

УДК 517.95  
MSC2010 35K55, 35Q79

© П. Р. Месенев<sup>1</sup>, А. Ю. Чеботарев<sup>2</sup>

## Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена

Рассмотрена граничная обратная задача нахождения отражающих свойств участка границы для стационарных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена в трёхмерной области. Доказано существование квазирешения обратной задачи и получена система оптимальности. Приведён алгоритм решения задачи, эффективность которого проиллюстрирована численными примерами.

Ключевые слова: *уравнения радиационного теплообмена, квазирешение обратной задачи, метод градиентного спуска.*

### 1. Введение

Исследование математических моделей радиационного теплопереноса [1], учитывающих одновременно вклад эффектов теплопроводности и излучения, даёт теоретическую основу для инженерных решений в различных областях, таких как производство стекла [2], лазерная интерстициальная термотерапия [3] и др. Главной особенностью процессов сложного теплообмена является существенное влияние излучения на теплообмен при высоких температурах. Значительное число работ посвящено исследованию задач управления для нестационарных моделей сложного теплообмена [4–6], в которых для описания температурного поля используется нестационарное уравнение теплопроводности, а для моделирования излучения — стационарное диффузионное приближение уравнения переноса излучения. В работах [7, 8] задача оптимального управления сводится к bang-bang принципу [9]. Близкая к рассмотренной в данной статье задача управления коэффициентом отражения для полностью стационарной модели исследовалась в [10], для нестационарной модели — в [11]. Отметим также работы [12, 13], в которых рассмотрены свойства квазирешений обратных задач для уравнений тепломассопереноса.

Настоящая работа посвящена нахождению коэффициента отражения участка границы для стационарной модели по дополнительной информации о температурном поле. Доказано существование квазирешения задачи. Предложен алгоритм гра-

<sup>1</sup> Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.

<sup>2</sup> Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

Электронная почта: mesenev.pr@gmail.com (П. Р. Месенев), cheb@iam.dvo.ru (А. Ю. Чеботарев).

диентного спуска для решения экстремальной задачи и представлены результаты численных экспериментов.

## 2. Постановка обратной задачи

Нормализованная стационарная модель, описывающая процесс радиационного теплопереноса в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с липшицевой границей  $\Gamma$  (см. [14]), имеет вид

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\theta$  — нормализованная температура,  $\varphi$  — нормализованная интенсивность излучения, усреднённая по всем направлениям,  $\kappa_a$  — коэффициент поглощения. Константы  $a, b, \alpha$  описываются как:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$$

где  $k$  — теплопроводность,  $c_v$  — удельная теплоёмкость,  $\rho$  — плотность,  $\sigma$  — постоянная Стефана–Больцмана,  $n$  — индекс рефракции,  $T_{\max}$  — максимальная температура,  $\kappa = \kappa_s + \kappa_a$  — коэффициент полного взаимодействия,  $\kappa_s$  — коэффициент рассеяния. Коэффициент  $A \in [-1, 1]$  описывает анизотропию рассеивания; случай  $A = 0$  отвечает изотропному рассеиванию.

Уравнения (1) дополняются граничными условиями на  $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ , где части границы  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  не имеют пересечений.

$$\begin{aligned} \Gamma : a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) &= 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2 : \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) &= 0, \\ \Gamma_1 : \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Функции  $\gamma, \theta_b, \beta$  являются известными. Функция  $u$  характеризует отражающие свойства участка границы  $\Gamma_1$ . Предполагается, что

$$0 < u_1 \leq u \leq u_2, \quad (3)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — заданные ограниченные функции.

Обратная задача состоит в нахождении функций  $u(x), x \in \Gamma_1, \theta(x), \varphi(x), x \in \Omega$ , удовлетворяющих условиям (1)–(3), а также дополнительному условию на участке границы  $\Gamma_2$

$$\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0, \quad (4)$$

где  $\theta_0$  — известная функция. Сформулированная обратная задача (1)–(4) сводится к экстремальной задаче, состоящей в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \quad (5)$$

на решениях краевой задачи (1)–(3). Решение задачи (1)–(3), (5) называется квази-решением задачи (1)–(4).

### 3. Формализация задачи нахождения квазирешения

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условию

(i)  $\beta \in L^\infty(\Gamma)$ ;  $\gamma \in L^\infty(\Gamma_0 \cup \Gamma_2)$ ;  $u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma_1)$ ;  $0 < \beta_0 \leq \beta$ ;  $0 < \gamma_0 \leq \gamma$ ;  $\beta_0, \gamma_0 = Const$ ,  $0 \leq u_1 \leq u_2$ .

Пусть  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = W_2^1(\Omega)$ ,  $Y = V \times V$ . Пространство  $H$  отождествляем с сопряжённым пространством  $H'$  так, что  $V \subset H = H' \subset V'$ . Определим  $(f, v)$  как значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$ , совпадающее со скалярным произведением в  $H$ , если  $f \in H$ ,  $\|f\|^2 = (f, f)$ . Пространство  $U = L^2(\Gamma_1)$  является пространством управлений;  $U_{ad} = \{u \in U, u_1 \leq u \leq u_2\}$  — множество допустимых управлений.

Пусть  $v$  — произвольный элемент множества  $H^1(\Omega)$ . Определим операторы

$$\begin{aligned} A_{1,2}: V &\rightarrow V', \quad F: V \times U \rightarrow V', \quad f \in V', \quad g \in V'. \\ (A_1\theta, v) &= a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} \gamma\varphi v d\Gamma, \\ (f, v) &= \int_{\Gamma} \beta\theta_b v d\Gamma, \quad (g, v) = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma, \\ (F(\varphi, u), v) &= \int_{\Gamma_1} u(\varphi - \theta_b^4) v d\Gamma. \end{aligned}$$

Пару  $\{\theta, \varphi\} \in Y$  будем называть слабым решением задачи (1), (2), если

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (6)$$

Отметим, что в силу вложенности  $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$  выражение  $(|\theta|\theta^3, v)$  имеет смысл для любой функции  $v \in H^1(\Omega)$ .

Задача нахождения квазирешения состоит в минимизации функционала  $J(\theta)$ , определённого на компоненте  $\theta$  решения системы (6). Таким образом

$$J(\theta) \rightarrow \inf, \quad \text{где } \{\theta, \varphi\} \text{ решение (6), соответствующее функции } u \in U_{ad}. \quad (7)$$

Пара  $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$ , соответствующая минимуму  $J$  и отвечающая функции  $\hat{u}$ , называется оптимальным состоянием. В таком случае  $\hat{u}$  называется квазирешением обратной задачи (1)–(4).

### 4. Анализ экстремальной задачи

Для доказательства разрешимости задачи (7) нам необходимо также установить некоторые свойства решения задачи (1), (2).

**Лемма 1** [15]. Пусть выполняется условие (i). Тогда для каждого  $u \in U_{ad}$  существует единственное слабое решение  $\{\theta, \varphi\}$  для задачи (1), (2) и справедливы оценки

$$M_1 \leq \theta \leq M_2, \quad M_1^4 \leq \varphi \leq M_2^4, \quad (8)$$

$$\|\nabla\varphi\|^2 \leq C. \quad (9)$$

Здесь  $M_1 = \text{ess inf } \theta_b$ ,  $M_2 = \text{ess sup } \theta_b$  и константа  $C > 0$  зависит только от  $a, b, \alpha, \kappa_a, \beta, \gamma, \|u\|_{L^\infty(\Gamma)}$  и области  $\Omega$ .

На основе оценок (8) и (9) аналогично тому, как это сделано в работе [10], доказывается разрешимость экстремальной задачи (7).

**Теорема 1.** Пусть выполняется условие (i). Тогда существует хотя бы одно решение задачи (7).

Для вывода системы оптимальности покажем дифференцируемость функционала  $J$ .

**Лемма 2.** Функционал  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируем по Фреше.

*Доказательство.* Покажем, что для произвольной функции  $\theta \in V$  выполняется равенство

$$J(\theta + h) = J(\theta) + J'(\theta)\langle h \rangle + r(\theta, h) \quad \forall h \in V, \quad \text{где } J'(\theta)\langle h \rangle = \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0) h d\Gamma, \quad (10)$$

где для остаточного члена  $r(\theta, h)$  справедливо соотношение

$$\frac{|r(\theta, h)|}{\|h\|_V} \rightarrow 0 \quad \text{при } \|h\|_V \rightarrow 0. \quad (11)$$

Перепишем (10) в виде

$$\frac{1}{2} \|\theta + h - \theta_0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 = \frac{1}{2} \|\theta - \theta_0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 + (\theta - \theta_0, h)_{L^2(\Gamma_2)} + \frac{1}{2} \|h\|_{L^2(\Gamma_2)}^2.$$

Согласно теореме о следах  $\|h\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C \|h\|_V$ , где  $C$  не зависит от  $h$ . Поэтому

$$\frac{r(\theta, h)}{\|h\|_V} \leq \frac{1}{2} C^2 \|h\|_V \rightarrow 0 \quad \text{при } \|h\|_V \rightarrow 0.$$

□

Вывод условий оптимальности основан на принципе множителей Лагранжа для выпуклых гладких задач минимизации.

**Теорема 2.** Пусть  $\hat{y} = \{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\} \in Y$ ,  $\hat{u} \in U_{ad}$  — решение экстремальной задачи (7). Тогда существует пара  $p = (p_1, p_2)$ ,  $p \in Y$  такая, что тройка  $(\hat{y}, \hat{u}, p)$  удовлетворяет условиям

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a (b p_1 - p_2) = f_c, \quad (f_c, v) = - \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \quad (12)$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a (p_2 - b p_1) = g_c((p_2, \hat{u}), v), \quad g_c((p_2, \hat{u}), v) = - \int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma, \quad (13)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2 (\hat{\varphi} - \theta_b^A)(u - w) \leq 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (14)$$

Доказательство. Перепишем уравнения (6) в виде

$$H(y, u) = 0, \quad y = \{\theta, \varphi\} \in Y,$$

где

$$H : Y \times U \rightarrow Y',$$

$$H(y, u) = \{A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) - f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) - g\}.$$

Заметим, что для всех  $u \in U_{ad}$ , отображение  $y \rightarrow J(\theta)$  и  $y \rightarrow H(y, u)$  непрерывно дифференцируемо в окрестности  $\mathcal{O}(\hat{y})$  точки  $\hat{y}$ . Непрерывная дифференцируемость членов в  $H$  следует из непрерывной дифференцируемости функции  $t \in \mathbb{R} \rightarrow |t|t^3$ , а также из непрерывности вложения  $V \subset L^6(\Omega)$ . Отображение  $u \rightarrow H(y, u)$  непрерывно из  $U \rightarrow Y'$  и аффинно. В [10] показано равенство  $\text{Im}H'_y(\hat{y}, \hat{u}) = Y$ , что влечёт за собой невырожденность условий оптимальности.

Рассмотрим функцию Лагранжа  $L(y, u, p) = J(\theta) + (H(y, u), p)$ , где  $y, p \in Y, u \in U_{ad}$ . Согласно принципу Лагранжа [16, Гл.2, Теорема 1.5] существует пара  $p = \{p_1, p_2\} \in Y$  такая, что

$$(L_\theta, \zeta) = \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0)\zeta d\Gamma + (A_1\zeta + 4b\kappa_a|\hat{\theta}|^3\zeta, p_1) - 4\kappa_a(|\hat{\theta}|^3\zeta, p_2) = 0 \quad \forall \zeta \in V, \quad (15)$$

$$(L_\varphi, \zeta) = (A_2\zeta + \kappa_a\zeta, p_2) - b\kappa_a(\zeta, p_1) + \int_{\Gamma_1} \hat{u}\zeta p_2 = 0 \quad \forall \zeta \in V, \quad (16)$$

$$(L_u, \tau) = \int_{\Gamma_1} \tau(\hat{\varphi} - \theta_b^4)p_2 d\Gamma \leq 0, \quad \tau := \hat{u} - w \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (17)$$

Сопряжённые уравнения (12), (13) являются прямым следствием вариационных равенств (15) и (16).  $\square$

## 5. Численные эксперименты

Пусть функционал  $J(\theta)$  удовлетворяет условиям, указанным в разд. 4. Введём переобозначение  $\hat{J}(u) := J(\theta(u))$ ,  $\hat{J} : L^2(\Gamma_1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Здесь  $\theta(u)$  — температурное поле задачи (1)–(2), отвечающее управлению  $u \in L^2(\Gamma_1)$ . Согласно формуле (14) градиент функционала  $\hat{J}(u)$  [8] имеет вид

$$\hat{J}'(u) = (\varphi(u) - \theta_b^4)p_2,$$

где  $\varphi(u)$  есть интенсивность излучения,  $p_2$  — переменная сопряжённой системы.

Предлагаемый алгоритм решения выглядит так:

---

 Алгоритм градиентного спуска с проекцией
 

---

- 1: Выбираем значение градиентного шага  $\lambda$ ,
  - 2: выбираем количество итераций  $N$ ,
  - 3: выбираем произвольное  $u_0 \in U_{ad}$ ,
  - 4: **for**  $k \leftarrow 0, 1, 2, \dots, N$  **do**:
  - 5:   для полученного  $u_k$  рассчитываем состояние  $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$  из (6);
  - 6:   рассчитываем значение функционала качества  $J(\theta_k)$  из (5);
  - 7:   рассчитываем сопряжённое состояние  $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$  из уравнений (12)–(13),  
где  $\hat{\theta} = \theta_k, \hat{u} = u_k$ ;
  - 8:   пересчитываем управление  $u_{k+1} = P_{ad} [u_k - \lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}]$ .
- 

Значение параметра  $\lambda$  выбирается согласованным со значением градиента  $J'(u_k) = (\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}$  таким образом, чтобы значение  $\lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}$  определяло значимую поправку для  $u_k$ . В экспериментах, приведённых ниже, значение параметра  $\lambda = 20$ .

Количество итераций  $N$  выбирается достаточным для выполнения условия  $J(\theta_{N-1}) - J(\theta_N) < 10^{-15}$ . Эксперименты показывают хорошее восстановление функции  $u$  при  $N > 10^5$ .

Оператор проекции  $P_{ad}: U \rightarrow U_{ad}$  определён как:

$$P_{ad}[v] = \begin{cases} u_1, & \text{если } v \leq u_1 \\ v, & \text{если } u_1 < v < u_2 \\ u_2, & \text{если } v \geq u_2 \end{cases}$$

Приведём далее примеры расчётов для двумерной области. Положим  $\Omega = \{(x, y), 0 \leq x, y \leq l\}$ ,  $l = 1$  см. Граница  $\partial\Omega$  состоит из участков:

$$\Gamma_0 = \{x = \{0, 1\}, y \in [0, 1]\},$$

$$\Gamma_1 = \{x \in [0, 1], y = 0\} - \text{участок с неизвестными отражающими свойствами,}$$

$$\Gamma_2 = \{x \in [0, 1], y = 1\} - \text{участок наблюдения.}$$

Также будем далее считать, что  $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$ ,  $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\beta = 0.00005[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\kappa = 1[\text{см}^{-1}]$ ,  $\kappa_s = 0$ ,  $A = 0$ ,  $\gamma = 0.3$ . Указанные параметры соответствуют стеклу [8]. Температуру на границе  $\Omega$  положим равной  $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$ .

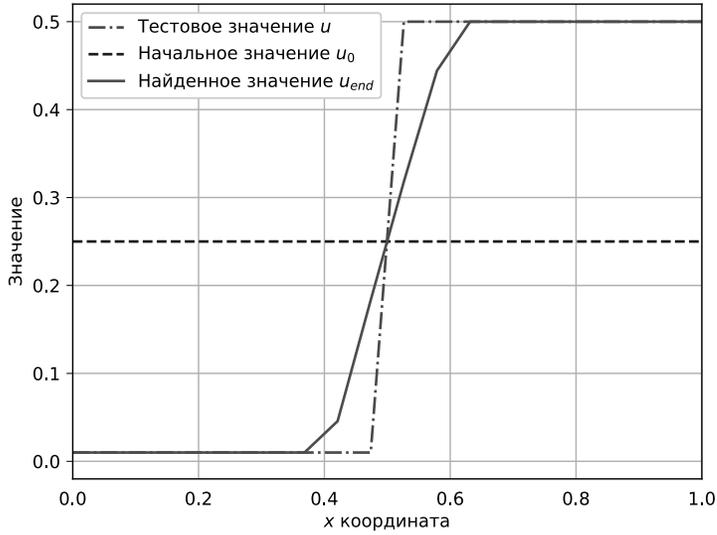
Для первого эксперимента выберем тестовое значение функции  $u$  (рис. 1(а)):

$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leq 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases}$$

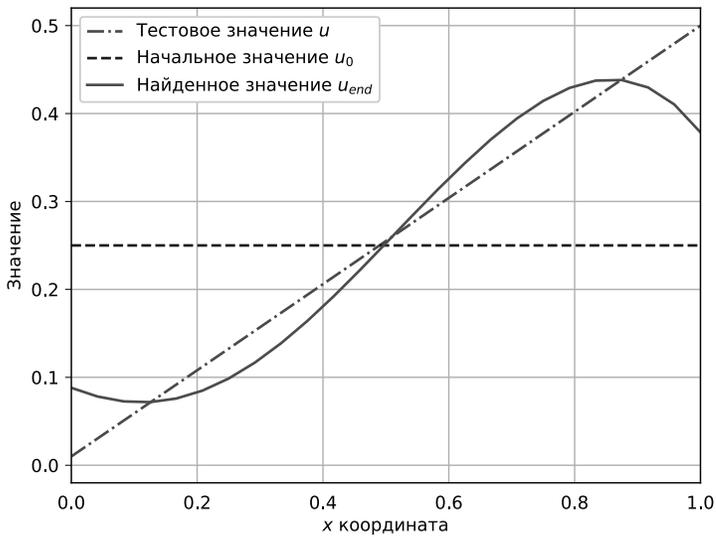
и для второго эксперимента (рис. 1(б)):

$$u(x) = 0.49x + 0.01.$$

Вычислим решение прямой задачи (1)–(2) для этих случаев. Полученное температурное поле на участке наблюдения  $\Gamma_2$  выберем в качестве  $\theta_0$ . Далее, применяя

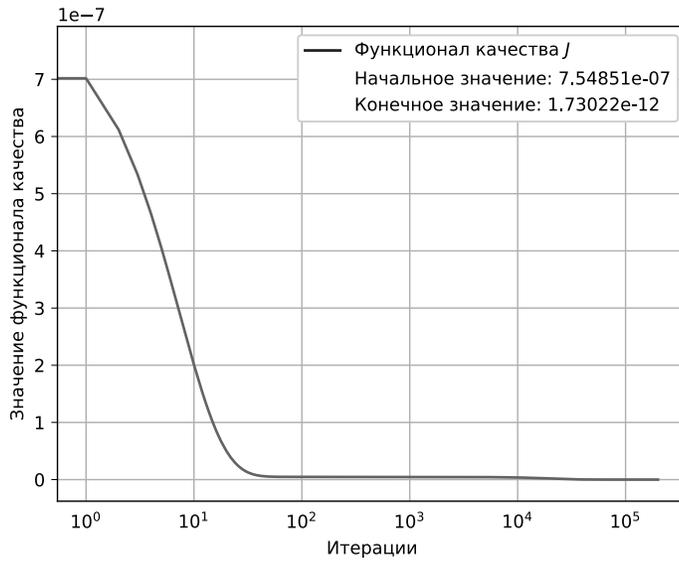


(а) Первый эксперимент

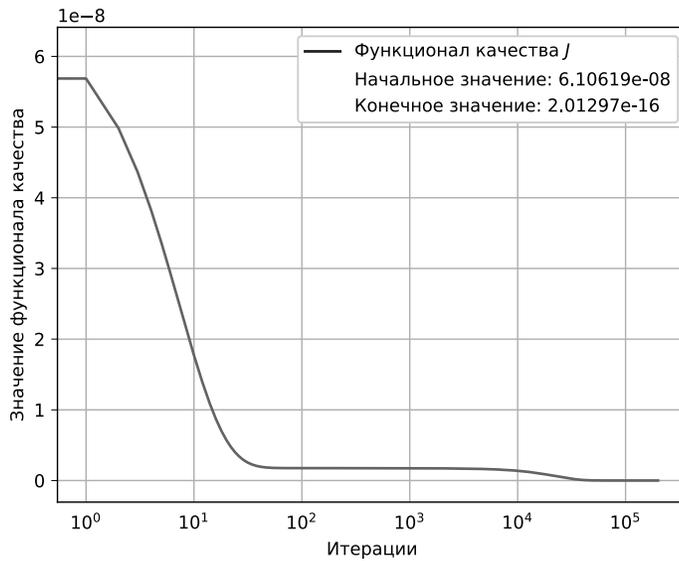


(б) Второй эксперимент

Рис. 1. Тестовая функция  $u$ , начальная  $u_0$ , найденная функция  $u_{end}$ .



(а) Первый эксперимент



(б) Второй эксперимент

Рис. 2. Динамика функции  $\hat{J}(u)$  по итерациям.

предложенный алгоритм, находим квазирешение обратной задачи (1)–(4). Эффективность алгоритма, а также значение  $u_0$  в первом и втором случаях иллюстрируются рис. 1. На рис. 2 показана динамика функционала качества по итерациям.

**Замечание.** В предложенных примерах мы использовали  $1.5 \cdot 10^5$  итераций для нахождения квазирешения  $u$ . В то же время температурное поле на участке наблюдения  $\Gamma_2$  становится близким к  $\theta_0$  уже на  $10^2$  итерации. Также наблюдается существенное падение скорости уменьшения функционала качества с каждой итерацией после того, как среднее значение найденной функции становится близким к тестовой функции.

## Список литературы

- [1] M. F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, 2003.
- [2] Clever D. and Lang J., “Optimal control of radiative heat transfer in glass cooling with restrictions on the temperature gradient”, *Optim. Control Appl. Meth.*, **33**:2, (2012), 157–175.
- [3] O. Tse, R. Pinnau, N. Siedow, “Identification of temperature dependent parameters in laser–interstitial thermo therapy”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **22**:9, (2012), 1–290.
- [4] N. Siedow O. Tse, R. Pinnau., “Identification of temperature dependent parameters in a simplified radiative heat transfer”, *Aust. J. Basic Appl. Sci.*, 2011, 7–14.
- [5] R. Pinnau O. Tse, “Optimal control of a simplified natural convection–radiation model”, *Commun. Math. Sci.*, 2013, 679–707.
- [6] G. Thomes, R. Pinnau, M. Seaid, T. Gotz, and A. Klar., *Trans. Theory Stat Phys.*, **31**:4–6, (2002), 513–529.
- [7] Alexander Yu. Chebotarev, Andrey E. Kovtanyuk, Gleb V. Grenkin, Nikolai D. Botkin, and Karl Heinz Hoffmann, “Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative–conductive heat transfer model”, *Applied Mathematics and Computation*, **289**:10, (2016), 371–380.
- [8] A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, G. Grenkin, N. Botkin, and K.-H. Hoffman “Boundary optimal control problem of complex heat transfer model”, *J. Math. Anal. Appl.*, **433**:2, (2016), 1243–1260.
- [9] K. Glashoff and E. Sachs, “On theoretical and numerical aspects of the bang–bang–principle”, *Numer. Math.*, **29**:1, (1977), 93–113.
- [10] Kovtanyuk Andrey E., Chebotarev Alexander Yu., Botkin Nikolai D., and Hoffmann Karl-Heinz, “Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive convective radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **412**, (2014), 520–528.
- [11] Г. В. Гренкин, “Оптимальное управление в нестационарной модели сложного теплообмена”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:2, (2014), 160–172.
- [12] Р. В. Бризицкий, Ж. Ю. Саричкая, “Устойчивость решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции при условии Дирихле”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:12, (2016), 2042–2053.
- [13] Г. В. Алексеев, Р. В. Бризицкий, Ж. Ю. Саричкая, “Оценки устойчивости решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **19**:2, (2016), 3–16.
- [14] R. Pinnau, “Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by the  $sp_1$ -system”, *Comm. Math. Sci.*, **5**:4, (2007), 951–969.
- [15] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, and Karl-Heinz Hoffman, “Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **20**, (2015), 776–784.

- [16] A. D. Ioffe and V. M. Tikhomirov, *Theory of extremal problems*, North Holland, Amsterdam, 1979.

Поступила в редакцию  
20 февраля 2018 г.

---

*Mesenev P. R., Chebotarev A. Yu.* Boundary inverse problem for conductive-radiative equations of heat transfer. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2018. V. 18. No 1. P. 75–84.

#### ABSTRACT

The boundary inverse problem of finding the reflecting properties of the boundary region for stationary radiation-conductive heat transfer equations in the three-dimensional region is considered. The existence of a quasi-solution of the inverse problem is proved and an optimality system is obtained. An algorithm for solving a problem is presented, the effectiveness of which is illustrated by numerical examples.

Key words: *Radiative heat transfer equations, quasi-solution of the inverse problem, gradient descent method.*