Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 1. С. 3–10

УДК 519.632.4
MSC2010 65N12 + 35J25

© Г. В. Гренкин[1]

Сходимость метода Ньютона для уравнений сложного теплообмена

Доказана глобальная монотонная сходимость метода Ньютона для решения уравнений сложного теплообмена в P_1-приближении уравнения переноса излучения.

Ключевые слова: *радиационный теплообмен, диффузионное приближение, метод Ньютона, монотонная сходимость.*

Введение

Данная работа посвящена численному решению краевой задачи, моделирующей радиационно-кондуктивный (сложный) теплообмен (диффузионное P_1-приближение уравнения переноса излучения) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ [1]

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|^3\theta = b\kappa_a\varphi, \tag{1}$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a|\theta|^3\theta \tag{2}$$

с граничными условиями на $\Gamma = \partial\Omega$

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

где θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, θ_b, β, γ — заданные на Γ неотрицательные функции, a, α, b, κ_a — положительные коэффициенты, через ∂_n обозначается производная в направлении внешней нормали к Γ.

В работах [1–5] проведены доказательства однозначной разрешимости диффузионных моделей сложного теплообмена в 1-мерных и 3-мерных областях, а также построен численный алгоритм метода простой итерации. Данная итерационная процедура порождает две последовательности функций θ_k, φ_k, монотонно сходящиеся к точному решению [1]. Однако реализация предложенного алгоритма на ЭВМ затруднена, так как на одном из его этапов требуется решать нелинейное эллиптическое

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: `glebgrenkin@gmail.com`

уравнение (1) при заданном φ. Например, в [2,6] для преодоления данного недостатка в нелинейное уравнение включалось приближение, полученное на предыдущем шаге, в результате чего уравнение становилось линейным, и вводился малый параметр для усреднения старого и нового приближений, что затрудняло сходимость метода.

На практике свою эффективность для рассматриваемой задачи показал метод Ньютона, в котором нелинейное слагаемое θ^4 аппроксимируется выражением $\widetilde{\theta}^4+4\widetilde{\theta}^3(\theta-\widetilde{\theta})$:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\left((4\widetilde{\theta}^3\theta - 3\widetilde{\theta}^4) - \varphi\right) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - (4\widetilde{\theta}^3\theta - 3\widetilde{\theta}^4)\right) = 0,$$
$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0.$$

Здесь $\widetilde{\theta}$ — приближение для температуры, найденное на предыдущей итерации метода Ньютона.

В настоящей работе мы рассмотрим упрощение данного метода (неполный метод Ньютона) и докажем его глобальную монотонную сходимость. Уравнения неполного метода Ньютона имеют следующий вид:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\left((4\widetilde{\theta}^3\theta - 3\widetilde{\theta}^4) - \varphi\right) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - \widetilde{\theta}^4\right) = 0,$$
$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0.$$

Исследование монотонной сходимости метода Ньютона для эллиптического уравнения с монотонным и выпуклым нелинейным слагаемым проводилось в [7,8]. Общие теоремы о монотонной сходимости метода Ньютона приводятся в [9, 10]. В [11] рассмотрен вопрос численного решения уравнений P_1-приближения методом конечных объемов.

1. Постановка задачи

Предположим, что Ω — липшицева ограниченная область. Через L^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, обозначаем пространство Лебега, через H^1 — пространство Соболева W_2^1. Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям

$$(i) \qquad \theta_b, \beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma),\ 0\leqslant\theta_b\leqslant M,\ \beta\geqslant\beta_0>0,\ \gamma\geqslant\gamma_0>0.$$

Пусть $H=L^2(\Omega)$, $V=H^1(\Omega)$, через V' обозначаем пространство, сопряженное с пространством V. Отметим, что $V\subset H=H'\subset V'$. Обозначим через (f,v) значение функционала $f\in V'$ на элементе $v\in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $f\in H$.

Определим операторы $A_{1,2}\colon V\to V'$:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int\limits_\Gamma \beta\theta v\, d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int\limits_\Gamma \gamma\varphi v\, d\Gamma$$

и функционалы $f_{1,2}\in V'$:

$$(f_1, v) = \int\limits_\Gamma \beta\theta_b v\, d\Gamma, \quad (f_2, v) = \int\limits_\Gamma \gamma\theta_b^4 v\, d\Gamma.$$

Замечание 1. Функционалы $(A_1v, v)^{1/2}$ и $(A_2v, v)^{1/2}$ представляют собой нормы в V, эквивалентные стандартной норме в V [12, с. 238].

Определение 1. Пара $\{\theta, \varphi\} \in V\times V$ называется слабым решением задачи (1)–(3), если

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = f_1, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = f_2.$$

В [1] доказано, что задача (1)–(3) имеет единственное слабое решение $\{\theta, \varphi\}$, причем $0\leqslant\theta\leqslant M$, $0\leqslant\varphi\leqslant M^4$.

Сформулируем неполный метод Ньютона. Зададим начальное приближение $\theta_0 = M$. Определим последовательности θ_k, φ_k:

$$A_2\varphi_k + \kappa_a(\varphi_k - \theta_k^4) = f_2, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

$$A_1\theta_{k+1} + b\kappa_a(\theta_k^4 + 4\theta_k^3(\theta_{k+1} - \theta_k) - \varphi_k) = f_1, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{5}$$

Линейные задачи (4), (5) имеют единственное решение, если $\theta_k \geqslant 0$ [12, с. 334].

2. Сходимость алгоритма

Определим оператор $\Phi\colon L^\infty(\Omega)\to L^\infty(\Omega)\cap V$ так: $\varphi = \Phi(\theta)$, если

$$A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = f_2.$$

Лемма 1. [1] *Если* $0 \leqslant \theta \leqslant M$ *п.в. в* Ω, *то* $0 \leqslant \varphi \leqslant M^4$ *п.в. в* Ω, *где* $\varphi = \Phi(\theta)$.

Лемма 2. [1] *Если* $\theta_1 \leqslant \theta_2$ *п.в. в* Ω, *то* $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ *п.в. в* Ω, *где* $\varphi_i = \Phi(\theta_i)$.

Лемма 3. $0 \leqslant \theta_{k+1} \leqslant \theta_k \leqslant M$, $0 \leqslant \varphi_{k+1} \leqslant \varphi_k \leqslant M^4$ *п.в. в* Ω, $k = 0, 1, \ldots$

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции. Сначала докажем, что $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_0 = M$. Отметим, что $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant M^4$ в силу действия леммы 1. Функция θ_1 удовлетворяет уравнению

$$A_1\theta_1 + b\kappa_a(M^4 + 4M^3(\theta_1 - M) - \varphi_0) = f_1. \tag{6}$$

Умножая уравнение (6) на $\eta = \max\{\theta_1 - M, 0\}$, получаем

$$a\|\nabla\eta\|^2 + \int\limits_\Gamma \beta\eta(\eta + M - \theta_b)\, d\Gamma + (4M^3\eta + M^4 - \varphi_0, \eta) = 0.$$

Поскольку все слагаемые неотрицательны, то $\eta = 0$, т.е. $\theta_1 \leqslant M$.

Докажем неотрицательность θ_1. Умножая уравнение (6) на $\psi = \min\{\theta_1, 0\}$, получаем

$$a\|\nabla\psi\|^2 + \int\limits_\Gamma \beta\psi^2\,d\Gamma + 4b\kappa_a M^3\|\psi\|^2 = b\kappa_a(3M^4 + \varphi_0, \psi) + \int\limits_\Gamma \beta\theta_b\psi\,d\Gamma \leqslant 0.$$

Следовательно, $\psi = 0$, и поэтому $\theta_1 \geqslant 0$.

Для проведения доказательства в случае $k \geqslant 1$ запишем уравнение (5) для k и $k-1$ и вычтем одно уравнение из другого. Получим

$$A_1\theta + b\kappa_a[\theta_k^4 - \theta_{k-1}^4 + 4\theta_k^3\theta - 4\theta_{k-1}^3(\theta_k - \theta_{k-1}) - (\varphi_k - \varphi_{k-1})] = 0, \tag{7}$$

где $\theta = \theta_{k+1} - \theta_k$. Согласно гипотезе индукции, $0 \leqslant \theta_k \leqslant \theta_{k-1}$, тогда по лемме 2 $0 \leqslant \varphi_k \leqslant \varphi_{k-1}$.

Умножим уравнение (7) на функцию $\eta = \max\{\theta, 0\}$. Получим

$$(A_1\eta, \eta) + (4\theta_k^3\eta, \eta) + b\kappa_a(\theta_k^4 - \theta_{k-1}^4 - 4\theta_{k-1}^3(\theta_k - \theta_{k-1}), \eta) = b\kappa_a(\varphi_k - \varphi_{k-1}, \eta) \leqslant 0.$$

В силу выпуклости функции $x \mapsto x^4$

$$\theta_{k-1}^4 + 4\theta_{k-1}^3(\theta_k - \theta_{k-1}) \leqslant \theta_k^4,$$

поэтому третье слагаемое неотрицательно. Следовательно, $\eta = 0 \Rightarrow \theta_{k+1} \leqslant \theta_k$.

Докажем неотрицательность θ_{k+1}. Умножая уравнение (5) на $\psi = \min\{\theta_{k+1}, 0\}$, получаем

$$a\|\nabla\psi\|^2 + \int\limits_\Gamma \beta\psi^2\,d\Gamma + b\kappa_a(4\theta_k^3\psi, \psi) = b\kappa_a(3\theta_k^4 + \varphi_k, \psi) + \int\limits_\Gamma \beta\theta_b\psi\,d\Gamma \leqslant 0.$$

Следовательно, $\psi = 0$, и поэтому $\theta_{k+1} \geqslant 0$. □

Теорема 1. *Неполный метод Ньютона сходится:* $\theta_k \to \theta$, $\varphi_k \to \varphi$ *в* V, *где* $\{\theta, \varphi\}$ — *слабое решение задачи* (1)–(3).

Доказательство. Последовательности θ_k, φ_k монотонно убывают и ограничены снизу, следовательно, $\theta_k \to \theta$, $\varphi_k \to \varphi$ п.в. в Ω. По теореме Лебега $\theta_k \to \theta$, $\varphi_k \to \varphi$ в H. Из уравнений (4), (5) вытекает, что последовательности θ_k, φ_k ограничены в V, поэтому можно выделить подпоследовательности $\theta_k \rightharpoonup \theta$, $\varphi_k \rightharpoonup \varphi$ слабо в V.

Сделаем предельный переход в уравнениях (4), (5). В силу непрерывности операторов A_1, A_2 получаем $A_1\theta_k \rightharpoonup A_1\theta$, $A_2\varphi_k \rightharpoonup A_2\varphi$. Сходимость $\theta_k^4 \to \theta^4$ в H вытекает из оценки

$$\int\limits_\Omega (\theta_k^4 - \theta^4)^2\,dx \leqslant 16M^6\|\theta_k - \theta\|^2 \to 0.$$

Так как $\theta \leqslant \theta_{k+1} \leqslant \theta_k$, то

$$\int\limits_\Omega (\theta_k^3\theta_{k+1} - \theta^4)^2\,dx \leqslant \int\limits_\Omega (\theta_k^4 - \theta^4)^2\,dx \to 0,$$

следовательно, $\theta_k^3\theta_{k+1} \to \theta^4$ в H.

Полученные предельные переходы позволяют утверждать, что $\{\theta, \varphi\}$ — слабое решение задачи (1)–(3).

Из монотонности и ограниченности последовательностей θ_k, φ_k вытекает монотонность и ограниченность последовательностей следов $\theta_k|_\Gamma$, $\varphi_k|_\Gamma$, поэтому $\theta_k|_\Gamma \to \theta|_\Gamma$, $\varphi_k|_\Gamma \to \varphi|_\Gamma$ п.в. на Γ и в $L^2(\Gamma)$.

Умножим уравнения (4), (5) на произвольные функции $v, w \in V$:

$$\alpha(\nabla\varphi_k, \nabla v) + \int\limits_\Gamma \gamma\varphi_k v\, d\Gamma + \kappa_a(\varphi_k - \theta_k^4, v) = \int\limits_\Gamma \gamma\theta_b^4 v\, d\Gamma, \tag{8}$$

$$a(\nabla\theta_{k+1}, \nabla w) + \int\limits_\Gamma \beta\theta_{k+1} w d\Gamma + b\kappa_a(\theta_k^4 + 4\theta_k^3(\theta_{k+1} - \theta_k) - \varphi_k, w) = \int\limits_\Gamma \beta\theta_b w\, d\Gamma. \tag{9}$$

Делая предельный переход в (8), (9) и учитывая определение слабого решения задачи (1)–(3), получим, что $(\nabla\varphi_k, \nabla v) \to (\nabla\varphi, \nabla v)$, $(\nabla\theta_k, \nabla w) \to (\nabla\theta, \nabla w)$; следовательно, $\nabla\varphi_k \rightharpoonup \nabla\varphi$, $\nabla\theta_k \rightharpoonup \nabla\theta$ слабо в H.

Умножая уравнения (4), (5) на φ_k и θ_{k+1} соответственно и учитывая определение слабого решения задачи (1)–(3), нетрудно показать, что $\|\nabla\varphi_k\| \to \|\nabla\varphi\|$, $\|\nabla\theta_k\| \to \|\nabla\theta\|$; отсюда $\nabla\varphi_k \to \nabla\varphi$, $\nabla\theta_k \to \nabla\theta$ сильно в H, поэтому $\varphi_k \to \varphi$, $\theta_k \to \theta$ в V. $\square$

3. Численные эксперименты

Вычислительные эксперименты показали, что неполный метод Ньютона сходится значительно медленнее, чем полный метод Ньютона.

Рассмотрим пример квадратной области со стороной $L = 0.25$. Значения параметров таковы: $a = 1.2$, $\alpha = 0.00333$, $\kappa_a = 100$, $b = 226.4$, $\beta = 10$, $\gamma = 0.3$. Коэффициенты соответствуют физическим параметрам стекла. Граничная температура θ_b имеет вид $\theta_b(x,0) = 0.5$, $\theta_b(x,L) = 1$, $\theta_b(0,y) = \theta_b(L,y) = 0.5 + y/(2L)$.

Приведем зависимость погрешностей (в L^∞-норме) неполного и полного методов Ньютона от количества итераций. При вычислении погрешностей вместо точного решения, которое нам неизвестно, используем приближенное решение, вычисленное полным методом Ньютона.

Для вычислений используется пакет FreeFem++. При построении конечноэлементной сетки стороны квадрата разбиваются на 300 частей, используются сплайны P_1. В качестве начального приближения для температуры возьмем $M = 1$. Исходный код доступен по ссылке https://github.com/grenkin/test-newton/.

В табл. 1а представлена погрешность полного метода Ньютона, на рис. 1 приведен график зависимости погрешности неполного метода Ньютона от количества итераций. Точность 10^{-4} достигается за 4 итерации в полном методе Ньютона и за 626 итераций в неполном методе Ньютона.

Рассмотрим еще один пример с квадратной областью со стороной $L = 1$, $a = 0.0515$, $\alpha = 0.0333$, $\kappa_a = 1$, $b = 104.8$. Функция θ_b и параметры β, γ такие же, как в предыдущем примере. Коэффициенты соответствуют физическим параметрам воздуха.

В табл. 1б представлена погрешность полного метода Ньютона, на рис. 2 приведен график зависимости погрешности неполного метода Ньютона от количества

Табл. 1. Погрешность полного метода Ньютона:
а) на первом тесте; б) на втором тесте

1	0.20
2	0.054
3	0.0046
4	0.000033

а)

1	0.20
2	0.056
3	0.0052
4	0.000046

б)

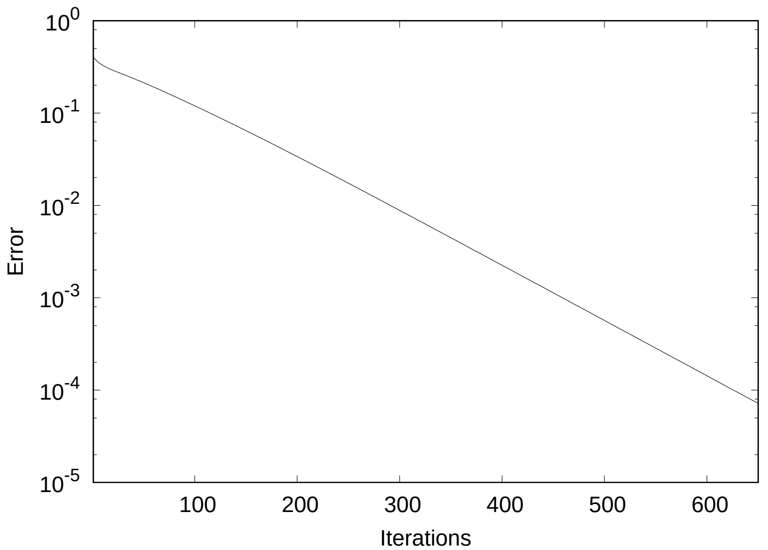

Рис. 1. Погрешность неполного метода Ньютона на первом тесте

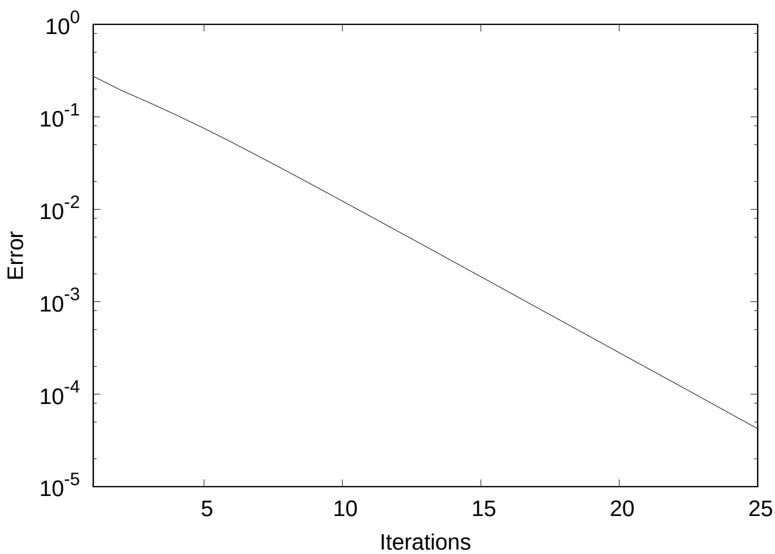

Рис. 2. Погрешность неполного метода Ньютона на втором тесте

итераций. Точность 10^{-4} достигается за 4 итерации в полном методе Ньютона и за 23 итерации в неполном методе Ньютона.

Графики иллюстрируют, что неполный метод Ньютона имеет линейную скорость сходимости. Приведенные примеры показывают как крайне медленную (тест 1), так и умеренную (тест 2) сходимость.

Теоретический анализ сходимости полного метода Ньютона является открытой проблемой.

Список литературы

[1] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **20**:3, (2015), 776–784.

[2] A. Astrakhantseva, A. Kovtanyuk, "Numerical modeling the radiative-convective-conductive heat transfer", *2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA)*, 2014, 106–107.

[3] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, "An iterative method for solving a complex heat transfer problem", *Appl. Math. Comput.*, **219**:17, (2013), 9356-9362.

[4] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Solvability of P_1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem", *Appl. Math. Comput.*, **249**, (2014), 247–252.

[5] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, "Nonlocal unique solvability of a steady-state problem of complex heat transfer", *Comput. Math. Math. Phys.*, **56**:5, (2016), 816–823.

[6] A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk, G. V. Grenkin, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model", *Appl. Math. Comput.*, **289**, (2016), 371–380.

[7] N. L. Schryer, "Newton's method for nonlinear elliptic boundary value problems", *Numer. Math.*, **17**:4, (1971), 284–300.

[8] Э. М. Мухамадиев, В. Я. Стеценко, "Достаточные условия сходимости метода Ньютона-Канторовича при решении краевых задач для квазилинейных уравнений эллиптического типа", *Сиб. матем. журн.*, **12**:3, (1971), 576–582.

[9] Д. Ортега, В. Рейнболдт, *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*, Мир, М., 1975.

[10] F. A. Potra, W. C. Rheinboldt, "On the monotone convergence of Newton's method", *Computing*, **36**:1, (1986), 81–90.

[11] T. Gallouët, R. Herbin, A. Larcher, J.-C. Latché, "Analysis of a fractional-step scheme for the P_1 radiative diffusion model", *Comput. Appl. Math.*, **35**:1, (2016), 135–151.

[12] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A: Linear monotone operators*, Springer, New York, 1990.

Поступила в редакцию
13 марта 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14-11-00079).

Grenkin G. V. Convergence of Newton's method for equations of complex heat transfer. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 1. P. 3–10.

ABSTRACT

Global monotonic convergence of Newton's method is proved for solving equations of complex heat transfer within the P_1 approximation of the radiative transfer equation.

Key words: *radiative heat transfer, diffusion approximation, Newton's method, monotonic convergence.*