УДК 519.6
MSC2010 65K15+74P10

© Э. М. Вихтенко[1], Г. Ву[2], Р. В. Намм[3,1]

# Модифицированная схема двойственности для задач конечномерной и бесконечномерной выпуклой оптимизации

Рассматриваются модифицированные методы двойственности для конечномерной задачи выпуклой оптимизации и полукоэрцитивной задачи Синьорини. Доказываются соотношения двойственности для прямой и двойственной задач без предположения о разрешимости двойственных задач.

Ключевые слова: *вариационное неравенство, выпуклая оптимизация, задача Синьорини, функционал чувствительности, функционал Лагранжа, двойственный функционал.*

## Введение

В настоящее время для решения различных задач выпуклой оптимизации построены и исследованы методы множителей Лагранжа, основанные на модифицированных функциях (функционалах) Лагранжа. Переход к модифицированным функциям Лагранжа позволяет существенно улучшить в теоретическом и практическом планах известные методы поиска седловых точек. При этом удается обосновать сходимость как по прямым, так и по двойственным переменным. Однако для ряда важных с практической точки зрения задач выпуклой оптимизации предположение о разрешимости двойственной задачи является неестественным. Это относится, например, к задачам теории упругости с внутренней трещиной [1, 2]. Как известно, края трещины являются концентратами напряжений и в окрестности краев трещины регулярность решения прямой задачи может быть минимальной, и, следовательно, двойственная задача в этом случае неразрешима.

В данной работе исследуется схема двойственности, основанная на модифицированных функциях Лагранжа. При этом разрешимость соответствующей двойственной задачи не предполагается.

[1] Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
[2] 641-773, Чангвонский национальный университет, Чангвон, Южная Корея.
[3] Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким-Ю-Чена, 65.
Электронная почта: vikht.el@gmail.com (Э. М. Вихтенко), gswoo@changwon.ac.kr (Г. Ву), rnamm@yandex.ru (Р. В. Намм).

## 1. Схема двойственности для конечномерной задачи выпуклой оптимизации

Рассмотрим задачу выпуклой оптимизации

$$\begin{cases} f(x) \to \inf, \\ x \in \Omega = \{z \in R^n : \ \mathrm{g}^j(z) \leqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, m\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $f$, $\mathrm{g}^j$ — заданные на $R^n$ конечнозначные выпуклые функции. Предположим, что $\Omega$ — непустое компактное множество, тогда, очевидно, задача (1) разрешима. На пространстве $R^n \times R^m$ определим функцию Лагранжа

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j \mathrm{g}^j(x)$$

и введем двойственную функцию

$$\underline{L}(y) = \inf_{x \in R^n} L(x, y).$$

Рассмотрим двойственную к задаче (1) задачу [3, 4]

$$\begin{cases} \underline{L}(y) \to \sup, \\ y \in \Omega^* = \{w \in R^m_+ : \ \underline{L}(w) > -\infty\}. \end{cases} \tag{2}$$

Двойственная задача, в отличие от прямой задачи (1), может быть неразрешимой [5].

Для любого вектора $v \in R^m$ обозначим через $\Omega_v$ множество

$$\Omega_v = \{x \in R^n : \ \mathrm{g}(x) \leqslant v\},$$

где $\mathrm{g}(x) = (\mathrm{g}^1(x), \ldots, \mathrm{g}^m(x))$. Если множество $\Omega_v$ непустое, то из компактности множества $\Omega$ вытекает компактность $\Omega_v$ [3].

На пространстве $R^n \times R^m \times R^m$ определим функцию

$$K(x, y, v) = \begin{cases} f(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} y_j v_j + \frac{r}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} v_j^2, \ \text{если } x \in \Omega_v, \\ +\infty, \ \text{в противном случае}, \end{cases}$$

где $r > 0$ — const.

Введем модифицированную функцию Лагранжа

$$M(x, y) = \inf_{v \in R^m} K(x, y, v).$$

Согласно определению функции $K(x, y, v)$ получаем

$$M(x, y) = \inf_{v \geqslant \mathrm{g}(x)} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{m} v_j^2 \right\} =$$

$$= f(x) + \frac{1}{2r} \inf_{v \geqslant \mathrm{g}(x)} \sum_{j=1}^{m} \left( (y_j + r v_j)^2 - y_j^2 \right) =$$

$$= f(x) + \frac{1}{2r}\sum_{j=1}^{m} \inf_{v_j \geqslant \mathrm{g}^j(x)} \left((y_j + rv_j)^2 - y_j^2\right) = f(x) + \frac{1}{2r}\sum_{j=1}^{m} \left(\left((y_j + rv_j)^+\right)^2 - y_j^2\right),$$

где $(y_j+rv_j)^+ = \max\{0, y_j+rv_j\}$.

Введем модифицированную двойственную функцию

$$\underline{M}(y) = \inf_{x \in R^n} M(x,y) = \inf_{x\in R^n} \inf_{v \in R^m} K(x,y,v).$$

Так как $\inf\limits_{x\in R^n}\inf\limits_{v\in R^m} K(x,y,v) = \inf\limits_{v\in R^m}\inf\limits_{x\in R^n} K(x,y,v)$, то

$$\underline{M}(y) = \inf_{v\in R^m} \inf_{\mathrm{g}(x)\leqslant v} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2 \right\} =$$

$$= \inf_{v\in R^m} \left\{ \chi(v) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2 \right\},$$

где функция чувствительности $\chi(v)$ имеет вид

$$\chi(v) = \begin{cases} \inf\limits_{\mathrm{g}(x)\leqslant v} f(x), & \text{если } \Omega_v \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом получаем две формы записи $\underline{M}(y)$:

$$\underline{M}(y) = \inf_{x\in R^n} \left\{ f(x) + \frac{1}{2r}\sum_{j=1}^{m} \left(\left((y_j + rv_j)^+\right)^2 - y_j^2\right) \right\}, \tag{3}$$

$$\underline{M}(y) = \inf_{v\in R^m} \left\{ \chi(v) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2 \right\}. \tag{4}$$

Рассмотрим модифицированную двойственную задачу

$$\begin{cases} \underline{M}(y) \to \sup, \\ y \in R^m. \end{cases} \tag{5}$$

Известно, что если существует решение задачи (2), то оно является и решением задачи (5), а функции $L(x,y)$ и $M(x,y)$ обладают одним и тем же множеством седловых точек [3, 6]. В отличие от функции $\underline{L}(y)$, функция $\underline{M}(y)$ всегда является дифференцируемой функцией.

Так как допустимое множество $\Omega$, по нашему предположению, является компактным множеством, то функция чувствительности $\chi(v)$ есть выпуклая, собственная, полунепрерывная снизу функция [7, 8].

Для произвольного фиксированного $y \in R^m$ рассмотрим функцию

$$F_y(v) = \chi(v) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2, \quad r > 0 - const.$$

Из полунепрерывности снизу функции чувствительности $\chi(v)$ вытекает и полунепрерывность снизу функции $F_y(v)$.

Так как функция $\chi(v)$ полунепрерывна снизу на $R^m$, то ее надграфик $\mathrm{epi}\chi = \{(v,\lambda)\in R^m\times R : \chi(v)\leqslant\lambda\}$ есть выпуклое замкнутое множество в $R^m\times R$. По теореме отделимости [8], существуют такие $\bar{v}\in R^m$ и $\bar{\lambda}\in R$, что

$$\chi(v)+\sum_{j=1}^{m}\bar{v}_j v_j+\bar{\lambda}\geqslant 0 \quad \forall\, v\in \mathrm{dom}\chi\equiv\{w\in R^m : \chi(v)<+\infty\}.$$

Следовательно, для функции $F_y(v)$ выполняется оценка

$$F_y(v)\geqslant -\sum_{j=1}^{m}\bar{v}_j v_j+\sum_{j=1}^{m}y_j v_j+\frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m}v_j^2-\bar{\lambda} \quad \forall\, v\in R^m.$$

Отсюда следует, что $F_y(v)\to+\infty$ при $\|v\|_{R^m}\to\infty$, т.е. функция $F_y(v)$ коэрцитивна на $R^m$.

Поскольку $F_y(v)$ является полунепрерывной снизу коэрцитивной функцией, то для любого вектора $y\in R^m$ существует элемент $v(y)=\arg\min\limits_{v\in R^m}F_y(v)$. Из сильной выпуклости $F_y(v)$ на $\mathrm{dom}\chi$ [9] вытекает, что элемент $v(y)$ единственный.

Сформулируем для двойственной функции $\underline{M}(y)$ важное утверждение, доказательство которого имеется в [7].

**Теорема 1.** *Функция $\underline{M}(y)$ дифференцируема на $R^m$, ее производная $\nabla\underline{M}(y)$ равна $v(y)=\arg\min\limits_{v\in R^m}F_y(v)$ и, более того,*

$$\|v(y')-v(y'')\|_{R^m}\leqslant\frac{1}{r}\|y'-y''\|_{R^m} \quad \forall\, y',y''\in R^m.$$

Из теоремы 1 следует, что производная двойственной функции $\underline{M}(y)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, равной $1/r$. Для решения двойственной задачи (5) используем градиентный метод

$$y^{k+1}=y^k+rv(y^k), \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{6}$$

$y^0\in R^m$ — произвольный вектор.

Нетрудно показать [7], что формула (6) может быть записана в виде

$$y^{k+1}=(y^k+r\mathrm{g}(x^{k+1}))^+,$$

где

$$x^{k+1}=\arg\min_{\mathrm{g}(x)\leqslant v(y^k)}f(x).$$

Для итерационного процесса (6) справедливо предельное соотношение [9, стр. 31]

$$\lim_{k\to\infty}\|v(y^k)\|_{R^m}=0. \tag{7}$$

**Теорема 2.** *Для модифицированного метода двойственности выполняется соотношение двойственности*

$$\sup_{v\in R^m}\underline{M}(y)=\inf_{x\in\Omega}f(x).$$

Доказательство. Используя форму (4) для двойственной функции при $k = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\underline{M}(y^k) \leqslant \chi(0) = \inf_{x \in \Omega} f(x).$$

Так как функция $\chi(v)$ полунепрерывна снизу на $R^m$, то из предельного равенства (7) следует соотношение $\varliminf_{k\to\infty} \chi(v(y^k)) \geqslant \chi(0)$. Выражение (4) можно переписать следующим образом:

$$\chi(v(y^k)) + \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{m} v_j^2(y^k) \leqslant \chi(0), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) \leqslant \chi(0) - \chi(v(y^k)) - \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{m} v_j^2(y^k), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

из которой следует оценка $\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) \leqslant 0$. Покажем, что на самом деле выполняется равенство $\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) = 0$.

Для доказательства данного равенства используем метод "от противного". Предположим, что $\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) = \delta < 0$. В этом случае можно подобрать такое число $\delta_1$, $\delta < \delta_1 < 0$, и такой номер $N$, что $\sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) < \delta_1$ для всех $k > N$. Тогда, используя (6), получаем

$$\|y^{k+1}\|^2_{R^m} = \|y^k + rv(y^k)\|^2_{R^m} = \|y^k\|^2_{R^m} + 2r \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) + r^2 \|v(y^k)\|^2_{R^m} \leqslant$$

$$\leqslant \|y^k\|^2_{R^m} + 2r\delta_1 + r^2 \|v(y^k)\|^2_{R^m}.$$

Из формулы (7) вытекает, что для достаточно больших номеров $k$ справедлива оценка

$$\|y^{k+1}\|^2_{R^m} \leqslant \|y^k\|^2_{R^m}.$$

В таком случае для предельных значений выполняется равенство

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) = 0.$$

Последнее противоречит сделанному ранее предположению $\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) = \delta < 0$. Следовательно, $\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) = 0$.

Выделим из последовательности $\{y^k\}$ подпоследовательность $\{y^{k_i}\}$ такую, что

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j^{k_i} v_j(y^{k_i}) = 0.$$

Последовательность $\{\underline{M}(y^k)\}$ является монотонно возрастающей [7], ограниченной сверху величиной $\chi(0) = \inf_{x\in\Omega} f(x)$. Отсюда следует

$$\chi(0) \geqslant \lim_{k\to\infty}\left(\chi(v(y^k)) + \sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2(y^k)\right) =$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left(\chi(v(y^{k_i})) + \sum_{j=1}^{m} y_j^{k_i} v_j(y^{k_i}) + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2(y^{k_i})\right) = \lim_{i\to\infty}\chi(v(y^{k_i})) \geqslant$$

$$\geqslant \chi(0) = \inf_{x\in\Omega} f(x).$$

Таким образом, для итерационного процесса (6) установлена сходимость по двойственному функционалу

$$\lim_{k\to\infty}\underline{M}(y^k) = \inf_{x\in\Omega} f(x).$$

Так как для всех $y^k$ выполняется

$$\underline{M}(y^k) \leqslant \sup_{y\in R^m}\underline{M}(y) \leqslant \inf_{x\in\Omega} f(x),$$

то из последнего равенства следует соотношение двойственности

$$\sup_{y\in R^m}\underline{M}(y) = \inf_{x\in\Omega} f(x).$$

□

*Замечание* 1. Для последовательности $\{y^{k_i}\}$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{m} y_j^{k_i} v_j(y^{k_i}) = 0,$$

верно равенство

$$\lim_{i\to\infty}\chi(v(y^{k_i})) = \inf_{x\in\Omega} f(x)$$

или, другими словами,

$$\lim_{i\to\infty} f(x^{k_i+1})) = \inf_{x\in\Omega} f(x),$$

где $x^{k_i+1} = \arg\min_{\mathrm{g}(x)\leqslant v(y^{k_i})} f(x)$ [3].

*Замечание* 2. Если задача (5) имеет решение, то последовательность $\{y^k\}$ ограничена в $R^m$. В таком случае из (7) следует, что $\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m} y_j^k v_j(y^k) = 0$ и, следовательно, итерационный процесс (6) сходится в смысле сходимости по функции задачи (1), т.е.

$$\lim_{k\to\infty}\chi(v(y^k)) = \lim_{k\to\infty} f(x^{k+1}) = \inf_{x\in\Omega} f(x),$$

где $x^{k+1} = \arg\min_{\mathrm{g}(x)\leqslant v(y^k)} f(x)$.

## 2. Схема двойственности для вариационного неравенства механики

Рассмотрим полукоэрцитивное вариационное неравенство Синьорини [1, 10]

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f\, v\, d\Omega \to \inf, \\ v \in K = \left\{ w \in H^1(\Omega) :\, -\gamma w \leqslant 0 \text{ на } \Gamma \right\}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\Omega \subset R^n$ $(n{=}2,\,3)$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma$, $f \in L_2(\Omega)$ — заданная функция и $\gamma v \in H^{1/2}(\Gamma)$ — след функции $v \in H^1(\Omega)$ на $\Gamma$.

Так как функционал $J(v)$ не является сильно выпуклым на $H^1(\Omega)$, то задача (8) может не иметь решения. Однако, если выполнено условие

$$\int\limits_{\Omega} f\, d\Omega < 0,$$

то задача (8) имеет единственное решение [10]. Ниже везде будем предполагать, что указанное условие выполнено.

В дальнейшем для простоты изложения в формулах будем опускать знак оператора следа $\gamma$.

Для произвольного $m \in L_2(\Gamma)$ введем множество

$$K_m = \left\{ v \in H^1(\Omega) :\, -v \leqslant m \text{ на } \Gamma \right\}$$

и определим функционал чувствительности

$$\tilde{\chi}(m) = \begin{cases} \inf\limits_{v \in K_m} J(v), & \text{если } K_m \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если функция $m$ принадлежит $L_2(\Gamma)$ и ограничена снизу на $\Gamma$, то соответствующее множество $K_m$ не является пустым и $\inf\limits_{v \in K_m} J(v) > -\infty$ [10].

Функционал чувствительности $\tilde{\chi}(m)$ является собственным выпуклым функционалом на $L_2(\Gamma)$, но его эффективная область $\mathrm{dom}\tilde{\chi} = \{m \in L_2(\Gamma)\colon\, \tilde{\chi}(m) < +\infty\}$ не совпадает с $L_2(\Gamma)$. Область $\mathrm{dom}\tilde{\chi}$ является выпуклым, но не замкнутым множеством в $L_2(\Gamma)$. При этом $\overline{\mathrm{dom}\tilde{\chi}} = L_2(\Gamma)$.

На пространстве $H^1(\Omega) \times L_2(\Gamma) \times L_2(\Gamma)$ определим функционал

$$\tilde{K}(v, l, m) = \begin{cases} J(v) + \int\limits_{\Gamma} l\, m\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma} m^2 d\Gamma, & \text{если } -v \leqslant m \text{ на } \Gamma, \\ +\infty, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

($r{>}0$ — const) и модифицированный функционал Лагранжа

$$\tilde{M}(v, l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma)} \tilde{K}(v, l, m) = \inf_{m \geqslant -v \text{ на } \Gamma} \left\{ J(v) + \int\limits_{\Gamma} l\, m\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma} m^2 d\Gamma \right\} =$$

$$= J(v) + \frac{1}{2r} \inf_{m \geqslant -v \text{ на } \Gamma} \int\limits_\Gamma \left( (l + r\,m)^2 - l^2 \right) d\Gamma = J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_\Gamma \left( \left( (l - r\,v)^+ \right)^2 - l^2 \right) d\Gamma.$$

Введем модифицированный двойственный функционал [10]

$$\underline{\tilde{M}}(l) = \inf_{v \in H^1(\Omega)} \tilde{M}(v,l) = \inf_{v \in H^1(\Omega)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_\Gamma \left( \left( (l - r\,v)^+ \right)^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\}. \qquad (9)$$

Так как справедливо равенство

$$\inf_{v \in H^1(\Omega)} \inf_{m \in L_2(\Gamma)} \tilde{K}(v,l,m) = \inf_{m \in L_2(\Gamma)} \inf_{v \in H^1(\Omega)} \tilde{K}(v,l,m),$$

то двойственный функционал может быть записан в следующем виде:

$$\underline{\tilde{M}}(l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma)} \left\{ \tilde{\chi}(m) + \int\limits_\Gamma l\,m\,d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_\Gamma m^2 d\Gamma \right\}. \qquad (10)$$

Построим двойственную к задаче (8) задачу

$$\begin{cases} \underline{\tilde{M}}(l) \to \sup, \\ l \in L_2(\Gamma). \end{cases} \qquad (11)$$

Для произвольного $l \in L_2(\Gamma)$ рассмотрим функционал

$$\tilde{F}_l(m) = \tilde{\chi}(m) + \int\limits_\Gamma l\,m\,d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_\Gamma m^2\,d\Gamma.$$

Так как $\tilde{\chi}(m)$ является слабо полунепрерывным снизу функционалом на $L_2(\Gamma)$, то и $\tilde{F}_l(m)$ является слабо полунепрерывным снизу функционалом. Надграфик функционала чувствительности $\mathrm{epi}\tilde{\chi} = \{(m,\lambda) \in L_2(\Gamma) \times R\colon\ \tilde{\chi}(m) \leqslant \lambda\}$ является выпуклым замкнутым множеством в $L_2(\Gamma) \times R$. Тогда из теоремы отделимости вытекает существование таких $\bar{m} \in L_2(\Gamma)$ и $\bar{\lambda} \in R$, что выполняется неравенство

$$\tilde{\chi}(m) + \int\limits_\Gamma \bar{m}\,m\,d\Gamma + \bar{\lambda} \geqslant 0 \quad \forall m \in \mathrm{dom}\tilde{\chi}.$$

Следовательно, для всех $m \in L_2(\Gamma)$ значение функционала $\tilde{F}_l(m)$ удовлетворяет условию

$$\tilde{F}_l(m) \geqslant -\int\limits_\Gamma \bar{m}\,m\,d\Gamma + \int\limits_\Gamma l\,m\,d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_\Gamma m^2\,d\Gamma - \bar{\lambda}.$$

Поэтому $\tilde{F}_l(m) \to +\infty$ при $\|m\|_{L_2(\Gamma)} \to \infty$, т.е. $\tilde{F}_l(m)$ коэрцитивен на $L_2(\Gamma)$.

Из слабой полунепрерывности снизу и коэрцитивности функционала $\tilde{F}_l(m)$ следует существование для любого $l \in L_2(\Gamma)$ элемента $m(l) = \arg \min\limits_{m \in L_2(\Gamma)} \tilde{F}_l(m)$. Нетрудно показать, что элемент $m(l)$ единственный.

Верно следующее утверждение [10].

**Теорема 3.** *Двойственный функционал* $\underline{\tilde{M}}(l)$ *является дифференцируемым по Гато в пространстве* $L_2(\Gamma)$ *и его производная* $\nabla\underline{\tilde{M}}(y)$ *совпадает с* $m(l)$. *Более того,* $m(l)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* $1/r$, *т.е.*

$$\|m(l') - m(l'')\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \frac{1}{r}\|l' - l''\|_{L_2(\Gamma)} \quad \forall\, l', l'' \in L_2(\Gamma).$$

Для решения задачи (11) используем градиентный метод

$$l^{k+1} = l^k + r\, m(l^k), \tag{12}$$

$l^0 \in L_2(\Gamma)$ — произвольный элемент.

В [10] показано, что формула (12) может быть преобразована к виду

$$l^{k+1} = (l^k - r\, v^{k+1})^+,$$

где $v^{k+1} = arg \min\limits_{-v \leqslant m(l^k) \text{ на } \Gamma} J(v)$.

Для процесса (12) так же, как и для процесса (6), доказывается предельное соотношение

$$\lim_{k\to+\infty} \|m(l^k)\|_{L_2(\Gamma)} = 0. \tag{13}$$

**Теорема 4.** *Справедливо соотношение двойственности*

$$\sup_{l\in L_2(\Gamma)} \underline{\tilde{M}}(l) = \inf_{v\in K} J(v).$$

Доказательство. Схема доказательства сходна с доказательством теоремы 2. Из формулы (10) вытекает, что значения функционала $\underline{\tilde{M}}(l^k)$ ограничены величиной $\tilde{\chi}(0)$,

$$\underline{\tilde{M}}(l^k) \leqslant \tilde{\chi}(0) = \inf_{v\in K} J(v), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Так как $\tilde{\chi}(m)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал на $L_2(\Gamma)$, то из (13) следует, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \tilde{\chi}(m(l^k)) \geqslant \tilde{\chi}(0).$$

В таком случае выражение (10) позволяет записать

$$\tilde{\chi}(m(l^k)) + \int\limits_\Gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma m^2(l^k)\, d\Gamma \leqslant \tilde{\chi}(0), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_\Gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma \leqslant \tilde{\chi}(0) - \tilde{\chi}(m(l^k)) - \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma m^2(k^k)\, d\Gamma, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, выполняется условие

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int\limits_\Gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma \leqslant 0.$$

Покажем, что данный предел равен нулю. Предположим противное, т.е.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int\limits_{\Gamma} l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = \delta < 0.$$

Тогда можно подобрать такое число $\delta_1$, $\delta < \delta_1 < 0$, и такой номер $N$, что для всех $k > N$ будет выполняться неравенство $\int\limits_{\Gamma} l^k\, m(l^k)\, d\Gamma < \delta_1$. Из (12) получаем

$$\|l^{k+1}\|^2_{L_2(\Gamma)} = \|l^k + r\, m(l^k)\|^2_{L_2(\Gamma)} = \|l^k\|^2_{L_2(\Gamma)} + 2r \int\limits_{\Gamma} l^k\, m(l^k)\, d\Gamma + r^2 \|m(l^k)\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant$$
$$\leqslant \|l^k\|^2_{L_2(\Gamma)} + 2r\delta_1 + r^2 \|m(l^k)\|^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Из (13) теперь вытекает, что для достаточно больших номеров $k$ справедлива оценка $\|l^{k+1}\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \|l^k\|_{L_2(\Gamma)}$. Тогда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int\limits_{\Gamma} l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Gamma} l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = 0.$$

Последнее противоречит сделанному ранее предположению. Таким образом доказано, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int\limits_{\Gamma} l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = 0.$$

Выделим из последовательности $\{l^k\}$ подпоследовательность $\{l^{k_i}\}$ такую, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int\limits_{\Gamma} l^k\ )\, d\Gamma = \lim_{i\to\infty} \int\limits_{\Gamma} l^{k_i}\, m(l^{k_i})\, d\Gamma = 0.$$

Последовательность $\{\underline{\tilde{M}}(l^k)\}$ является монотонно возрастающей [10] и ограниченной сверху величиной $\tilde{\chi}(0)$ последовательностью. Следовательно, справедлива оценка

$$\tilde{\chi}(0) \geqslant \lim_{k\to\infty} \left( \tilde{\chi}(m(l^k)) + \int\limits_{\Gamma} l^k\, m(l^k)\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma} m^2(l^k) d\Gamma \right) =$$
$$= \lim_{i\to\infty} \left( \tilde{\chi}(m(l^{k_i})) + \int\limits_{\Gamma} l^{k_i}\, m(l^{k_i})\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma} m^2(l^{k_i}) d\Gamma \right) =$$
$$= \lim_{i\to\infty} \tilde{\chi}(m(l^{k_i}) \geqslant \tilde{\chi}(0) = \inf_{v\in K} J(v).$$

Последнее означает, что

$$\lim_{k\to\infty} \underline{\tilde{M}}(l^k) = \inf_{v\in K} J(v).$$

Так как $\underline{\tilde{M}}(l^k) \leqslant \sup\limits_{l\in L_2(\Gamma)} \underline{\tilde{M}}(l) \leqslant \inf\limits_{v\in K} J(v)$, то получаем соотношение двойственности

$$\sup_{l\in L_2(\Gamma)} \underline{\tilde{M}}(l) = \inf_{v\in K} J(v).$$

□

*Замечание* 3. Для последовательности $\{l^{k_i}\}$, построенной при доказательстве теоремы 4, выполняется равенство

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{\chi}(m(l^{k_i})) = \inf_{v\in K} J(v),$$

или, другими словами [10, 11],

$$\lim_{i\to\infty} J(v^{k_i+1}) = \inf_{v\in K} J(v),$$

где

$$v^{k_i+1} = \arg \min_{-v\leqslant m(l^{k_i}) \text{ на } \Gamma} J(v).$$

*Замечание* 4. Если двойственная задача (11) разрешима, то последовательность $\{l^k\}$ ограничена в пространстве $L_2(\Gamma)$. Ограниченность $\{l^k\}$ и равенство (13) обеспечивают справедливость $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_\Gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = 0$. Из последнего равенства вытекает сходимость итерационного процесса (12) по функционалу задачи (8), т.е.

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{\chi}(m(l^k)) = \lim_{i\to\infty} J(v^{k+1}) = \inf_{v\in K} J(v),$$

где

$$v^{k+1} = \arg \min_{-v\leqslant m(l^k) \text{ на } \Gamma} J(v).$$

## Список литературы

[1] А. М. Хлуднев, *Задачи теории упругости в негладких областях*, Физматлит, М., 2010.

[2] Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм, “О методе двойственности для решения модельной задачи с трещиной”, *Тр. ин-та матем. и мех. УрО РАН*, **22**:1, (2016), 36–43.

[3] К. Гроссман, А. А. Каплан, *Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации*, Наука, Новосибирск, 1981.

[4] И. В. Коннов, *Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства*, Изд-во Казанского гос. ун-та, Казань, 2013.

[5] Э. А. Мухачева, Г. И. Рубинштейн, *Математическое программирование*, Наука, Новосибирск, 1987.

[6] Е. Г. Гольштейн, Н. В. Третьяков, *Модифицированные функции Лагранжа*, Наука, М., 1989.

[7] А. В. Жильцов, Р. В. Намм, “Метод множителей Лагранжа в задаче конечномерного выпуклого программирования”, *Дальневост. матем. журн.*, **15**:1, (2015), 53–60.

[8] Р. В. Намм, Э. М. Вихтенко, *Методы выпуклой оптимизации: учебное пособие*, Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, Хабаровск, 2017.

[9] Б. Т. Поляк, *Введение в оптимизацию*, Наука, М, 1983.

[10] Э. В. Вихтенко, Н. Н. Максимова, Р. В. Намм, “Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемам двойственности”, *Сибирский ж. вычисл. матем.*, **17**:1, (2014), 43–52.

[11] Robert V. Namm, Gyungsoo Woo, “Sensitivity functionals in convex optimization problem”, *Filomat*, **30**:14, (2016), 3681-3687.

Поступила в редакцию
15 июля 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00682A) и Тихоокеанского государственного университета (проект 3.16 - НГ ТОГУ).

*Vikhtenko E. M., Woo G., Namm R. V.* Modified dual scheme for finite-dimensional and infinite-dimensional convex optimization problems. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 2. P. 158–169.

ABSTRACT

We consider modified duality methods for the finite0dimensional convex optimization problem and the semi-coercive Signorini problem. Duality relations for the direct and dual problems are given without assuming the solvability of dual problem.

Key words: *variational inequality, convex optimization, Signorini problem, sensitivity functional, Lagrange functional, dual functional.*