

УДК 539.373, 514.763.25

MSC2010 51P05, 74B20

© С. А. Лычев<sup>1</sup>, К. Г. Койфман<sup>2</sup>

## Геометрические аспекты теории несовместных деформаций простых структурно неоднородных тел переменного материального состава

Настоящая статья посвящена формализации мер деформаций в неевклидовых пространствах для простого тела. Привлечение положений неевклидовой геометрии позволяет: i) определить глобальную единообразную отсчетную форму для тел со структурной неоднородностью, вызванной послойным созданием тела в ходе аддитивного процесса; ii) определить глобальную актуальную форму для тел в неевклидовом физическом пространстве, в частности, двумерных объектов на материальных поверхностях. В работе сформулированы соотношения для мер деформаций, порождаемых вложениями риманова многообразия, формализующего простое тело, в риманово многообразие, формализующее пространство. Предложен способ описания деформируемого тела переменного материального состава как семейства римановых многообразий, над которым определены операции разбиения и соединения, характеризующие структурные особенности неоднородностей, задаваемых сценарием аддитивного технологического процесса. Рассмотрены случаи дискретной и непрерывной структурной неоднородности. Предложена процедура синтезирования материальной метрики по семейству локальных конфигураций. Определен оператор вложения. С его помощью устанавливается взаимосвязь классического градиента деформации и касательного отображения, определенного над гладким многообразием, представляющим форму тела. На примере структурно неоднородного цилиндра из несжимаемого материала показаны особенности предлагаемого подхода к описанию несовместных деформаций.

Ключевые слова: *несовместные деформации, меры деформаций, остаточные напряжения, материальное многообразие, неевклидова геометрия.*

### Введение

1°. Неевклидова геометрия, сформировавшаяся в работах математиков XIX века, многократно приносила пользу при решении задач теоретической физики и механики континуума [1–5]. Последняя, как известно, оперирует с фундаментальным

<sup>1</sup> Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526, г. Москва, пр. Вернадского, 101, корп. 1.

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5/1.

Электронная почта: lychevsa@mail.ru (С. А. Лычев), koifman.bmstu@yandex.ru (К. Г. Койфман).

понятием — телом, — которое в ряде задач удобно представить как часть неевклидова пространства (обзор работ по этой тематике приведен в [6]). Известно, что неевклидовость пространства, моделирующего тело, и несовместность деформаций, возникающая в теле либо в силу дефектной структуры, либо по причине последовательного создания в ходе технологического процесса, тесно связаны между собой [7–13]. Тела подобного рода будем называть *структурно неоднородными* (structurally inhomogeneous). Меры отличия их внутренней геометрии от евклидовой, такие как кручение, кривизна и неметричность определенной на них материальной связности, оказываются удобными величинами для формулировки нелинейных краевых задач, характеризующих отклик структурно неоднородных тел на внешние воздействия и их собственное неоднородное напряженное состояние. Естественным языком для постановки и исследования таких задач является язык современной дифференциальной геометрии и теории гладких многообразий. Именно он позволяет сформулировать уравнения и краевые условия в форме, не ограниченной рамками евклидовой геометрии, которые традиционно подразумеваются в основах классической механики деформируемого твердого тела. Несмотря на то, что современному дифференциально-геометрическому подходу в физике и механике континуума посвящены ряд монографий [3, 4, 7, 14] и постоянно увеличивающееся число статей [9, 15–20], основные его положения пока нельзя считать устоявшимися, особенно в приложении к технологическим задачам.

Авторы настоящей работы используют результаты [6] и имеют своей целью построение мер деформаций для структурно неоднородных тел, материал которых прост (т.е. локально отклик зависит только от первого градиента деформаций [21, с. 60]); предполагается, что деформации являются вложениями тела в физическое пространство<sup>2</sup>, которое в общем случае неевклидово (о прикладных аспектах задач для материальных поверхностей в неевклидовом физическом пространстве см. [6]). Общие построения иллюстрируются задачами дискретного и непрерывного роста конечного цилиндра, структурная неоднородность в котором обусловлена послойной усадкой материала в процессе его создания.

2°. Геометрический подход, развиваемый в настоящей работе, так же, как и нелинейные краевые задачи для цилиндрических структурно неоднородных тел, актуален для развития методов расчета остаточных напряжений и искажений формы послойно создаваемых микроструктур в ходе процессов литографии полупроводниковых структур [22], LbL процессинга [23], самоорганизующейся сборки (Self-Assembling) [24]. Во всех этих процессах характерный размер элементов достаточно мал — порядка долей микрона, — что делает всю структуру в целом чувствительной к полям собственных напряжений, вызванных структурной неоднородностью.

3°. Далее используются обозначения, согласованные с принятыми в [6]. Так, символ  $\mathfrak{B}$  всюду обозначает тело, представленное  $C^r$ -многообразием размерности  $n$ . Физическое пространство обозначается символом  $\mathfrak{F}$  и с общих позиций рассматривается как  $C^r$ -многообразие размерности  $m$ , имеющее дополнительную структуру риманова пространства. Предполагается, что  $n \leq m \leq 3$  и  $r \geq 1$  [6].

<sup>2</sup>Физическое пространство формализует абстрактную «лабораторию», снабженную «приборами» для наблюдения позиций материальных точек.

Знакосочетание  $\mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{F})$  обозначает множество всех  $C^r$ -вложений гладкого многообразия  $\mathfrak{B}$  в гладкое многообразие  $\mathfrak{F}$ . Любое такое вложение называется регулярной конфигурацией, или просто конфигурацией.

Символ  $\mathcal{E}$  обозначает  $m$ -мерное евклидово аффинное пространство с ассоциированным векторным пространством  $\mathcal{V}$ . В  $\mathcal{E}$  выбран ортонормированный репер  $(O, (\mathbf{i}_s)_{s=1}^m)$ , где  $\mathbf{i}_p \cdot \mathbf{i}_s = \delta_{ps}$ , с началом в точке  $O$ .

## 1. Конфигурации и деформации

4°. В рамках статьи полагаем, что тело  $\mathfrak{B}$  и физическое пространство  $\mathfrak{F}$  формализуются как  $C^r$ -многообразия (с фиксированными  $C^r$ -структурами), размерности которых, в общем случае, различны<sup>3</sup>;  $\dim \mathfrak{B} = n$ ,  $\dim \mathfrak{F} = m$ , причем значение  $r \geq 1$  таково, что все соотношения, используемые далее, имеют смысл.

Любой атлас  $A_{\mathfrak{B}}$ , принадлежащий выбранной  $C^r$ -структуре на теле  $\mathfrak{B}$ , представлен некоторым семейством карт, т.е.  $A_{\mathfrak{B}} = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in I}$ . Здесь  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  — открытое покрытие  $\mathfrak{B}$ , а  $\varphi_{\alpha}$  — картирующие отображения, являющиеся гомеоморфизмами  $\mathbb{R}^n$  на  $U_{\alpha}$  (см. [25], или [6], п. 14°), т.е.  $\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha}$ , а  $\varphi_{\alpha}: \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\alpha}$ . Локальные координаты, порождаемые картами из  $A_{\mathfrak{B}}$ , будем обозначать символами  $\mathfrak{X}^{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ .

Произвольный атлас  $A_{\mathfrak{F}}$  выбранной  $C^r$ -структуры на  $\mathfrak{F}$  представлен семейством  $C^r$ -согласованных карт;  $A_{\mathfrak{F}} = \{(V_{\beta}, \psi_{\beta})\}_{\beta \in J}$ , где  $\{V_{\beta}\}_{\beta \in J}$  — открытое покрытие  $\mathfrak{F}$ , а  $\psi_{\beta}$  — картирующие отображения, являющиеся гомеоморфизмами  $\mathbb{R}^m$  на  $V_{\beta}$ , т.е.  $\mathfrak{F} = \bigcup_{\beta \in J} V_{\beta}$ , а  $\psi_{\beta}: \mathbb{R}^m \rightarrow V_{\beta}$ . Локальные координаты, порождаемые картами из  $A_{\mathfrak{F}}$ , обозначаются символами  $X^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Если физическое пространство обладает аффинно-евклидовой структурой (т.е. представлено упорядоченной парой  $(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ , состоящей из точечного  $\mathcal{E}$  и трансляционного  $\mathcal{V}$  пространств), то минимальный атлас  $A_{\mathcal{E}}^{\min}$  состоит из одной карты  $(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{-1})$ , где  $\mathcal{D}$  — декартово картирование (см. [6], п. 24°):

$$\forall A \in \mathcal{E}: \quad \mathcal{D}(A) := ((A - O) \cdot \mathbf{i}_k)_{k=1}^m. \tag{1}$$

Здесь  $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^m$  — ортонормированный базис  $\mathcal{V}$ , а  $O$  — начало декартовой системы координат. Заметим, что использование криволинейных координат в  $(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ , технически удобное во многих случаях, сводится к расширению  $(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{-1})$ , т.е. добавлению новых карт  $(V_{\beta}, \psi_{\beta})$ , картирующие отображения которых,  $\psi_{\beta}$ , определяют т.н. криволинейные координаты. Разумеется, при их добавлении должна соблюдаться  $C^r$ -согласованность.

5°. Наблюдаемый образ тела в физическом пространстве — его форма — определяется конфигурацией  $\varkappa: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{F}$ , которую будем полагать  $C^r$ -вложением (см. [6], п. 27°). Вместе с  $\varkappa$  будем использовать отображение  $\widehat{\varkappa}$ , которое получается из  $\varkappa$

<sup>3</sup>Далее греческие индексы во всех выражениях, содержащих координаты и компоненты, пробегают значения от 1 до  $n$ , а латинские — от 1 до  $m$ .

сужением области прибытия до области значений<sup>4</sup> [26]:

$$\widehat{\varkappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \varkappa(\mathfrak{B}), \quad \mathfrak{X} \mapsto \varkappa(\mathfrak{X}).$$

Так как  $\varkappa$  — гладкое вложение, то  $\widehat{\varkappa}$  — гомеоморфизм. Это позволяет вести речь об обратном отображении  $\widehat{\varkappa}^{-1}$ .

*Замечание 1.* Образ  $C^r$ -вложения  $\varkappa$  наделяется структурой  $n$ -мерного  $C^r$ -многообразия, которая порождается  $C^r$ -атласом  $A_\varkappa = \{(\varkappa(U_\alpha), \widehat{\varkappa} \circ \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ , где  $A_\mathfrak{B} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  — атлас на теле  $\mathfrak{B}$ . Пространство  $\varkappa(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{P}$ , при этом, рассматривается как подпространство<sup>5</sup>  $\mathfrak{P}$ . Тогда  $C^r$ -структуры на  $\varkappa(\mathfrak{B})$  и  $\mathfrak{P}$  связаны между собой следующим образом [28]: каноническая инъекция

$$j_{\varkappa(\mathfrak{B})} : \varkappa(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{P}, \quad X \mapsto X,$$

является  $C^r$ -вложением. Таким образом, пространство  $\varkappa(\mathfrak{B})$  является  $n$ -мерным  $C^r$ -подмногообразием  $\mathfrak{P}$  [28], которое далее будем называть *формой тела*  $\mathfrak{B}$  относительно конфигурации  $\varkappa$ .

Евклидовы представления континуальной механики, как правило, используют две конфигурации: отсчетную,  $\varkappa_R$ , и актуальную,  $\varkappa_t$ . Им соответствуют две формы: отсчетная,  $\varkappa_R(\mathfrak{B})$ , и актуальная,  $\varkappa_t(\mathfrak{B})$ . Эти рассуждения легко переносятся на используемый в настоящей работе язык гладких многообразий. Рассматриваются четыре отображения

$$\begin{aligned} \varkappa_R : \mathfrak{B} &\rightarrow \mathfrak{P}, & \varkappa_t : \mathfrak{B} &\rightarrow \mathfrak{P}, \\ \widehat{\varkappa}_R : \mathfrak{B} &\rightarrow \varkappa_R(\mathfrak{B}), & \widehat{\varkappa}_t : \mathfrak{B} &\rightarrow \varkappa_t(\mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Если физическое пространство  $\mathfrak{P}$  обладает аффинно-евклидовой структурой, то в этих соотношениях  $\mathfrak{P}$  следует заменить на  $\mathcal{E}$ . Преобразования векторизации и арифметизации  $\mathcal{E}$  (см. [6], п. 24°) позволяют определить отображения со значениями в  $\mathcal{V}$  или  $\mathbb{R}^m$ , соответствующие конфигурациям  $\varkappa_R$  и  $\varkappa_t$ . Следуя традиционным обозначениям, будем использовать для значений отображения  $\varkappa_R$  символ  $X$ , а для значения  $\varkappa_t$  — символ  $x$ . В случае аффинно-евклидова пространства им будут соответствовать трансляционные векторы  $\mathbf{X}, \mathbf{x} \in \mathcal{V}$ .

Далее используются обозначения  $\mathcal{S}_R = \varkappa_R(\mathfrak{B})$  и  $\mathcal{S}_t = \varkappa_t(\mathfrak{B})$ . Композиции сужений конфигураций

$$\gamma = \widehat{\varkappa}_t \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_t, \quad \gamma^{-1} = \widehat{\varkappa}_R \circ \widehat{\varkappa}_t^{-1} : \mathcal{S}_t \rightarrow \mathcal{S}_R,$$

определяют *прямую* и *обратную деформацию* формы  $\mathcal{S}_R$  в  $\mathcal{S}_t$  [29, 30].

6°. Пусть  $\chi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  обозначает либо конфигурации  $\varkappa_R, \varkappa_t$ , либо деформации  $\gamma, \gamma^{-1}$ , а  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  — соответствующие гладкие многообразия. Отображению  $\chi$  соответствует касательное отображение [28]

$$T\chi : T\mathfrak{M} \rightarrow T\mathfrak{N}, \tag{2}$$

<sup>4</sup>Отображение  $f : X \rightarrow Y$  представляет собой упорядоченную тройку  $f = (X, F, Y)$ , где  $X$  — область определения отображения,  $Y$  — область прибытия, а  $F$  — функциональное отношение, область определения которого —  $X$  [26]. Отображения  $\varkappa$  и  $\widehat{\varkappa}$  являются различными, так как имеют различные области прибытия.

<sup>5</sup>Индукционная топология на  $\varkappa(\mathfrak{B})$  определяется как совокупность всевозможных пересечений вида  $O \cap \varkappa(\mathfrak{B})$ , где  $O$  — открытые подмножества  $\mathfrak{P}$  [27].

действующее между касательными расслоениями  $T\mathfrak{M}$  и  $T\mathfrak{N}$ . Сужение этого отображения на слой — касательное пространство — определяет линейный оператор:

$$T_Z\chi := T\chi|_{T_Z\mathfrak{M}} : T_Z\mathfrak{M} \rightarrow T_Z\mathfrak{N}, \quad (3)$$

где  $Z \in \mathfrak{M}$  и  $z = \chi(Z)$ . Здесь в целях сокращения записи мы использовали единые обозначения  $Z$  и  $z$  для точек многообразий, представляющих либо тело, либо формы тела, либо физическое пространство.

Оператору (3) соответствуют представление в виде билинейной формы

$$T_Z\chi = \left. \frac{\partial z^i}{\partial Z^j} \right|_{\varphi^{-1}(Z)} \partial_{z^i}|_{\chi(Z)} \otimes dZ^j|_Z, \quad (4)$$

где  $(Z^j)_{j=1}^{\dim \mathfrak{M}}$  — локальные координаты на  $\mathfrak{M}$ ,  $(z^i)_{i=1}^{\dim \mathfrak{N}}$  — локальные координаты на  $\mathfrak{N}$ ,  $\varphi$  — картрирующее отображение, действующее в окрестности точки  $Z$ ;  $(\partial_{Z^j})_{j=1}^{\dim \mathfrak{M}}$  — поле координатных реперов<sup>6</sup> на  $\mathfrak{M}$ ,  $(\partial_{z^i})_{i=1}^{\dim \mathfrak{N}}$  — поле координатных реперов на  $\mathfrak{N}$ , а  $(dZ^j)_{j=1}^{\dim \mathfrak{M}}$  и  $(dz^i)_{i=1}^{\dim \mathfrak{N}}$  — соответствующие поля дуальных реперов (кореперов); отображения

$$(Z^1, \dots, Z^{\dim \mathfrak{M}}) \mapsto z^i(Z^1, \dots, Z^{\dim \mathfrak{M}}), \quad i = 1, \dots, \dim \mathfrak{N},$$

являются координатными отображениями, соответствующими  $\chi$ .

Соотношения (2)–(4) представляют *градиент конфигурации*, при  $\chi = \varkappa \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$ , и *градиент деформации*, при  $\chi = \gamma$ . Следует подчеркнуть, что в общем случае градиенты конфигурации и деформации не несут никакой метрической информации и содержат произвол, связанный с выбором картрирующих отображений. Исключение составляет случай евклидова физического пространства, в котором имеется выделенная декартова карта, по определению связанная с выделенной декартовой метрикой соотношениями  $\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_s = \delta_{ks}$ .

7°. Форма  $\mathcal{S} = \varkappa(\mathfrak{B})$  тела  $\mathfrak{B}$  рассматривается как отдельное  $n$ -мерное  $C^r$ -многообразиие, связанное с  $\mathfrak{P}$  посредством канонической инъекции  $j_S : \mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{P}$ , действующей по правилу:  $X \mapsto X$  и являющейся  $C^r$ -вложением. При этом между касательными пространствами  $T_X\mathcal{S}$  и  $T_X\mathfrak{P}$  в точке  $X \in \mathcal{S}$  имеется связь, которая обеспечивается касательным отображением  $T_X j_S$ . Оно инъективно, так как  $j_S$  является  $C^r$ -вложением и размерность его образа,  $T_X j_S(T_X\mathcal{S})$ , равна  $n$ . Отображение

$$\text{In}_{S; X} := T_X j_S : T_X\mathcal{S} \rightarrow T_X\mathfrak{P} \quad (5)$$

называется далее *оператором вложения* в точке  $X \in \mathcal{S}$ . Семейство  $\{\text{In}_{S; X}\}_{X \in \mathcal{S}}$  порождает отображение  $\text{In}_S := T j_S : T\mathcal{S} \rightarrow T\mathfrak{P}$  между касательными расслоениями.

С физической точки зрения, оператор вложения связывает внутренние поля (intrinsic fields, по Ноллу [31]), задаваемые на формах, с полями, значения которых наблюдаемы в физическом пространстве. Например, сечение  $u : \mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{S}$  касательного расслоения  $T\mathcal{S}$  есть внутреннее векторное поле. Действие на него оператора

<sup>6</sup>Значения полей реперов и кореперов в точках многообразий обозначаются вертикальной чертой с указанием значения аргумента:  $Z \mapsto \partial_{Z^j}|_Z$ ,  $Z \mapsto dZ^j|_Z$  и т.д.

вложения, или, свертка<sup>7</sup>  $\mathbf{u} = \text{In}_{\mathcal{S}} \lrcorner u$ , дает векторное поле  $\mathbf{u} : \mathcal{S} \rightarrow T\mathfrak{B}$ , значения которого можно измерить.

В случае  $\mathfrak{B} = \mathcal{E}$  с точностью до изоморфизма  $T_X \mathcal{E} \cong \mathcal{V}$  можно записать, что

$$\text{In}_{\mathcal{S}; X} = T_X j_{\mathcal{S}} : T_X \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}.$$

Если на  $\mathcal{E}$  выбрано декартово картирование  $(X^i)_{i=1}^m$ , то оператор вложения (5) в точке  $X \in \mathcal{S}$  может быть представлен в виде диадного разложения

$$\text{In}_{\mathcal{S}; X} = \left. \frac{\partial X^k}{\partial Z^\alpha} \right|_{\sigma^{-1}(X)} \mathbf{i}_k \otimes dZ^\alpha|_X, \quad (6)$$

где  $(X^1, \dots, X^m) = \mathcal{D} \circ j_{\mathcal{S}} \circ \sigma(Z^1, \dots, Z^n)$  — координатное представление  $j_{\mathcal{S}}$ , в котором  $\sigma$  — картирующее отображение на  $\mathcal{S}$ . Тогда можно определить векторное поле

$$\mathbf{E}_\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}, \quad X \mapsto \mathbf{E}_\alpha|_X := \text{In}_{\mathcal{S}; X} \lrcorner \partial_{Z^\alpha}|_X = \left. \frac{\partial X^k}{\partial Z^\alpha} \right|_{\sigma^{-1}(X)} \mathbf{i}_k. \quad (7)$$

Символически  $\mathbf{E}_\alpha = \text{In}_{\mathcal{S}} \lrcorner \partial_{Z^\alpha}$ . Но поле  $(\mathbf{E}_\alpha)_{\alpha=1}^n$ , в рамках классической интерпретации, есть не что иное, как поле реперов локальной криволинейной системы координат  $(Z^\alpha)_{\alpha=1}^n$ , заданной на множестве  $\mathcal{S}$ . Таким образом, действие оператора вложения на элемент координатного репера дает *евклидов* вектор локального базиса криволинейной системы координат  $(Z^\alpha)$ ; абстрактный вектор  $\partial_{Z^\alpha}|_X$  становится наблюдаемым вектором  $\mathbf{E}_\alpha|_X$ .

8°. Соображения предыдущего пункта позволяют установить связь между определением градиента деформации, сформулированным в п. 6°, и его классическим аналогом. Пусть  $m=n$ , а  $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_t$  — деформация тела  $\mathfrak{B}$  в физическом пространстве  $\mathcal{E}$ . Согласно классической теории упругости, градиент деформации,  $\mathbf{F}$ , есть производная [32] отображения  $\gamma$ , имеющая область определения открытое множество  $\mathcal{S}_R$ , т.е.  $\mathbf{F} = \gamma'$ . В репере  $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^m$  линейное отображение  $\mathbf{F}_X = \gamma'(X)$  имеет следующее диадное представление:

$$\mathbf{F}_X = \left. \frac{\partial x^k}{\partial X^j} \right|_{(X^1, \dots, X^m)} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}^j, \quad (8)$$

где  $(X^i)_{i=1}^m, (x^i)_{i=1}^m$  — декартовы координаты точек отсчетной и актуальной форм,  $(X^1, \dots, X^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m) = \mathcal{D} \circ \gamma \circ \mathcal{D}^{-1}(X^1, \dots, X^m)$  — координатное представление  $\gamma$ , а векторы  $\mathbf{i}^k$  определяются из условий  $\mathbf{i}^k \cdot \mathbf{i}_s = \delta_s^k$ .

*Замечание 2.* В пределах настоящего пункта для диадного представления в евклидовом пространстве используется символ  $\otimes$ , чтобы подчеркнуть отличие от общей конструкции тензорного произведения  $\otimes$ . В классической механике диада  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  (линейное отображение из  $\mathcal{V}$  в  $\mathcal{V}$ ) определяется по действию [33], т.е.

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} := (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}.$$

<sup>7</sup>В работе используются билинейные операции свертки  $\lrcorner$  и  $\lrcorner$ , действующие на диадах по правилу

$$\lrcorner : (\mathbf{u} \otimes \vartheta, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \otimes \vartheta \lrcorner \mathbf{v} = \langle \vartheta, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}, \quad \lrcorner : (\mathbf{v}, \vartheta \otimes \mathbf{u}) \mapsto \mathbf{v} \lrcorner \vartheta \otimes \mathbf{u} = \langle \vartheta, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}.$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — гладкое сечение некоторого расслоения, а  $\mathbf{v}, \vartheta$  — векторное и ковекторное поля.

Декартову арифметизацию  $\mathcal{D}$  можно сузить на каждую из форм  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_t$  и получить атласы, состоящие из одной карты. Согласно (4), в котором нужно положить  $\chi = \gamma, Z^i = X^i$  и  $z^i = x^i$ , получаем диадное представление

$$T_X\gamma = \left. \frac{\partial x^k}{\partial X^j} \right|_{(X^1, \dots, X^m)} \partial_{X^k}|_x \otimes dX^j|_X.$$

Соотношение (6) в этом случае имеет вид  $\text{In}_{\mathcal{S}; X} = \mathbf{i}_k \otimes dX^k|_X$ . Следовательно,

$$\text{In}_{\mathcal{S}_t; x} \circ T_X\gamma \circ \text{In}_{\mathcal{S}_R; X}^{-1} = \left. \frac{\partial x^k}{\partial X^j} \right|_{(X^1, \dots, X^m)} \mathbf{i}_k \otimes i^j \approx \left. \frac{\partial x^k}{\partial X^j} \right|_{(X^1, \dots, X^m)} \mathbf{i}_k \circ i^j = \mathbf{F}_X. \quad (9)$$

Слева от знака  $\approx$  в диадном разложении присутствует элемент корепера  $(i^k)_{k=1}^m$  к  $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^m$ , а справа — элемент дуального векторного репера  $(i^k)_{k=1}^m$ . Такое различие обусловлено евклидовой структурой объемлющего пространства. Когда рассматривается действие билинейной формы  $T_X\gamma$  на вектор, то оно осуществляется с помощью операции  $\lrcorner: T_X\gamma \lrcorner u$ , что приводит к каноническому спариванию этого вектора с соответствующим *ковектором* в диадном произведении. При этом евклидова структура не используется. Однако билинейная форма  $\mathbf{F}_X$ , согласно классической механике континуума, действует на вектор с помощью операции свертки  $(\cdot): \mathbf{F}_X \cdot \mathbf{u}$ , что приводит к скалярному произведению этого вектора с соответствующим *вектором* в диадном произведении.

Выберем в  $\mathcal{S}_R$  локальные координаты  $(Z^i)_{i=1}^m$  и «вморозим» их в форму. Математически это означает, что между картирующими отображениями на  $\mathcal{S}_R$  и  $\mathcal{S}_t$  выполнено соотношение  $\sigma_t = \gamma \circ \sigma_R$ . Операторы вложения в таком случае будут представлены следующими разложениями:

$$\text{In}_{\mathcal{S}_R; X} = \left. \frac{\partial X^k}{\partial Z^j} \right|_{(Z^1, \dots, Z^m)} \mathbf{i}_k \otimes dZ^j|_X, \quad \text{In}_{\mathcal{S}_t; x} = \left. \frac{\partial x^k}{\partial Z^j} \right|_{(Z^1, \dots, Z^m)} \mathbf{i}_k \otimes dZ^j|_x.$$

Векторы локального базиса на  $\mathcal{S}_R$  и  $\mathcal{S}_t$  обозначим через  $\mathbf{E}_k$  и  $\mathbf{e}_k$ :

$$\mathbf{E}_k = \frac{\partial X^j}{\partial Z^k} \mathbf{i}_j, \quad \mathbf{E}^k = \frac{\partial Z^k}{\partial X^j} \mathbf{i}^j, \quad \mathbf{e}_k = \frac{\partial x^j}{\partial Z^k} \mathbf{i}_j, \quad \mathbf{e}^k = \frac{\partial Z^k}{\partial x^j} \mathbf{i}^j.$$

Тогда из формулы (8) и цепного правила дифференцирования получаем классическую формулу для  $\mathbf{F}_X$  [33]:  $\mathbf{F}_X = \mathbf{e}_k|_x \circ \mathbf{E}^k|_X$ . Выражение для  $T_X\gamma$  принимает вид  $T_X\gamma = \partial_{Z^k}|_x \otimes dZ^k|_X$ , так как координатное представление  $\tilde{\gamma} = \sigma_t^{-1} \circ \gamma \circ \sigma_R$  является тождественным отображением. В таком случае получаем

$$\begin{aligned} \text{In}_{\mathcal{S}_t; x} \circ T_X\gamma \circ \text{In}_{\mathcal{S}_R; X}^{-1} &= \left. \frac{\partial Z^k}{\partial X^j} \right|_{(X^1, \dots, X^m)} \mathbf{e}_k|_x \otimes i^j = \mathbf{e}_k|_x \otimes \mathbf{E}^k|_X \approx \\ &\approx \mathbf{e}_k|_x \circ \mathbf{E}^k|_X = \mathbf{F}_X. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $i^j \in \mathcal{V}^*$  — элемент дуального к  $(\mathbf{i}_k)$  репера.

*Замечание 3.* В терминах одной операции  $\otimes$  взаимосвязь отображений  $T_X\gamma$  и  $\mathbf{F}_X$  обеспечивается формулой

$$\mathbf{F}_X = \text{In}_{\mathcal{S}_t; x} \circ T_X\gamma \circ \text{In}_{\mathcal{S}_R; X}^{-1}. \quad (11)$$

9°. Метрическая информация — результат измерения — требует для своего определения **i)** объект измерения; **ii)** способ измерения; **iii)** калибровку. Находясь в рамках классических идей континуальной механики, определим в качестве объекта измерения — физические образы материальных волокон, в качестве способа измерения — сравнение инфинитезимальных элементов образов материальных волокон как элементов касательного расслоения физического пространства  $\mathfrak{F}$ , используя для калибровки метрику, заданную на  $\mathfrak{F}$ . Поясним это подробнее.

Под материальным волокном — основным «структурным элементом» — тела будем понимать образ гладкой кривой на  $\mathfrak{B}$ , т.е. множество материальных точек  $\chi(\mathbb{I})$ , где  $\mathbb{I} = ]-a, a[ \subset \mathbb{R}$ , а  $\chi: \mathbb{I} \rightarrow \mathfrak{B}$  — гладкая кривая (для единообразия полагаем, что ее порядок гладкости равен  $r$ ). Образы материальных волокон относительно конфигураций — наблюдаемые в  $\mathfrak{F}$  одномерные многообразия  $\chi_R(\mathbb{I})$  и  $\chi_t(\mathbb{I})$ , где

$$\chi_R = \widehat{\chi}_R \circ \chi: \mathbb{I} \rightarrow \varkappa_R(\mathfrak{B}), \quad \chi_t = \widehat{\chi}_t \circ \chi: \mathbb{I} \rightarrow \varkappa_t(\mathfrak{B}).$$

Именно они являются объектами измерений. Поскольку  $\chi_t = \gamma \circ \chi_R$  и  $\chi_R = \gamma^{-1} \circ \chi_t$ , то можно говорить о деформации волокна  $\chi_R(\mathbb{I})$  в волокно  $\chi_t(\mathbb{I})$  и обратно. Инфинитезимальный анализ этих отображений приводит к касательным отображениям

$$T(\gamma \circ \chi_R) = (T\gamma) \circ (T\chi_R), \quad \text{или} \quad T(\gamma^{-1} \circ \chi_t) = (T\gamma^{-1}) \circ (T\chi_t),$$

где  $T\gamma, T\gamma^{-1}$  — касательные отображения к прямой и обратной деформациям. Таким образом, в рамках принятых гипотез и приближений, средство измерения — «прибор» — различает  $T\gamma$  (или  $T\gamma^{-1}$ ), а для его калибровки следует задать метрику на  $\chi_R(\mathbb{I})$  (или на  $\chi_t(\mathbb{I})$ ).

Здесь требуется привлечение дополнительной гипотезы: метрика на измеряемых волокнах индуцируется метрикой объемлющего физического пространства<sup>8</sup>  $\mathfrak{F}$ , которая задается независимо от состояния тела. Если эта метрика определяется полем симметричных билинейных форм  $g: X \rightarrow T_X^* \mathfrak{F} \otimes T_X^* \mathfrak{F}$ , удовлетворяющих условиям дефинитности, то многообразие  $\mathfrak{F}$  приобретает статус риманова пространства со связностью  $\nabla$  Леви — Чивита<sup>9</sup>. В этом случае в качестве образов волокон  $\chi_R(\mathbb{I})$  (или, если речь идет об обратной деформации,  $\chi_t(\mathbb{I})$ ) удобно использовать координатные кривые, а билинейные формы  $g_X$  представлять в виде тензорного разложения в базисе натуральных кореперов,  $g_X = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ . Если предположить, что физическое пространство  $\mathfrak{F}$  имеет аффинно-евклидову структуру, то такая конструкция приводит к хорошо известной классической интерпретации: координатные линии некоторой (выбранной из соображения удобства исследования) системы координат «замораживаются» в теле и искажаются вместе с ним в ходе деформации. При этом, следуя принятой терминологии, сеть координатных линий можно интерпретировать как лагранжеву сеть, а сеть их образов относительно  $\gamma$  — как эйлерову сеть. Таким

<sup>8</sup>То есть метрика на форме  $S$  есть «pullback» [28]  $i_S^* g$  пространственной метрики  $g$ .

<sup>9</sup>Для любых гладких векторных полей  $u, v$  на  $\mathfrak{F}$ , где  $u = u^i \partial_i, v = v^i \partial_i$ , справедливы равенства:

$$\nabla_u v = u^i \left( \partial_i v^k + v^j \gamma^k_{ij} \right) \partial_k, \quad \gamma^k_{ij} = \frac{g^{kl}}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$



образом, в контексте настоящей работы фундаментальным измеряемым объектом является упорядоченная пара  $(T\gamma, g)$ .

**10°.** Перейдем теперь к построению материальной метрики. В отличие от метрики физического пространства, которая задавалась независимо от тела, материальная метрика определяется структурой тела: в рамках настоящей работы она определяется его материальной неоднородностью. Отправной точкой для определения такой метрики является понятие *материального единообразия*, которое должно локально достигаться в каждой точке тела при задании на нем материальной метрики. Количественные соотношения, определяющие материальную метрику, могут быть получены по заданному функционалу отклика и дополнительной информации об условиях реализации локально единообразного состояния в каждой точке тела. Следуя [6], принимаем **гипотезу**:

*Телу  $\mathfrak{B}$  из простого материала соответствует семейство  $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}} = \{\varkappa_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$  глобальных конфигураций*

$$\varkappa_{\mathfrak{X}}^R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{F}, \quad \varkappa_{\mathfrak{X}}^R : \mathfrak{U} \mapsto \varkappa_{\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{U}),$$

*каждая из которых преобразует некоторую окрестность материальной точки  $\mathfrak{X}$  в единообразную форму [6].*

*Замечание 4.* Принятая гипотеза отражает следующее свойство структурно неоднородного тела, создаваемого послойно. Каждый слой, присоединяемый к формируемому телу, как часть тела, обладает единообразной формой, а все тело, в общем случае, таковой не обладает.

Каждый элемент семейства  $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}}$  индуцирует на  $\mathfrak{B}$  метрику из физического пространства  $\mathfrak{F}$  — это соответствует измерению, произведенному абстрактным «прибором», длин и углов инфинитезимальных волокон в окрестности образа точки  $\varkappa_{\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{X})$  в составе формы  $\varkappa_{\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{B})$ , а именно, определяет «pullback» метрики:

$$\mathcal{G}^{(\mathfrak{X})} := (\varkappa_{\mathfrak{X}}^R)^* g; \quad \forall \mathfrak{U} \in \mathfrak{B} \quad \forall u, v \in T_{\mathfrak{U}}\mathfrak{B} : \quad \mathcal{G}^{(\mathfrak{X})}|_{\mathfrak{U}}(u, v) = g(T_{\mathfrak{U}}\varkappa_{\mathfrak{X}}^R(u), T_{\mathfrak{U}}\varkappa_{\mathfrak{X}}^R(v)).$$

Заметим, что несмотря на апелляцию к измерению абстрактным «прибором» в инфинитезимальной окрестности, метрика  $\mathcal{G}^{(\mathfrak{X})}$  определяется на всем  $\mathfrak{B}$ , превращая многообразие  $\mathfrak{B}$  в риманово пространство  $(\mathfrak{B}, \mathcal{G}^{(\mathfrak{X})})$ . Однако, поскольку метрика  $\mathcal{G}^{(\mathfrak{X})}$  определена на  $\mathfrak{B}$ , свойства порождаемой ею связности Леви – Чивита не отличаются от свойств связности на  $\mathfrak{F}$ . В частности, если  $\mathfrak{F}$  — евклидово пространство, то  $(\mathfrak{B}, \mathcal{G}^{(\mathfrak{X})})$  — многообразие с евклидовой связностью. Этот факт интуитивно очевиден: ведь  $\varkappa_{\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{B})$  — форма тела  $\mathfrak{B}$ , получаемая некоторой (специальной) деформацией из актуальной формы в евклидовом пространстве. Таким образом, на  $\mathfrak{B}$  устанавливается континуальное семейство  $\{\mathcal{G}^{(\mathfrak{X})}\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$  метрик, определяющих связность одного и того же тела. Из элементов этого семейства синтезируется *материальная метрика*, вообще говоря, нового типа, следующим образом. Определим поле  $\mathcal{G} : \mathfrak{X} \mapsto \mathcal{G}^{(\mathfrak{X})}|_{\mathfrak{X}}$  билинейных положительно определенных дефинитных форм. Предположим, что это поле класса  $C^{r-1}$  на  $\mathfrak{B}$ , тогда оно является римановой метрикой, которую будем называть *материальной*. Отметим, что

$$\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{B} \quad \forall u, v \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} : \quad \mathcal{G}_{\mathfrak{X}}(u, v) = g(T_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}}^R(u), T_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}}^R(v)). \quad (12)$$

Для определения локальных конфигураций, трансформирующих инфинитезимальные части тела — «осколки» — в единообразную локальную форму, введем на множестве  $\mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$  отношение эквивалентности  $\sim_{\mathfrak{X}}$ :

$$\forall \varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P}) : (\varkappa_1 \sim_{\mathfrak{X}} \varkappa_2) \Leftrightarrow ((\varkappa_1(\mathfrak{X}) = \varkappa_2(\mathfrak{X})) \wedge (T_{\mathfrak{X}}\varkappa_1 = T_{\mathfrak{X}}\varkappa_2)).$$

Классы эквивалентности будем обозначать через  $[\varkappa]_{\mathfrak{X}}$ . Среди них есть классы, определяемые элементами семейства  $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}}$ , т.е.  $[\varkappa_{\mathfrak{X}}^R]_{\mathfrak{X}}$ . Выбирая в каждом классе  $[\varkappa_{\mathfrak{X}}^R]_{\mathfrak{X}}$  по представителю, получаем поле  $\mathcal{K} : \mathfrak{X} \mapsto T_{\mathfrak{X}}\varkappa$ , определенное на  $\mathfrak{B}$ , где  $\varkappa \in [\varkappa_{\mathfrak{X}}^R]_{\mathfrak{X}}$ . С физической точки зрения отображение  $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$  переводит инфинитезимальные материальные волокна, исходящие из точки  $\mathfrak{X}$  (математически, касательные векторы), в единообразную окрестность точки  $\varkappa_{\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{X})$ . Предположим, что поле  $\mathcal{K}$  является полем класса  $C^{r-1}$ . Тогда формула (12) примет вид

$$\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{B} \quad \forall u, v \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} : G_{\mathfrak{X}}(u, v) = g(\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(u), \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(v)). \quad (13)$$

Отметим, что поле  $\mathcal{K}$  (по терминологии Нолла [31] — поле *локальных конфигураций*) — двухточечное тензорное поле  $\mathcal{K} = K^i_{\alpha} e_i \otimes E^{\alpha}$  где  $(e_i)$  — поле реперов в физическом пространстве,  $(E^{\alpha})$  — поле кореперов на теле  $\mathfrak{B}$ . Метрика  $G$  порождает материальную связность Леви–Чивита с коэффициентами  $\Gamma^k_{ij}$ :

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{G^{kl}}{2} (\partial_i G_{jl} + \partial_j G_{il} - \partial_l G_{ij}), \quad \text{где } G_{ij} = g_{sp} K^s_i K^p_j.$$

**11°.** В классических (евклидовых) представлениях мер деформаций используется тензор  $\mathbf{F}^T$ , получаемый транспонированием градиента векторного поля мест  $\mathbf{F}$ . Для определения аналогичного объекта в неевклидовом случае требуются особые рассуждения, поскольку места определяются не векторным полем, а упорядоченной  $n$ -кой координат. Следовательно,  $T\gamma$  не является тензорным полем второго ранга, хотя его значения можно интерпретировать как тензоры в алгебраическом смысле, т.е. как линейные операторы (см. также Michal [34, с. 76], Можен [7, с. 46], Марсден [4, с. 48]). Фиксируем точку  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$  и соответствующую ей точку  $X = \varkappa(\mathfrak{X})$ . Отображение  $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$  есть линейное отображение  $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$  в  $T_X\mathfrak{P}$ . Транспонированным к  $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$  называется отображение  $\mathcal{F}_X^T : T_X\mathfrak{P} \rightarrow T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$  такое, что

$$\forall u \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \quad \forall v \in T_X\mathfrak{P} : g_X(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}u, v) = G_{\mathfrak{X}}(u, \mathcal{F}_X^T v). \quad (14)$$

По построенным поточечным отображениям определим  $\mathcal{F}^T$  как отображение одного векторного расслоения в другое. Для этого обозначим через  $\mathcal{V}_{\varkappa} := \bigcup_{X \in \varkappa(\mathfrak{B})} T_X\mathfrak{P}$  тотальное пространство ограничения расслоения [28, р. 255]  $T\mathfrak{P}$  на  $\varkappa(\mathfrak{B})$  с проекцией  $\mathfrak{s} : \mathcal{V}_{\varkappa} \rightarrow \varkappa(\mathfrak{B})$ , являющейся ограничением исходной проекции  $T\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}$ . Наконец, определим отображение  $\mathcal{F}^T : \mathcal{V}_{\varkappa} \rightarrow T\mathfrak{B}$  равенством

$$\forall u \in \mathcal{V}_{\varkappa} : \mathcal{F}^T(u) := \mathcal{F}_{\mathfrak{s}(u)}^T(u).$$

**12°.** Наряду с транспонированным отображением  $\mathcal{F}^T$ , в определении которого явно используется метрика, может быть использовано сопряженное отображение

$\mathcal{F}^*$ , определяемое следующим образом. Снова фиксируем точку  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$  и соответствующую ей точку  $X = \varkappa(\mathfrak{X})$ . Определим отображение [4]  $\mathcal{F}_X^* : T_X^* \mathfrak{P} \rightarrow T_{\mathfrak{X}}^* \mathfrak{B}$  правилом

$$\forall \nu \in T_X^* \mathfrak{P} \quad \forall u \in T_{\mathfrak{X}} \mathfrak{B} : \quad (\mathcal{F}_X^* \nu)u = \nu(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} u).$$

Обозначим через  $\mathcal{V}_{\varkappa}^* := \bigcup_{X \in \varkappa(\mathfrak{B})} T_X^* \mathfrak{P}$  тотальное пространство ограничения расслоения  $T^* \mathfrak{P}$  на  $\varkappa(\mathfrak{B})$  с проекцией  $q : \mathcal{V}_{\varkappa}^* \rightarrow \varkappa(\mathfrak{B})$ , являющейся ограничением исходной проекции  $T^* \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}$ .

Аналогично  $\mathcal{F}^T$  определим отображение  $\mathcal{F}^* : \mathcal{V}_{\varkappa}^* \rightarrow T^* \mathfrak{B}$  равенством

$$\forall \nu \in \mathcal{V}_{\varkappa}^* : \quad \mathcal{F}^*(\nu) : = \mathcal{F}_{q(\nu)}^*(\nu).$$

Введем обозначение  $w = v^{b_p}$ . По определению  $\mathcal{F}^*$  имеем  $\langle \mathcal{F}^* w, u \rangle = w(\mathcal{F} u)$ . Поэтому справедливо равенство

$$\langle w, \mathcal{F} u \rangle = \langle \mathcal{F}^* w, u \rangle. \tag{15}$$

С физической точки зрения соотношение (15) определяет энергетическую сопряженность: удельная мощность, развиваемая пространственной плотностью сил  $w$  на физическом поле скорости  $\mathcal{F} u$  равна удельной мощности, развиваемой материальной плотностью сил  $\mathcal{F}^* w$  на материальной скорости  $u$ .

**13°.** Отображения  $\mathcal{F}^T$  и  $\mathcal{F}^*$  взаимосвязаны посредством метрики. Пусть метрикам  $\mathcal{G}$ ,  $g$  соответствуют операции бемоль  $(\cdot)^{b_b}$  и  $(\cdot)^{b_p}$  [4, 28]. Тогда

$$\langle v^{b_p}, \mathcal{F} u \rangle = g(\mathcal{F} u, v), \quad \langle (\mathcal{F}^T v)^{b_b}, u \rangle = \mathcal{G}(u, \mathcal{F}^T v).$$

Поэтому, соотношение (14) может быть записано как равенство канонических спариваний соответствующих пар «вектор – ковектор»:

$$\langle v^{b_p}, \mathcal{F} u \rangle = \langle (\mathcal{F}^T v)^{b_b}, u \rangle.$$

**14°.** Градиент деформации содержит в себе информацию о, собственно, деформации материальных волокон и субъективную информацию о поворотах координатной системы, которую требуется исключить в соответствии с принципом материальной индифферентности [21]. Теоретическую возможность такого действия дает теорема Коши о полярном разложении [4]. В соответствии с ней для каждого  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$  существуют ортогональные тензоры  $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}} : T_{\mathfrak{X}} \mathfrak{B} \rightarrow T_{\varkappa(\mathfrak{X})} \mathfrak{P}$  такие, что справедливы разложения<sup>10</sup>

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \circ \mathcal{U}^{\text{right}}, \quad \mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{X}} \circ \mathcal{U}_{\mathfrak{X}}^{\text{right}}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{U}^{\text{left}} \circ \mathcal{R}, \quad \mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{U}_{\varkappa(\mathfrak{X})}^{\text{left}} \circ \mathcal{R}_{\mathfrak{X}},$$

где симметричные положительно определенные тензоры  $\mathcal{U}_{\mathfrak{X}}^{\text{right}} : T_{\mathfrak{X}} \mathfrak{B} \rightarrow T_{\mathfrak{X}} \mathfrak{B}$  и  $\mathcal{U}_{\mathfrak{X}}^{\text{left}} : T_X \mathfrak{P} \rightarrow T_X \mathfrak{P}$  есть правый и левый тензоры искажений соответственно.

**15°.** Для простых материалов применяются следующие комбинации элементов пары  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^T)$  – правый  $\mathcal{C}$  и левый  $\mathcal{B}$  тензоры Коши – Грина:  $\mathcal{C} = \mathcal{F}^T \circ \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^T$ . В соответствующих касательных слоях имеют место представления:

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{X}} : T_{\mathfrak{X}} \mathfrak{B} \rightarrow T_{\mathfrak{X}} \mathfrak{B}, \quad \mathcal{C}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{F}_X^T \circ \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}; \tag{16}$$

<sup>10</sup>Отображение  $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}} : T_{\mathfrak{X}} \mathfrak{B} \rightarrow T_{\varkappa(\mathfrak{X})} \mathfrak{P}$  определяется следующими условиями:  $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}^T \circ \mathcal{R}_{\mathfrak{X}} =$  тождественный оператор на  $T_{\mathfrak{X}} \mathfrak{B}$  и  $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}} \circ \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}^T =$  тождественный оператор на  $T_{\varkappa(\mathfrak{X})} \mathfrak{P}$ .

$$\mathcal{B}_X : T_X \mathfrak{B} \rightarrow T_X \mathfrak{B}, \quad \mathcal{B}_X = \mathcal{F}_X \circ \mathcal{F}_X^T, \quad X = \varkappa(\mathfrak{X}). \quad (17)$$

Левый и правый тензоры искажений выражаются через тензоры Коши–Грина следующим образом:

$$\mathcal{U}_\mathfrak{X}^{\text{right}} = (\mathcal{F}_{\varkappa(\mathfrak{X})}^T \mathcal{F}_\mathfrak{X})^{1/2} = (C_\mathfrak{X})^{1/2}, \quad \mathcal{U}_{\varkappa(\mathfrak{X})}^{\text{left}} = (\mathcal{F}_\mathfrak{X} \mathcal{F}_{\varkappa(\mathfrak{X})}^T)^{1/2} = (\mathcal{B}_{\varkappa(\mathfrak{X})})^{1/2}.$$

**16°.** Согласно определению музыкального изоморфизма  $(\cdot)^b$ , справедливо равенство  $C^{b_b} = g_{ij} \frac{\partial \varkappa^i}{\partial \mathfrak{X}^\alpha} \frac{\partial \varkappa^j}{\partial \mathfrak{X}^\beta} d\mathfrak{X}^\alpha \otimes d\mathfrak{X}^\beta$ . Из последнего равенства и представления  $\varkappa^*g = \frac{\partial \varkappa^i}{\partial \mathfrak{X}^\alpha} \frac{\partial \varkappa^j}{\partial \mathfrak{X}^\beta} g_{ij} d\mathfrak{X}^\alpha \otimes d\mathfrak{X}^\beta$  для «pullback» пространственной метрики вытекает соотношение  $C^{b_b} = \varkappa^*g$ .

Можно установить аналогичную формулу, записанную в терминах «pushforward» материальной метрики. Для этого используется отображение  $\widehat{\varkappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \varkappa(\mathfrak{B})$ , определяемое условием  $\widehat{\varkappa} : \mathfrak{X} \mapsto \varkappa(\mathfrak{X})$ . Касательное отображение  $\widehat{\mathcal{F}} = T\widehat{\varkappa} : T\mathfrak{B} \rightarrow T\varkappa(\mathfrak{B})$  служит «внутренней» мерой деформации и связано с градиентом деформации  $\mathcal{F} = T\varkappa$  равенством  $\mathcal{F} = \text{In}_{\varkappa(\mathfrak{B})} \circ \widehat{\mathcal{F}}$ . Использованием сечения  $i_{\varkappa(\mathfrak{B})}^*g$  в качестве метрики на  $\varkappa(\mathfrak{B})$  и соотношения (14), в котором вместо  $g$  подставляется  $i_{\varkappa(\mathfrak{B})}^*g$ , определяется  $\widehat{\mathcal{F}}^T : T\varkappa(\mathfrak{B}) \rightarrow T\mathfrak{B}$ . Таким образом, можно определить «внутренний» левый тензор Коши–Грина  $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\mathcal{F}} \circ \widehat{\mathcal{F}}^T$ . По определению музыкального изоморфизма  $(\cdot)^\sharp$  [4, 28], справедливо равенство  $\widehat{\mathcal{B}}^{\sharp_p} = G^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{X}^k}{\partial \mathfrak{X}^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{X}^l}{\partial \mathfrak{X}^\beta} \partial_{X^k} \otimes \partial_{X^l}$ , из которого, в силу выражения  $\widehat{\varkappa}_*G^{\sharp_b} = \frac{\partial \mathfrak{X}^k}{\partial \mathfrak{X}^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{X}^l}{\partial \mathfrak{X}^\beta} \partial_{X^k} \otimes \partial_{X^l}$ , вытекает равенство  $\widehat{\mathcal{B}}^{\sharp_p} = \widehat{\varkappa}_*(G^{\sharp_b})$ .

Таким образом, правый тензор Коши–Грина определяет «pullback»-отображение пространственной метрики, а левый — «pushforward»-отображение материальной метрики (в этой связи см. также [4]).

## 2. Структурно неоднородные тела переменного материального состава

**17°.** В настоящей работе структурно неоднородные тела переменного материального состава представляются семейством  $\mathfrak{G}$  гладких  $n$ -мерных тел [8, 35], т.е.  $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ , где  $\mathbb{I}$  — линейно упорядоченное множество индексов. Без потери общности можно полагать, что  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ . Каждый элемент семейства  $\mathfrak{G}$ , т.е. множество  $\mathfrak{B}_\alpha$ , характеризует мгновенный материальный состав тела. При рассмотрении процессов роста мощность множества  $\mathbb{I}$  определяет их характер: при  $\text{Card}\mathbb{I} = N < \infty$  рост дискретен, а при  $\text{Card}\mathbb{I} = \aleph_1$  рост непрерывен (более детальная классификация приведена в [8]). Дискретный рост приводит к *дискретной структурной неоднородности*, а непрерывный рост — к *непрерывной структурной неоднородности*. Далее будем полагать, что  $\mathfrak{G}$  упорядочено по вложению, т.е.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{I} : (\alpha < \beta) \Rightarrow (\mathfrak{B}_\alpha \subsetneq \mathfrak{B}_\beta)$ . Этому условию соответствует «чистый рост» [35].

В общем случае различным  $\alpha, \beta$  соответствуют различные многообразия  $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta$ , топологические структуры которых независимы [6]. Однако в рамках настоящей работы будем полагать, что при  $\alpha < \beta$ ,  $\mathfrak{B}_\alpha$  — часть  $\mathfrak{B}_\beta$  и, следовательно,  $\mathfrak{B}_\alpha$  должно обладать топологией, индуцированной из  $\mathfrak{B}_\beta$ . В этой связи предлагается рассматривать тела из  $\mathfrak{G}$  как  $n$ -мерные  $C^r$ -подмногообразия некоторого объемлющего гладкого  $n$ -мерного многообразия  $\mathcal{M}$ , называемого далее *материальным многообразием*.

Отметим, что структурно неоднородные тела с дискретной неоднородностью, во-первых, представляют широкий класс продуктов аддитивных технологий [36–38], а во-вторых, являются «опорой мысли» для понимания процессов непрерывного роста. Будем считать, что  $\mathbb{I}$  — последовательность первых  $N$  натуральных чисел, т.е.  $\mathbb{I} = \{1, \dots, N\}$ , где  $N \geq 1$ .

**18°.** Рассмотрим пример структурно неоднородного тела — растущий цилиндр. Пусть процесс роста является дискретным и состоит в последовательном нанесении цилиндрических слоев, которые испытывают усадку сразу после их присоединения. Для дальнейших рассуждений удобно представить элементы семейства  $\mathfrak{B}$  как соединения непересекающихся тел–слоев  $\mathcal{J}_k$ . Результаты таких соединений будем называть сборками (аллюзия к технологическому процессу). Так, к телу  $\mathfrak{B}_1$  присоединяется тело–слой  $\mathcal{J}_2$ , что в результате дает тело  $\mathfrak{B}_2$  (первая сборка); к телу  $\mathfrak{B}_2$  присоединяется тело–слой  $\mathcal{J}_3$  и тем самым получается тело  $\mathfrak{B}_3$  (вторая сборка), и т.д. Формализация рассматриваемого процесса основана на следующих допущениях:

**(DG0)** Физическое пространство — трехмерное аффинное евклидово пространство  $\mathcal{E}$ .

**(DG1)** Тела–слои  $\mathcal{J}_k$  имеют натуральные (т.е. свободные от напряжений) отсчетные формы в пространстве  $\mathcal{E}$ ; им соответствуют конфигурации

$$\varkappa_R^k : \mathcal{J}_k \rightarrow \mathcal{E}, \quad k = 1, \dots, N.$$

**(DG2)** Каждая из форм  $\varkappa_R^k(\mathcal{J}_k)$ , соответствующих отсчетным конфигурациям, представлена полым круговым цилиндром конечной высоты  $h$  (одной и той же для всех таких форм), внутренним радиусом  $R_i^k$  и внешним радиусом  $R_e^k$ .

**(DG3)** В актуальной конфигурации каждое из тел  $\mathfrak{B}_s$ ,  $s = 2, \dots, N$ , получается последовательным соединением и склейкой (мгновенной) тел–слоев  $\mathcal{J}_k$  к  $\mathfrak{B}_1$  так, что после каждого соединения образуется полый круговой цилиндр; цилиндры, представляющие актуальные формы тел–слоев, коаксиальны. Далее  $r_{i,s-1}^k$  — внутренний радиус  $k$ -го слоя в актуальной форме, а  $r_{e,s-1}^k$  — внешний радиус  $k$ -го слоя в актуальной форме; индекс  $s-1$  после запятой указывает на номер сборки.

**(DG4)** Сборки производятся без самопересечений таким образом, что высота цилиндров не меняется, и по-прежнему равна  $h$ , а смещения симметричны относительно общей оси цилиндров и направлены перпендикулярно к ней<sup>11</sup>. В терминологии [39] такой процесс классифицируется как *дискретное наращивание*.

**(DG5)** Заранее размеры тел–слоев в отсчетной форме не известны и определяются из следующего рекуррентного соотношения: внутренний радиус отсчетной формы тела–слоя  $\mathcal{J}_{s+1}$  равен  $R_i^{s+1} = S^{s+1} r_{e,s-1}^s$ , где  $0 < S^{s+1} < 1$  — коэффициенты усадки, а  $r_{e,s-1}^s$  — внешний актуальный радиус тела–слоя  $\mathcal{J}_s$ . Заданы радиус  $R_i^1 = \rho$  и толщины тел–слоев в отсчетной форме,  $\Delta^k = R_e^k - R_i^k$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

**19°.** Согласно (DG0) физическое пространство является трехмерным евклидовым аффинным пространством  $\mathcal{E}$  с ассоциированным векторным пространством  $\mathcal{V}$ . Риманова метрика  $\mathbf{g}$  представлена евклидовым метрическим тензором;  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

<sup>11</sup>Такое предположение позволяет использовать полуобратный метод, когда деформация определена заранее, с точностью до набора параметров.

для  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . Относительно ортонормированного базиса  $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^3$  метрический тензор представлен разложением  $\mathbf{g} = \delta_{ij} i^i \otimes j^j$ , где  $(i^k)_{k=1}^3$  — корепер.

Сборка  $\mathfrak{B}_s$ ,  $s \in \{1, \dots, N\}$ , представлена актуальной формой  $C_{s-1} = \varkappa_s(\mathfrak{B}_s)$  в физическом пространстве. Каждой материальной точке  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_s$  соответствует место в  $\mathcal{E}$ ; совокупность таких мест — форма  $C_{s-1}$ . Поскольку по предположению физическое пространство евклидово, то каждой материальной точке из  $\mathfrak{B}_s$  можно сопоставить тройку декартовых координат по правилу

$$\mathfrak{B}_s \ni \mathfrak{X} \mapsto \mathcal{D} \circ \widehat{\varkappa}_s(\mathfrak{X}) = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь  $\mathcal{D}$  — декартово картирование, определенное формулой (1), а  $\widehat{\varkappa}_s : \mathfrak{X} \mapsto \varkappa_s(\mathfrak{X})$ . Пусть гомеоморфизм  $\widetilde{\mathcal{D}} : C_{s-1} \rightarrow \mathcal{D}(C_{s-1})$  представляет сужение  $\mathcal{D}$  на форму. Тогда  $A = \{\mathfrak{B}_s, \widehat{\varkappa}_s^{-1} \circ \widetilde{\mathcal{D}}^{-1}\}$  — тривиальный атлас тела  $\mathfrak{B}_s$  (в этой связи, см. также [31]).

Использование одной лишь карты  $(\mathfrak{B}_s, \widehat{\varkappa}_s^{-1} \circ \widetilde{\mathcal{D}}^{-1})$  приводит к громоздким формулам. Поэтому представляется целесообразным, используя симметрию формы, добавить в атлас  $A$  еще одну карту, соответствующую цилиндрическим координатам  $(r, \theta, \xi)$ . Эти координаты связаны с декартовыми формулой пересчета

$$h : (r, \theta, \xi) \mapsto (x^1, x^2, x^3), \quad x^1 = r \cos \theta, \quad x^2 = r \sin \theta, \quad x^3 = \xi.$$

Рассмотрим координатное представление  $\widehat{\varkappa}_s$ . В паре карт  $(\mathfrak{B}_s, \widehat{\varkappa}_s^{-1} \circ \widetilde{\mathcal{D}}^{-1})$  и  $(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{-1})$  оно имеет вид:

$$\widetilde{\varkappa}_s = \mathcal{D} \circ \widehat{\varkappa}_s \circ (\widehat{\varkappa}_s^{-1} \circ \widetilde{\mathcal{D}}^{-1}) = \mathcal{D} \circ \widetilde{\mathcal{D}}^{-1} = j_{\mathcal{D}(C_{s-1})} : \mathcal{D}(C_{s-1}) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

т.е. с точностью до области прибытия является тождественным отображением. Однако если рассмотреть на  $\mathfrak{B}_s$  карту, соответствующую цилиндрическим координатам, то  $\widetilde{\varkappa}_s$  представляется более сложным выражением. Таким образом, из того, что координатное представление является тождественным отображением, не следует тождественность  $\widehat{\varkappa}_s$ . Вместе с тем, если тело  $\mathfrak{B}_s$  отождествить с  $C_{s-1}$ , как поступают в евклидовой механике, то  $\widehat{\varkappa}_s$  — тождественное отображение.

Отображение  $\widehat{\varkappa}_s$  позволяет перенести координаты  $(x^1, x^2, x^3)$  и  $(r, \theta, \xi)$  с тела  $\mathfrak{B}_s$  на его форму  $C_{s-1}$ . При этом, координатам  $(r, \theta, \xi)$  соответствует поле натуральных реперов  $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\xi)$  на  $C_{s-1}$ . Через  $(dr, d\theta, d\xi)$  обозначим поле кореперов, дуальное к  $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\xi)$ . Согласно п. 7°, «абстрактному» реперу  $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\xi)$  можно сопоставить «классический» локальный репер  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\xi)$  на  $C_{s-1}$  по формуле

$$\mathbf{e}_c = \text{In}_{C_{s-1}} \lrcorner \partial_c = \frac{\partial x^k}{\partial c} \mathbf{i}_k, \quad c \in \{r, \theta, \xi\}.$$

Построенное поле  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\xi)$  из  $C_{s-1}$  в  $\mathcal{V}$  представляет поле локальных реперов цилиндрической системы координат. Наряду с полем реперов  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\xi)$  мы будем использовать поле кореперов  $(e^r, e^\theta, e^\xi)$ , элементы которого определены равенствами  $\langle e^p, \mathbf{e}_c \rangle = \delta_c^p$ , где  $p, c \in \{r, \theta, \xi\}$ .

**20°.** Пусть  $s \in \{1, \dots, N\}$ . Согласно предположениям п. 18°, деформация  $d_k$  каждого слоя  $\mathcal{J}_k$ ,  $k = 1, \dots, s$ , из отсчетной формы  $\varkappa_R^k(\mathcal{J}_k)$  в актуальную,  $\varkappa_s(\mathcal{J}_k)$ , сводится к его «раздуванию» и, тем самым, определяет цилиндрические координаты

$(R^k, \Theta^k, \Xi^k)$  на множестве  $\varkappa_R^k(\mathcal{J}_k)$ . Координатное представление деформации  $d_k$  при этом имеет вид

$$\widetilde{d}_k : (R^k, \Theta^k, \Xi^k) \mapsto (r, \theta, \xi) = \left( \sqrt{(R^k)^2 + a_{s-1}^k}, \Theta^k, \Xi^k \right),$$

где  $a_{s-1}^k$  — параметр деформации, определяющий изменение радиуса внешней цилиндрической поверхности тела-слоя с номером  $k$  в сборке с номером  $s - 1$ . Эквивалентно, деформация  $d_k$  определяет на множестве  $\varkappa_R^k(\mathcal{J}_k)$  декартовы координаты  $(X_k^1, X_k^2, X_k^3)$  формулами

$$X_k^1 = \sqrt{r^2 - a_{s-1}^k} \cos \theta, \quad X_k^2 = \sqrt{r^2 - a_{s-1}^k} \sin \theta, \quad X_k^3 = \xi.$$

*Замечание 5.* Деформации тел-слоев являются классическими неоднородными деформациями полого цилиндра и могут быть представлены в виде [21, 39]

$$\mathbf{x}(X_k) = \mathbf{e}_{R^k} \sqrt{(e^{R^k} \lrcorner X_k)^2 + a_{s-1}^k} + \mathbf{e}_{\Xi^k} \otimes e^{\Xi^k} \lrcorner X_k.$$

Градиент деформации  $\mathcal{F}_k = Td_k$  в паре координатных систем  $(R^k, \Theta^k, \Xi^k)$  и  $(r, \theta, \xi)$  представляется разложением

$$\mathcal{F}_k = \frac{R^k}{\sqrt{(R^k)^2 + a_{s-1}^k}} \partial_r^k \otimes dR^k + \partial_\theta^k \otimes d\Theta^k + \partial_\xi^k \otimes d\Xi^k. \quad (18)$$

*Замечание 6.* Поле координатных реперов  $(\partial_r^k, \partial_\theta^k, \partial_\xi^k)$  является сечением расслоения  $T\varkappa_s(\mathcal{J}_k)$ . Чтобы подчеркнуть отличие от поля реперов  $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\xi)$  — сечения расслоения  $TC_{s-1}$ , был использован индекс  $k$ . Далее, чтобы не загромождать запись, в подобных случаях этот индекс будем опускать.

Используя соображения п. 8°, приходим к следующему выражению для евклидова градиента деформаций:

$$\mathbf{F}_k = \frac{R^k}{\sqrt{(R^k)^2 + a_{s-1}^k}} \mathbf{e}_r \otimes e^{R^k} + \mathbf{e}_\theta \otimes e^{\Theta^k} + \mathbf{e}_\xi \otimes e^{\Xi^k}. \quad (19)$$

Полученные разложения для  $\mathcal{F}_k$  и  $\mathbf{F}_k$  справедливы в пределах  $\varkappa_R^k(\mathcal{J}_k)$ .

*Замечание 7.* «Вморозим»  $(R^k, \Theta^k, \Xi^k)$  в форму  $\varkappa_R^k(\mathcal{J}_k)$ . Посредством деформации  $d_k$  они переносятся на форму  $\varkappa_s(\mathcal{J}_k)$ . В совокупности форма  $C_{s-1}$  покрывается  $s$  координатными системами  $(R^k, \Theta^k, \Xi^k)$ ,  $k = 1, \dots, s$ . В таком случае  $\mathcal{F}_k$  имеет следующее диадное представление:

$$\mathcal{F}_k = \widetilde{\partial}_{R^k} \otimes dR^k + \widetilde{\partial}_{\Theta^k} \otimes d\Theta^k + \widetilde{\partial}_{\Xi^k} \otimes d\Xi^k,$$

где через  $(\widetilde{\partial}_{R^k}, \widetilde{\partial}_{\Theta^k}, \widetilde{\partial}_{\Xi^k})$  обозначен координатный репер на  $\varkappa_R^k(\mathcal{J}_k)$ , а через  $(dR^k, d\Theta^k, d\Xi^k)$  — корепер на  $\varkappa_s(\mathcal{J}_k)$ . Соответствующий евклидов градиент деформации  $\mathbf{F}_k$  представлен разложением (см. (10))

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{e}_{R^k} \otimes E^{R^k} + \mathbf{e}_{\Theta^k} \otimes E^{\Theta^k} + \mathbf{e}_{\Xi^k} \otimes E^{\Xi^k},$$

где  $\mathbf{e}_c = (\partial x^p)/(\partial c)\mathbf{i}_p$ ,  $\mathbf{E}_c = (\partial X_k^p)/(\partial c)\mathbf{i}_p$ ,  $c \in \{R^k, \Theta^k, \Xi^k\}$ . Такое представление используется, например, в [33].

Обозначим через  $\mathcal{G}_k = i_{\mathcal{K}_R^k}^* \mathbf{g}$  сужение исходной евклидовой метрики на форму  $\mathcal{K}_R^k$ . Тогда получим семейство  $\{\mathcal{G}_k\}_{k=1}^s$  римановых метрик:

$$\mathcal{G}_k = dR^k \otimes dR^k + (R^k)^2 d\Theta^k \otimes d\Theta^k + d\Xi^k \otimes d\Xi^k.$$

Использование актуальной формы,  $C_{s-1}$ , и замены переменных, определяемой  $\widetilde{d}_k$ , позволяет определить метрики  $\mathcal{G}_k$  как поля над связным множеством. Эти поля задаются формулой

$$\widetilde{\mathcal{G}}_k = \widetilde{dR}^k \otimes \widetilde{dR}^k + (r^2 - a_{s-1}^k) \widetilde{d\Theta}^k \otimes \widetilde{d\Theta}^k + \widetilde{d\Xi}^k \otimes \widetilde{d\Xi}^k,$$

где  $\widetilde{dC}^k = dC^k \circ d_k^{-1}$ ,  $C \in \{R, \Theta, \Xi\}$ .

Правый тензор Коши–Грина  $C_k$  и левый тензор Коши–Грина  $\mathcal{B}_k$  для тела–слоя  $\mathcal{K}_k$  определяются формулами, аналогичными (16) и (17). В частности,

$$C_k = \frac{(R^k)^2}{(R^k)^2 + a_{s-1}^k} \partial_{R^k} \otimes dR^k + \frac{(R^k)^2 + a_{s-1}^k}{(R^k)^2} \partial_{\Theta^k} \otimes d\Theta^k + \partial_{\Xi^k} \otimes d\Xi^k. \quad (20)$$

Тензорам  $C_k$  и  $\mathcal{B}_k$  соответствуют евклидовы тензоры  $\mathbf{C}_k$  и  $\mathbf{B}_k$ :

$$\mathbf{C}_k = \frac{(R^k)^2}{(R^k)^2 + a_{s-1}^k} \mathbf{e}_{R^k} \otimes e^{R^k} + \frac{(R^k)^2 + a_{s-1}^k}{(R^k)^2} \mathbf{e}_{\Theta^k} \otimes e^{\Theta^k} + \mathbf{e}_{\Xi^k} \otimes e^{\Xi^k}. \quad (21)$$

$$\mathbf{B}_k = \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} \mathbf{e}_r \otimes e^r + \frac{r^2}{r^2 - a_{s-1}^k} \mathbf{e}_\theta \otimes e^\theta + \mathbf{e}_\xi \otimes e^\xi. \quad (22)$$

Инварианты  $\mathbf{B}_k$  представлены выражениями

$$I_1(\mathbf{B}_k) = I_2(\mathbf{B}_k) = \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} + \frac{r^2}{r^2 - a_{s-1}^k} + 1, \quad I_3(\mathbf{B}_k) = 1.$$

**21°.** Предположим, что тела–слои сделаны из гиперупругого несжимаемого материала. Определяющее соотношение для каждого из тел–слоев имеет вид:  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + J_1\mathbf{B} + J_{-1}\mathbf{B}^{-1}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $p$  – гидростатическая компонента, а  $J_1 = (1 + \beta)\mu/2$ ,  $J_{-1} = (\beta - 1)\mu/2$ ; здесь  $\beta$  и  $\mu$  – материальные постоянные. Выражение для тензора напряжений Коши в  $k$ -м теле–слое примет вид [39]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k^\# &= T_k^{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + T_k^{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + T_k^{\xi\xi} \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi, \\ T_k^{rr} &= \frac{\mu}{2} \left( \ln \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} - \frac{a_{s-1}^k}{r^2} \right) + p_{0, s-1}^k, \quad T_k^{\theta\theta} = \frac{T_k^{rr}}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{r^2}{r^2 - a_{s-1}^k} - \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} \right), \\ T_k^{\xi\xi} &= T_k^{rr} + \mu a_{s-1}^k \frac{r^2 - (1 + \beta)a_{s-1}^k/2}{r^2(r^2 - a_{s-1}^k)}. \end{aligned}$$

Тензор напряжений Коши  $\mathbf{T}_k$  в каждом теле–слое определен с точностью до параметров  $a_{s-1}^k$  и  $p_{0, s-1}^k$ . Распоряжаясь этими параметрами, можно удовлетворить некоторому классу краевых условий. Будем полагать, что на внутренней,  $r = r_{i, s-1}^1$ ,



и внешней,  $r = r_{e,s-1}^s$ , границах многослойного тела заданы равномерно распределенные давления  $p_{i,s-1}$  и  $p_{e,s-1}$ :

$$\mathbf{T}_1^\# \lrcorner e^r \Big|_{r=r_{i,s-1}^1} = p_{i,s-1} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{T}_s^\# \lrcorner e^r \Big|_{r=r_{e,s-1}^s} = p_{e,s-1} \mathbf{e}_r, \quad (23)$$

и предположим, что тела-слои в сборке, т.е. в актуальной форме, находятся в идеальном контакте:

$$\mathbf{T}_k^\# \lrcorner e^r \Big|_{r=r_{e,s-1}^k} = \mathbf{T}_{k+1}^\# \lrcorner e^r \Big|_{r=r_{i,s-1}^{k+1}}, \quad r_{e,s-1}^k = r_{i,s-1}^{k+1}, \quad k = 1, \dots, s-1. \quad (24)$$

Условия (23) и (24) могут быть удовлетворены, если  $a_{s-1}^k$  и  $p_{0,s-1}^k$ ,  $k = 1, \dots, s$ , являются решениями системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \left[ \ln \frac{(R_i^1)^2}{(R_i^1)^2 + a_{s-1}^1} - \frac{a_{s-1}^1}{(R_i^1)^2 + a_{s-1}^1} \right] + p_{0,s-1}^1 &= p_{i,s-1}, \\ \frac{\mu}{2} \left[ \ln \frac{(R_e^s)^2}{(R_e^s)^2 + a_{s-1}^s} - \frac{a_{s-1}^s}{(R_e^s)^2 + a_{s-1}^s} \right] + p_{0,s-1}^s &= p_{e,s-1}, \\ \frac{\mu}{2} \left[ \ln \frac{(R_e^k)^2}{(R_e^k)^2 + a_{s-1}^k} - \frac{a_{s-1}^k}{(R_e^k)^2 + a_{s-1}^k} \right] + p_{0,s-1}^k &= \\ &= \frac{\mu}{2} \left[ \ln \frac{(R_i^{k+1})^2}{(R_i^{k+1})^2 + a_{s-1}^{k+1}} - \frac{a_{s-1}^{k+1}}{(R_i^{k+1})^2 + a_{s-1}^{k+1}} \right] + p_{0,s-1}^{k+1}, \\ (R_e^k)^2 + a_{s-1}^k &= (R_i^{k+1})^2 + a_{s-1}^{k+1}, \quad k = 1, \dots, s-1. \end{aligned} \quad (25)$$

Из системы (25) можно последовательно исключить неизвестные  $p_{0,s-1}^k$  и прийти к системе  $s$  уравнений относительно параметров  $a_{s-1}^k$  [39]:

$$\prod_{k=1}^s \gamma_k \frac{\alpha_k + \nu_k x_s}{\beta_k + \nu_k x_s} = W_s \exp \left[ \sum_{k=1}^s (1 - \gamma_k) \frac{\alpha_k + \nu_k x_s - 1}{(\alpha_k + \nu_k x_s)(\beta_k + \nu_k x_s)} \right], \quad (26)$$

$$a_{s-1}^k = a_{s-1}^1 + A_k, \quad k = 2, \dots, s,$$

где  $A_1 = 0$ ,  $A_k = \sum_{p=2}^k ((R_e^{p-1})^2 - (R_i^p)^2)$ , при  $k = 2, \dots, s$ ,  $\gamma_k = (R_i^k/R_e^k)^2$ ,  $\alpha_k = 1 + A_k/(R_e^k)^2$ ,

$\beta_k = \gamma_k + A_k/(R_e^k)^2$ ,  $\nu_k = (R_e^1/R_e^k)^2$ ,  $x_s = a_{s-1}^1/(R_e^1)^2$ ,  $W_s = \exp \left[ 2 \frac{p_{i,s-1} - p_{e,s-1}}{\mu} \right]$ .

Из системы (26) при заданных отсчетных радиусах, внешних и внутренних давлениях, однозначно определяются параметры  $a_{s-1}^k$ . После этого из соответствующей подсистемы (25) определяются неизвестные параметры  $p_{0,s-1}^k$ . Относительно них эта подсистема является линейной.

В совокупности с системой (26), условия п. (DG5) позволяют найти параметры  $a_{s-1}^k$ , а по ним —  $p_{0,s-1}^k$ . Выражения для  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$ ,  $\gamma_s$ ,  $\nu_s$  могут быть представлены следующими рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_{s+1} &= 1 + \frac{\alpha_s - (S^{s+1})^2(\alpha_s + \nu_s x_s)}{\zeta_s}, \quad \gamma_{s+1} = \frac{(S^{s+1})^2(\alpha_s + \nu_s x_s)}{\zeta_s}, \\ \beta_{s+1} &= \gamma_{s+1} + \frac{\alpha_s - (S^{s+1})^2(\alpha_s + \nu_s x_s)}{\zeta_s}, \quad \nu_{s+1} = \frac{\nu_s}{\zeta_s}, \\ \zeta_s &= \left( S^{s+1} \sqrt{\alpha_s + \nu_s x_s} + \sqrt{\nu_s \zeta_s} \right)^2, \quad \xi_s = \left( \frac{\Delta^{s+1}}{\rho + \Delta^1} \right)^2, \end{aligned}$$

где  $s \geq 1$ . При этом,  $\alpha_1 = \nu_1 = 1$ ,  $\beta_1 = \gamma_1 = (\rho/(\rho + \Delta^1))^2$ .

На рис. 1, 2, 3, 4 и 5 представлены результаты вычислений для четырех сборок из, соответственно, 10, 30, 200, 1000 слоев. Полагалось, что  $\beta = 0.24$ . Внутренний отсчетный радиус  $\rho$  первого тела и отсчетная толщина  $\Delta^1$  для каждой из сборок полагались равными  $\rho = \Delta^1 = 2$  мкм. Отсчетные толщины  $\Delta^k$  при  $k \geq 2$  для каждой из сборок полагались равными<sup>12</sup>  $\Delta^k = 22/(N - 1)$  мкм, где  $N$  — число слоев. Коэффициенты усадки выбирались одинаковыми и равными  $S^k = 0.9$ . Внутренние и внешние давления  $p_{i,s-1}$  и  $p_{e,s-1}$  полагались равными нулю.

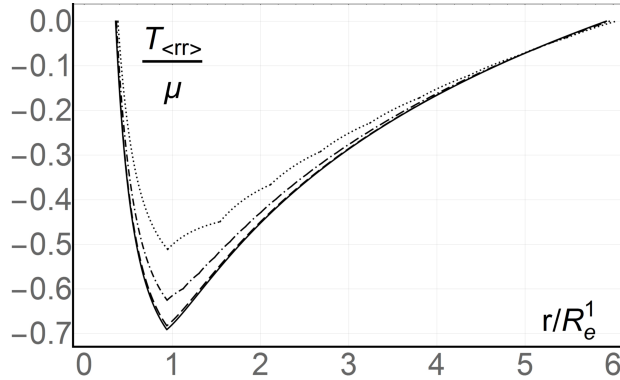


Рис. 1. Относительные радиальные напряжения

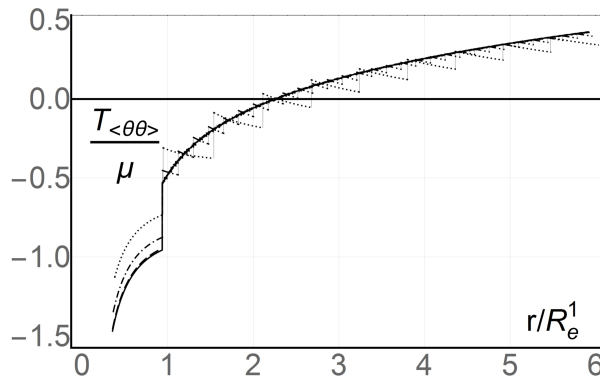


Рис. 2. Относительные окружные напряжения

На графиках: пунктирным линиям соответствует 10 слоев, штрих-пунктирным линиям — 30 слоев, штриховым линиям — 200 слоев, а сплошным линиям соответствует 1000 слоев. Угловые скобки в  $T_{<ij>}$  означают, что соответствующая компонента  $\mathbf{T}$  рассматривается в физическом (нормированном) базисе.

*Замечание 8.* Формализация разделения тела на слои и его сборка из слоев могут быть осуществлены следующим образом. Пусть  $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{B}_s\}_{s=1}^N$  — тело переменного

<sup>12</sup>Эти величины соответствуют LbL-структурам, рассмотренным в [23].

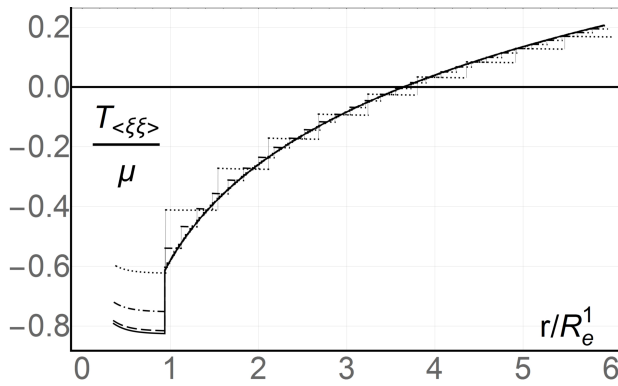


Рис. 3. Относительные осевые напряжения

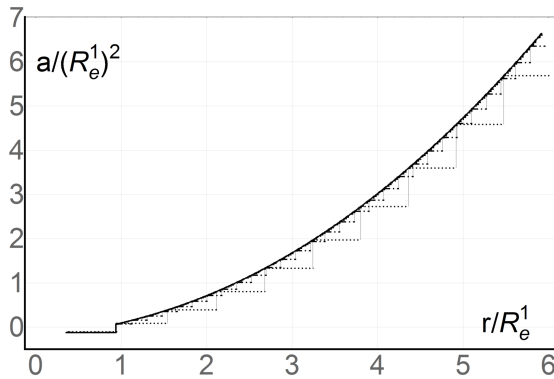


Рис. 4. Параметр раздувания  $a_{s-1}^k$

материального состава с дискретной неоднородностью. Множество  $\mathfrak{B}_s$  открыто в топологическом пространстве  $\mathfrak{B}_{s+1}$ , топология которого индуцирована из материального многообразия  $\mathcal{M}$  (см. п. 17°). Поэтому разность  $\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s$  замкнута в топологии  $\mathfrak{B}_{s+1}$ , что влечет равенство  $\overline{\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s} = \mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s$ , и следующее представление [27]:

$$\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s = \text{Int}_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s) \cup \partial_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s),$$

где операции взятия замыкания, внутренности ( $\text{Int}_{\mathfrak{B}_{s+1}}$ ) и границы ( $\partial_{\mathfrak{B}_{s+1}}$ ) берутся в индуцированной топологии  $\mathfrak{B}_{s+1}$ . Согласно определению внутренности как объединения всевозможных открытых множеств, содержащихся в данном множестве, имеем равенство<sup>13</sup>  $\text{Int}_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s) = \text{Int}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s)$ , где  $\text{Int}$  — операция взятия внутренности в топологии  $\mathcal{M}$ . Используются следующие обозначения:  $\mathfrak{J}_{s+1} = \text{Int}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s)$ , для  $s = 1, \dots, N - 1$ . Положим  $\mathfrak{J}_1 := \mathfrak{B}_1$ . Каждое из множеств  $\mathfrak{J}_s$  является открытым в  $\mathcal{M}$  и в дальнейшем называется телом-слоем.

Определим операцию соединения  $\vee$  тел-слоев следующим образом:

$$\mathfrak{B}_{s+1} = \mathfrak{B}_s \vee \mathfrak{J}_{s+1} := \mathfrak{B}_s \cup \text{Int}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s) \cup \partial_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s).$$

<sup>13</sup>Отметим, что каждое из множеств  $\text{Int}_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s)$  открыто и в  $\mathcal{M}$ .

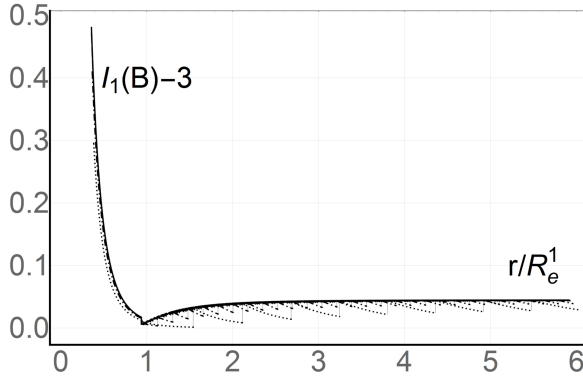
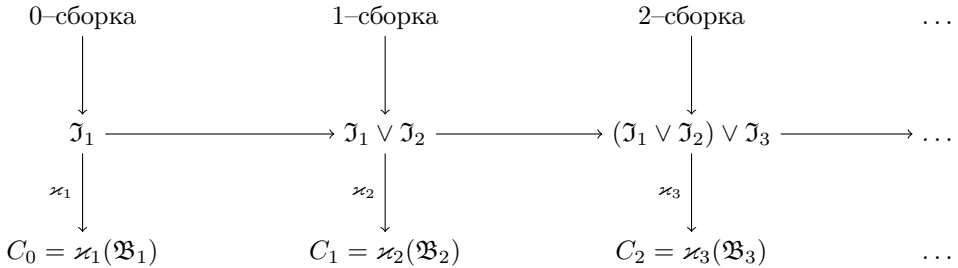


Рис. 5. Первый инвариант тензора  $B$

Рассматриваемая операция является аналогом операции *соединения*, определенной в [40]. При этом  $\vee$  не совпадает с теоретико-множественной операцией объединения и имеет физический смысл, выражающийся в формализации понятия склейки сборки с новым телом–слоем. Именно, действие этой операции на два тела  $\mathfrak{B}_s$  и  $\mathfrak{J}_{s+1}$  дает тело  $\mathfrak{B}_{s+1}$ , состоящее из исходной сборки, тела–слоя  $\mathfrak{J}_{s+1}$  и множества  $\partial_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s)$ . Последнему множеству можно придать смысл тонкого слоя между исходными телами. За счет этого слоя склеиваемые тела могут взаимодействовать. При этом отметим, что именно благодаря использованию топологии  $\mathfrak{B}_{s+1}$ , удается корректно выделить границу между сборкой и присоединяемым телом–слоем.

Процесс создания сборок иллюстрирует следующая диаграмма:



Здесь  $\varkappa_s: \mathfrak{B}_s \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $s=1, \dots, N$ , — актуальные конфигурации сборок,  $C_s = \varkappa_{s+1}(\mathfrak{B}_{s+1})$  — актуальные формы сборок.

### 3. Риманова материальная структура

**22°.** Теперь рассмотрим пример структурно неоднородного тела с непрерывной неоднородностью. Согласно п. **17°**, в материальном многообразии  $\mathcal{M}$  имеется семейство тел  $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ , где  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$  и  $\text{Card } \mathbb{I} = \aleph_1$ . Предположим, что семейство  $\mathfrak{G}$  удовлетворяет следующим условиям:

(CG0) Физическое пространство — трехмерное аффинное евклидово пространство  $\mathcal{E}$ .

**(CG1)** Для любого  $\alpha \in \mathbb{I}$  образ актуальной (наблюдаемой) конфигурации  $\varkappa_\alpha \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}_\alpha; \mathcal{E})$  представляет собой полый цилиндр конечной высоты  $h$  (одной и той же для всех тел).

**(CG2)** Все  $\mathfrak{B}_\alpha$  топологически эквивалентны.

**(CG3)** Каждое тело  $\mathfrak{B}_\alpha$  можно представить в виде расслоения  $\pi_\alpha : \mathfrak{B}_\alpha \rightarrow \mathbb{J}_\alpha$  на континуальное семейство непересекающихся двумерных подмногообразий (поверхностей)  $\{\mathfrak{S}_{\alpha,i}\}_{i \in \mathbb{J}_\alpha}$  с одномерной базой  $\mathbb{J}_\alpha \subset \mathbb{R}$  [8]:  $\mathfrak{B}_\alpha = \bigcup_{i \in \mathbb{J}_\alpha} \mathfrak{S}_{\alpha,i}$ , где  $\mathfrak{S}_{\alpha,i} = \pi_\alpha^{-1}(\{i\})$ ,  $i \in \mathbb{J}_\alpha$ . При этом, для каждой из поверхностей  $\mathfrak{S}_{\alpha,i}$  существует конфигурация  $\varkappa_{\alpha,i}^R \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}_\alpha; \mathcal{E})$ , отображающая тело  $\mathfrak{B}_\alpha$  в евклидово пространство таким образом, что  $\varkappa_{\alpha,i}^R(\mathfrak{B}_\alpha)$  — полый круговой цилиндр высоты  $h$ , а поверхность  $\varkappa_{\alpha,i}^R(\mathfrak{S}_{\alpha,i})$  — цилиндрическая поверхность, инфинитезимальные окрестности точек которой (в  $\mathcal{E}$ ) свободны от напряжений [8].

**23°.** В общем случае для определения континуального семейства  $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}_\alpha}$ , и, соответственно, материальной метрики, необходимо решать эволюционную задачу [8, 39, 41]. В настоящей работе воспользуемся несколько упрощенным подходом — зададим семейство  $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}_\alpha}$  как «аппроксимацию» конечного семейства отсчетных форм, определенного выше для дискретной структурной неоднородности при большом (1000) количестве слоев. В качестве базовой аппроксимирующей функции возьмем следующую зависимость:

$$a(r) = \begin{cases} -1.9738, & r < 3.7452, \\ -3.4948 + 7.1796 \cdot 10^{-1}r + 1.2406 \cdot 10^{-1}r^2 + 2.828 \cdot 10^3 r^3 - 4.5369 \cdot 10^{-5}r^4, & r > 3.7452. \end{cases} \quad (27)$$

Эта функция имеет разрыв только в одной точке, которая соответствует поверхности присоединения первого слоя к начальному телу, а во всех других точках — непрерывна. Зафиксируем параметр  $\alpha \in \mathbb{I}$  и рассуждения, связанные с построением материальной метрики, будем проводить для тела  $\mathfrak{B}_\alpha$ . Поскольку материал тела прост, то существует семейство  $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}_\alpha} = \{\varkappa_{\alpha;\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\alpha}$  глобальных конфигураций

$$\varkappa_{\alpha;\mathfrak{X}}^R : \mathfrak{B}_\alpha \rightarrow \mathcal{E}, \quad \varkappa_{\alpha;\mathfrak{X}}^R : \mathfrak{Y} \mapsto \varkappa_{\alpha;\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{Y}),$$

каждая из которых преобразует элементарный объем, окружающий частицу  $\mathfrak{X}$  тела, в единообразную форму [6]. Под единообразной формой здесь и далее понимается форма, свободная от напряжений.

Семейство  $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}_\alpha}$  может быть построено с использованием условия (CG3). Каждая точка  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\alpha$  принадлежит одной и только одной поверхности  $\mathfrak{S}_{\alpha,i}$ , поэтому корректным является отображение  $\varkappa_{\alpha;\mathfrak{X}}^R \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}_\alpha; \mathcal{E})$ , задаваемое равенством:  $\varkappa_{\alpha;\mathfrak{X}}^R = \varkappa_{\alpha,i}^R$ , где  $i \in \mathbb{J}_\alpha$  таков, что  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{S}_{\alpha,i}$ . По построению, для точек  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{S}_{\alpha,i}$  отображения  $\varkappa_{\alpha;\mathfrak{X}}^R$  и  $\varkappa_{\alpha;\mathfrak{Y}}^R$  совпадают.

Гипотеза (CG1) позволяет выбрать на форме  $\varkappa_\alpha(\mathfrak{B}_\alpha)$  тривиальный атлас, картирующее отображение которого порождает цилиндрические координаты  $(r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha)$ . Посредством конфигурации  $\varkappa_\alpha$ , они переносятся на тело<sup>14</sup>  $\mathfrak{B}_\alpha$ . Деформация формы  $\varkappa_\alpha(\mathfrak{B}_\alpha)$  в форму  $\varkappa_{\alpha;\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{B}_\alpha)$  индуцирует цилиндрические координаты  $(R_{\alpha;\mathfrak{X}}, \Theta_{\alpha;\mathfrak{X}}, \Xi_{\alpha;\mathfrak{X}})$  на  $\varkappa_{\alpha;\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{B}_\alpha)$ , которые включим в состав декартова атласа  $\mathcal{E}$  (см.

<sup>14</sup>Это равносильно тому, что  $\varkappa_\alpha(\mathfrak{B}_\alpha)$  рассматривается как модель тела  $\mathfrak{B}_\alpha$ .

п. 4°). В координатах  $(r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha)$  и  $(R_{\alpha, \mathfrak{X}}, \Theta_{\alpha, \mathfrak{X}}, \Xi_{\alpha, \mathfrak{X}})$ , конфигурация  $\varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R$  имеет представление  $\tilde{\varkappa}_{\alpha; \mathfrak{X}}^R : (r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha) \mapsto (R_{\alpha, \mathfrak{X}}, \Theta_{\alpha, \mathfrak{X}}, \Xi_{\alpha, \mathfrak{X}})$ ,

$$R_{\alpha, \mathfrak{X}} = \sqrt{r_\alpha^2 - \rho_{\alpha, \mathfrak{X}}}, \quad \Theta_{\alpha, \mathfrak{X}} = \theta_\alpha, \quad \Xi_{\alpha, \mathfrak{X}} = \xi_\alpha, \quad (28)$$

где  $\rho_{\alpha, \mathfrak{X}} \in \mathbb{R}$ . Следовательно, для  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{S}_{\alpha, i}$  касательное отображение к  $\varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R$  в точке  $\mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}_\alpha$  имеет вид

$$T_{\mathfrak{Y}} \varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R = \frac{r_\alpha}{\sqrt{r_\alpha^2 - \rho_{\alpha, \mathfrak{X}}}} \Big|_{\mathfrak{Y}} e_{R_{\alpha, \mathfrak{X}}} |Y \otimes dr_\alpha|_{\mathfrak{Y}} + e_{\Theta_{\alpha, \mathfrak{X}}} |Y \otimes d\theta_\alpha|_{\mathfrak{Y}} + e_{\Xi_{\alpha, \mathfrak{X}}} |Y \otimes d\xi_\alpha|_{\mathfrak{Y}}, \quad (29)$$

где  $Y = \varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R(\mathfrak{Y})$ . Поле локальных конфигураций (см. п. 10°)  $\mathcal{K}_\alpha : \mathfrak{X} \mapsto T_{\mathfrak{X}} \varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R$ , определяется в точках  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\alpha$  выражением

$$\mathcal{K}_\alpha |_{\mathfrak{X}} = \frac{r_\alpha}{\sqrt{r_\alpha^2 - \rho_{\alpha, \mathfrak{X}}}} \Big|_{\mathfrak{X}} e_{R_{\alpha, \mathfrak{X}}} |X \otimes dr_\alpha|_{\mathfrak{X}} + e_{\Theta_{\alpha, \mathfrak{X}}} |X \otimes d\theta_\alpha|_{\mathfrak{X}} + e_{\Xi_{\alpha, \mathfrak{X}}} |X \otimes d\xi_\alpha|_{\mathfrak{X}}, \quad (30)$$

в котором  $X = \varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R(\mathfrak{X})$ . Отметим, что поле  $\mathcal{K}_\alpha$  является *композиционным*, т.е. его значения определяются значениями полей  $\{T_{\mathfrak{X}} \varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\alpha}$ .

Если  $h : \mathfrak{X} \mapsto (r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha)$  — катрирующее отображение, то можно записать равенство  $\rho_{\alpha, \mathfrak{X}} = \rho_{\alpha, h^{-1}(r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha)}$ . Таким образом, определяется функция  $\tilde{\rho}_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Именно,  $\tilde{\rho}_\alpha(r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha) = \rho_{\alpha, h^{-1}(r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha)}$ . Далее будем рассматривать частный случай, когда функция  $\tilde{\rho}_\alpha$  постоянна по  $\theta_\alpha$  и  $\xi_\alpha$  и определяется аппроксимацией (27). Тогда  $\tilde{\rho}_\alpha : r_\alpha \mapsto \tilde{\rho}_\alpha(r_\alpha) =: \rho_{\alpha, \mathfrak{X}}$ , где  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\alpha$  — любая точка, имеющая радиальную координату, равную<sup>15</sup>  $r_\alpha$ .

24°. В соответствии с (13) определим семейство  $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$  римановых метрик:

$$\mathcal{G}_\alpha : \mathfrak{B}_\alpha \rightarrow T^* \mathfrak{B}_\alpha \otimes T^* \mathfrak{B}_\alpha, \quad \mathcal{G}_\alpha(u, v) = \mathbf{g}(\mathcal{K}_\alpha u, \mathcal{K}_\alpha v),$$

где  $\mathbf{g}$  — евклидов метрический тензор. Выражение для  $\mathcal{G}_\alpha$  имеет вид

$$\mathcal{G}_\alpha = \frac{r_\alpha^2}{r_\alpha^2 - \rho_\alpha(r_\alpha)} dr_\alpha \otimes dr_\alpha + (r_\alpha^2 - \rho_\alpha(r_\alpha)) d\theta_\alpha \otimes d\theta_\alpha + d\xi_\alpha \otimes d\xi_\alpha. \quad (31)$$

Метрика  $\mathcal{G}_\alpha$  является *композиционной*.

Таким образом, имеем семейство  $\{(\mathfrak{B}_\alpha, \mathcal{G}_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$  римановых пространств. Ненулевые коэффициенты связности  $\nabla_\alpha$  Леви – Чивита имеют вид

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{-2\rho(r) + r\rho'(r)}{2(r^3 - r\rho(r))}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{(r^2 - \rho(r))(-2r + \rho'(r))}{2r^2},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{2r - \rho'(r)}{2r^2 - 2\rho(r)}.$$

В общем случае кривизна полученной связности нетривиальна: ее инвариант Риччи

$$S_\alpha = \frac{r_\alpha \rho_\alpha''(r_\alpha) - \rho_\alpha'(r_\alpha)}{r_\alpha^3}$$

<sup>15</sup>Иначе говоря, предполагается, что число  $\rho_{\alpha, \mathfrak{X}}$  зависит только от радиальной координаты точки  $\mathfrak{X}$ . Отображение  $\tilde{\rho}_\alpha$  устанавливает структуру расслоения многообразия  $\mathfrak{B}_\alpha$  над одномерной базой  $]r_\alpha^1, r_\alpha^2[ \subset \mathbb{R}$  с типовым слоем, гомеоморфным цилиндрической поверхности [8, 39, 41].

обращается в нуль только при  $\rho_\alpha(r_\alpha) = C_1 r_\alpha^2 + C_2$ .

Семейство материальных метрик  $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$  и метрика физического пространства  $\mathbf{g}$  определяют семейства левых и правых тензоров Коши–Грина  $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$  и  $\{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$  по формулам (16), (17).

## Заключение

Кратко резюмируем результаты настоящей работы. Моделирование послойной структуры может быть осуществлено в рамках классических (евклидовых) представлений, однако при большом числе слоев это приводит к громоздким вычислениям. В таком случае, в рамках общей идеологии механики континуума дискретная структура слоев может быть представлена непрерывными распределениями, которые характеризуют отсчетную форму структурно неоднородного тела в пространстве с неевклидовой связностью, в частности, в римановом пространстве с нетривиальной кривизной. Формализация представлений для мер деформаций осуществляется в рамках современной дифференциальной геометрии [28, 42].

## Список литературы

- [1] Кадомцев С. Б., *Геометрия Лобачевского и физика*, Изд. стереотип., URSS, М., 2015.
- [2] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., *Гравитация*, Т.1–3, Мир, М., 1977.
- [3] Epstein M., *The geometrical language of continuum mechanics*, Cambridge University Press, 2010.
- [4] Marsden J. E., Hughes T. J., *Mathematical foundations of elasticity*, Courier Corporation, 1994.
- [5] Frankel T., *The geometry of physics: an introduction*, Cambridge University Press, 2003.
- [6] Lychev S., Koifman K., “Geometric aspects of the theory of incompatible deformations. Part I. Uniform configurations”, *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*, **7**:3, (2016), 177–233.
- [7] Maugin G. A., *Material inhomogeneities in elasticity*, CRC Press, 1993.
- [8] Лычев С. А., Манжиров А. В., “Математическая теория растущих тел. Конечные деформации”, *ПММ*, **77**, (2013), 585–604.
- [9] Yavari A., “A geometric theory of growth mechanics”, *Journal of Nonlinear Science*, **20**:6, (2010), 781–830.
- [10] Maugin G. A., *Configurational Forces: Thermomechanics, Physics, Mathematics, and Numerics*, CRC Press, 2010.
- [11] Ciarletta P., Destrade M., Gower A. L., Taffetani M., “Morphology of residually stressed tubular tissues: Beyond the elastic multiplicative decomposition”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **90**, (2016), 242–253.
- [12] Гузев М. А., Мясников В. П., “Неевклидова структура поля внутренних напряжений сплошной среды”, *Дальневост. матем. журн.*, **2**:2, (2001), 29–44.
- [13] Гузев М. А., Шепелов М. А., “Пороговое поведение механических характеристик в неевклидовой модели сплошной среды”, *Дальневост. матем. журн.*, **10**:1, (2010), 20–30.
- [14] Choquet-Bruhat Y., *General relativity and the Einstein equations*, Oxford University Press, 2008.
- [15] Yavari A., Goriely A., “Riemann–Cartan geometry of nonlinear disclination mechanics”, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2012, 1081286511436137.

- [16] Yavari A., Goriely A., “Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects”, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **468**:2148, (2012), 3902–3922.
- [17] Yavari A., Marsden J. E., Ortiz M., “On spatial and material covariant balance laws in elasticity”, *Journal of Mathematical Physics*, **47**:4, (2006), 042903.
- [18] Yavari A., Ozakin A., “Covariance in linearized elasticity”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **59**:6, (2008), 1081–1110.
- [19] Youssef N. L., Sid-Ahmed A. M., “Linear connections and curvature tensors in the geometry of parallelizable manifolds”, *Reports on mathematical physics*, **60**:1, (2007), 39–53.
- [20] Гузев М. А., “Спектральные характеристики поля самоуравновешенных напряжений”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:1, (2014), 41–47.
- [21] Truesdell C., Noll W., *The non-linear field theories of mechanics*, ed. Stuart S. Antman, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [22] Xu Ma, Gonzalo R. Arce., *Computational lithography*, Wiley VCH Verlag GmbH, 2010.
- [23] *Multilayer thin films*, eds. Gero Decher, Joe B. Schlenoff, Wiley VCH Verlag GmbH, 2012.
- [24] *Mechanical self-assembly*, ed. Xi Chen, Springer Nature, 2013.
- [25] Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко, *Введение в топологию*, 2-е изд., доп., Наука. Физматлит, М., 1995, 416 с.
- [26] Бурбаки Н., *Теория множеств*, Мир, М., 1965, 456 с.
- [27] Lee J. M., *Introduction to topological manifolds*, Springer, New York, 2011.
- [28] Lee J. M., *Introduction to smooth manifolds*, Springer New York, 2012.
- [29] Schield R. T., “Inverse deformation results in finite elasticity”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, **18**:4, (1967), 490–500.
- [30] Chadwick P., “Applications of an energy-momentum tensor in non-linear elastostatics”, *Journal of Elasticity*, **5**:3-4, (1975), 249–258.
- [31] Noll W., “Materially uniform simple bodies with inhomogeneities”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **27**:1, (1967), 1–32.
- [32] Шварц Л., *Анализ*, Том 1, Мир, М., 1972, 824 с.
- [33] Лурье А.И., *Нелинейная теория упругости*, Наука, М., 1980, 512 с.
- [34] Michal A. D., “Matrix and tensor calculus with applications to mechanics, elasticity and aeronautics”, 1947.
- [35] Lychev S. A., “Geometric aspects of the theory of incompatible deformations in growing solids”, *Advanced Structured Materials*, Springer International Publishing, 2017, 327–347 pp.
- [36] Choy K., “Chemical vapour deposition of coatings”, *Progress in materials science*, **48**:2, (2003), 57–170.
- [37] Gibson Ian, Rosen David W., Stucker Brent et al., *Additive manufacturing technologies*, Springer, 2010.
- [38] Nastasi M. A., Mayer J. W., *Ion implantation and synthesis of materials*, **80**, Springer, 2006.
- [39] Лычев С. А., Марк А. В., “Осесимметричное наращивание полого гиперупругого цилиндра”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **14**, (2014), 209–226.
- [40] Трусделл К., *Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды*, Мир, М., 1975, 592 с.
- [41] Манжиров А. В., Лычев С. А., “Математическая теория растущих тел”, *Актуальные проблемы механики. 50 лет Институту проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*, Наука, М., 2015.
- [42] Abraham R., Marsden J. E., Ratiu T., *Manifolds, tensor analysis, and applications*, **75**, Springer Science & Business Media, 1988.



Поступила в редакцию  
1 июля 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (№ 15-08-06330, № 16-58-52033).

---

*Lychev S. A., Koifman K. G.* Geometric aspects of the theory of incompatible deformations for simple structurally inhomogeneous solids with variable composition. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2017. V. 17. No 2. P. 221–245.

#### ABSTRACT

The present paper is intended to formalize strain measures on non-Euclidean spaces for simple body. Use of non-Euclidean geometry methods allows one: i) to identify a global materially uniform reference shape for bodies with structural inhomogeneity, which caused by layer-by-layer formation of a solid during an additive manufacturing process; ii) to identify a global actual shape for bodies immersed into non-Euclidean physical space, in particular, for 2-dimensional solids on material surfaces. In present paper the expressions for strain measures are derived. The latter are generated by embeddings of Riemannian manifold, which represents a simple body, into Riemannian manifold, which represents a physical space. A method for description of solids with variable composition is suggested. Such a solid is considered as a family of Riemannian manifolds. Operations of partitioning and joining are defined over them. These operations characterize structural features of inhomogeneities, which are defined by a scenario of an additive manufacturing process. Specific cases for discrete and continuous structural inhomogeneity are considered in detail. A procedure for material metric synthesizing is suggested. Inclusion map is introduced. It allows one to establish relationship between the classical deformation gradient and tangent map, which is defined over smooth manifold representing a shape of the body. Essential features of suggested method for description of deformation incompatibility are demonstrated by example of hollow structurally inhomogeneous cylinder with incompressible material.

Key words: *incompatible deformations, strain measures, residual stresses, material manifold, non-Euclidian geometry.*