_6] - [\alpha_8, \alpha_5], \qquad \gamma_3' = -\gamma_3 + [\alpha_4, \alpha_8], \\
\gamma_4' = \gamma_4 - [\alpha_8, \alpha_3], \qquad \gamma_5' = -\gamma_5 + [\alpha_2, \alpha_8] - [\alpha_9, \alpha_1], \qquad \gamma_6' = \gamma_6 - [\alpha_7, \alpha_2], \\
\gamma_7' = -\gamma_7 + 0 \cdot [\alpha_2, \alpha_6], \qquad \gamma_8' = -\gamma_8 + 0 \cdot [\alpha_4, \alpha_3] + 0 \cdot [\alpha_2, \alpha_5], \\
\gamma_9' = \gamma_9 + 0 \cdot [\alpha_5, \alpha_1], \\
\sigma_j = \begin{cases} -1, & j \in \{2, 7, 8\} \\ 1, & j \in \{1, 3, 4, 5, 6\}. \end{cases}
\end{gathered}$$

Доказательство. Схема доказательства аналогична случаю пятиугольника (теорема 3.2). Главным шагом является вывод соотношения (4.1). Мы раскрываем каждый коммутатор $[\mu_i, \mu_j]$, $[\mu_i, [\mu_j, \mu_k]]$, $[\mu_l, [\mu_k, [\mu_i, \mu_j]]]$, исходя из определения α_i, β_i, γ_i, δ_i в тензорной алгебре $T\langle \mu_1, \ldots, \mu_6 \rangle$ и приводим каждый одночлен к канонической форме. Затем делаем то же самое с «дополнительными» коммутаторами из третьего столбца таблицы 8. Суммируя получившиеся выражения и приравнивая к нулю, получаем систему линейных уравнений с неизвестными коэффициентами

k_i. Решаем эту систему, используя [6], получаем следующее соотношение на итерированных коммутаторах:

$$\begin{gathered}
-[[\mu_3,\mu_1],[\mu_4,[\mu_5,[\mu_6,\mu_2]]]]+[[\mu_3,\mu_1],[[\mu_2,\mu_5],[\mu_4,\mu_6]]]+[[\mu_4,\mu_1],[\mu_3,[\mu_5,[\mu_6,\mu_2]]]]+\\
+[[\mu_4,\mu_1],[[\mu_5,\mu_3],[\mu_6,\mu_2]]]-[[\mu_4,\mu_1],[[\mu_6,\mu_3],[\mu_5,\mu_2]]]-[[\mu_5,\mu_1],[\mu_3,[\mu_4,[\mu_6,\mu_2]]]]+\\
+[[\mu_5,\mu_1],[[\mu_4,\mu_2],[\mu_6,\mu_3]]]+[[\mu_4,\mu_2],[\mu_1,[\mu_5,[\mu_6,\mu_3]]]]-[[\mu_4,\mu_2],[[\mu_6,\mu_3],[\mu_5,\mu_1]]]-\\
-[[\mu_5,\mu_2],[\mu_1,[\mu_4,[\mu_6,\mu_3]]]]+[[\mu_5,\mu_2],[[\mu_4,\mu_1],[\mu_6,\mu_3]]]-[[\mu_5,\mu_2],[[\mu_6,\mu_4],[\mu_3,\mu_1]]]+\\
+[[\mu_6,\mu_2],[\mu_3,[\mu_4,[\mu_5,\mu_1]]]]-[[\mu_6,\mu_2],[[\mu_5,\mu_3],[\mu_4,\mu_1]]]-[[\mu_5,\mu_3],[\mu_1,[\mu_2,[\mu_6,\mu_4]]]]-\\
-[[\mu_6,\mu_3],[\mu_2,[\mu_4,[\mu_5,\mu_1]]]]+[[\mu_6,\mu_4],[\mu_2,[\mu_3,[\mu_5,\mu_1]]]]+[[\mu_1,[\mu_5,\mu_3]],[\mu_6,[\mu_4,\mu_2]]]-\\
-[[\mu_3,[\mu_5,\mu_1]],[\mu_4,[\mu_6,\mu_2]]]+[[\mu_3,[\mu_6,\mu_2]],[\mu_4,[\mu_5,\mu_1]]]+[[\mu_5,[\mu_6,\mu_2]],[\mu_3,[\mu_4,\mu_1]]]+\\
+[[\mu_1,[\mu_6,\mu_3]],[\mu_4,[\mu_5,\mu_2]]]+[[\mu_4,[\mu_6,\mu_3]],[\mu_2,[\mu_5,\mu_1]]]-[[\mu_5,[\mu_6,\mu_3]],[\mu_2,[\mu_4,\mu_1]]]-\\
-[[\mu_1,[\mu_6,\mu_4]],[\mu_3,[\mu_5,\mu_2]]]=0.
\end{gathered}$$

Это эквивалентно (4.1). Оставшаяся часть доказательства такая же, как в теореме 3.2: используя соотношение (4.1), мы строим отображение

$$\widehat{f}\colon (S^3\times S^5)^{\#9}\#(S^4\times S^4)^{\#8}\to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}},$$

и показываем, что оно является гомотопической эквивалентностью.
Интересным фактом является то, что знаки перед коммутаторами совпадают со знаками в таблице 9 и противоположны знакам в таблице 8. $\square$

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, “Toric Topology”, Math. Surv. and Monogr., *Amer. Math. Soc.*, **204** (2015).

[2] J. Grbic, T. Panov, S. Theriault and J. Wu, “Homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2015, arXiv: 1211.0873.

[3] D. McGavran, “Adjacent connected sums and torus actions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **251** (1979), 235–254.

[4] S. Gitler and S. López de Medrano, *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums*, Preprint, 2009, arXiv: 0901.2580.

[5] F. Bosio and L. Meersseman, “Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes”, *Acta Math.*, **197**:1 (2006), 53–127.

[6] *Wolfram Mathematica*, A software system devoted to supporting research in mathematica. Avaliable at `http://www.wolframalpha.com/`.

[7] A. Hatcher, *Algebraic topology*, MCCME, Moscow, 2011.

[8] *Macaulay2*, A software system devoted to supporting research in algebraic geometry and commutative algebra. Avaliable at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 29 января 2016 г.

Работа была выполнена при поддержке РНФ (грант № 14-11-00414).

Veryovkin Y. A. Pontryagin algebras of some moment-angle-complexes. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 1. P. 9–23.

ABSTRACT

We consider the problem of describing the Pontryagin algebra (loop homology) of moment-angle complexes and manifolds. The moment-angle complex Z_K is a cell complex built of products of polydiscs and tori parametrised by simplices in a finite simplicial complex K. It has a natural torus action and plays an important role in toric topology. In the case when K is a triangulation of a sphere, Z_K is a topological manifold, which has interesting geometric structures.

Generators of the Pontryagin algebra $H_*(\Omega Z_K)$ when K is a flag complex have been described in the work of Grbic, Panov, Theriault and Wu. Describing relations is often a difficult problem, even when K has a few vertices. Here we describe these relations in the case when K is the boundary of a pentagon or a hexagon. In this case, it is known that Z_K is a connected sum of products of spheres with two spheres in each product. Therefore $H_*(\Omega Z_K)$ is a one-relator algebra and we describe this one relation explicitly, therefore giving a new homotopy-theoretical proof of McGavran's result. An interesting feature of our relation is that it includes iterated Whitehead products which vanish under the Hurewicz homomorphism. Therefore, the form of this relation cannot be deduced solely from the result of McGavran.

Key words: *moment-angle complex, Pontryagin algebra.*