Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 2. С. 233–241

УДК 517.54
MSC2010 31B99

© Е. Г. Прилепкина[1,2], А. С. Афанасьева-Григорьева[2]

О конформной метрике кругового кольца в n-мерном евклидовом пространстве

Методами симметризации показано, что геодезическая линия относительно конформной метрики кругового кольца в евклидовом пространстве расположена в некотором двумерном секторе. Как следствие установлена точная форма геодезической линии кольца в случае, когда точки расположены на сфере симметрии. Доказаны точные нижние оценки конформной метрики кругового кольца. В качестве приложения приведена теорема искажения для квазирегулярных отображений.

Ключевые слова: *конформный модуль, семейство кривых, симметризация, квазирегулярные отображения, круговое кольцо, теоремы искажения.*

1. Введение и предварительные сведения

Всюду ниже приняты следующие обозначения:
$\mathbf{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $n \geqslant 2$, состоящее из точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$;
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярное произведение $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$;
$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ — модуль вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$;
$\{\mathbf{e}_i\}$ — стандартный базис, $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots 0)$, 1 на месте i, $i = 1, \ldots n$;
$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{x} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ — отрезок, соединяющий $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$;
$B(\mathbf{x}_0, t) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < t\}$ — шар с центром $\mathbf{x}_0$ радиусом t;
$P(\mathbf{a}, t) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = t\} \cup \{\infty\}$ — гиперплоскость с нормалью $\mathbf{a}$;
$S(\mathbf{x}_0, t) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = t\}$ — гиперсфера с центром $\mathbf{x}_0$ радиусом t;
$K(t,\ T) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : t < |\mathbf{x}| < T\}$ — круговое кольцо с центром в начале;
$K_r = K(r, 1/r)$, $0 < r < 1$ — кольцо, симметричное относительно гиперсферы $S(0, 1)$,
$\alpha_{\mathbf{xy}}$ — острый угол между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, $\cos\alpha_{\mathbf{xy}} = |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|/(|\mathbf{x}||\mathbf{y}|)$;
$P_{0\mathbf{xy}} = \{t\mathbf{x} + u\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : t, u \in \mathbf{R}\}$ — двумерная плоскость, проходящая через $0, \mathbf{x}, \mathbf{y}$;
$\mathbf{n}_{0\mathbf{xy}}$ — точка, лежащая на плоскости $P_{0\mathbf{xy}}$ и ортогональная $\mathbf{x}$, $\mathbf{n}_{0\mathbf{xy}} \cdot \mathbf{x} = 0$.

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.
Электронная почта: pril-elena@yandex.ru (Е. Г. Прилепкина), a.s.afanasevagrigoreva@yandex.ru (А. С. Афанасьева-Григорьева).

$R_{0\mathbf{xy}}$ — замкнутое полупространство, ограниченное гиперплоскостью $P(\mathbf{n}_{0\mathbf{xy}},0)$ и содержащее точку $\mathbf{y}$;

$U_{0\mathbf{xy}}=R_{0\mathbf{xy}}\cap R_{0\mathbf{yx}}$ — замкнутый n-мерный угол между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Символ $\triangle(E,F,G)$ обозначает семейство кривых в области G, соединяющих E с F, $E\subset\overline{G}$, $F\subset\overline{G}$. Если Γ — семейство кривых в $\mathbf{R}^n$, то его *n-модулем* называется величина

$$M_n(\Gamma) = \inf\int\limits_{\mathbf{R}^n}\rho^n dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho:\mathbf{R}^n\to[0,\infty]$ таким, что неравенство $\int\limits_{\gamma}\rho ds\geqslant 1$ выполняется для каждой кривой $\gamma\in\Gamma$.

Для произвольной области G из $\mathbf{R}^n$ и любых точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in G$ конформная метрика μ_G [1, с. 103] определяется равенством

$$\mu_G(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \inf_{C_{\mathbf{xy}}} M_n(\triangle(C_{\mathbf{xy}},\ \partial G;\ G)), \tag{1}$$

где инфимум берется по всем кривым $C_{\mathbf{xy}}$ в G, соединяющим $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Из свойств n-модуля семейства кривых вытекает, что метрика μ_G является конформным инвариантом и не увеличивается с расширением области. А именно

$$D\subset G\Rightarrow\mu_G(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqslant\mu_D(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x},\mathbf{y}\in D$.

Метрика $\mu_G(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ была введена в работе Гал в 1960 году [2]. Существуют также другие типы метрик, полезных при изучении свойств различных классов пространственных отображений. Наиболее подробно такие метрики изучаются в работах Вуоринена [1].

Для вычисления конформной метрики необходимо найти кривую, на которой достигается инфимум в (1). Мы будем называть такую кривую *геодезической линией.* В случае единичного шара $B(0,1)$ геодезической линией является дуга окружности, лежащей в плоскости $P_{0\mathbf{xy}}$ и ортогональной единичной гиперсфере. Алгоритм нахождения геодезической линии шара заключается в следующем: сперва применяется конформное отображение, сохраняющее единичный шар и переводящее произвольные точки шара в точки, расположенные на диаметре, а затем используется сферическая симметризация. Этот алгоритм приводит к формуле [1, с. 104]

$$\mu_{B^n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \gamma_n(1/th(0.5\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})),$$

где $\gamma_n(s)$ — ёмкость кольца Греча, $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — гиперболическая метрика единичного шара.

Поскольку в евклидовом пространстве конформные отображения ограничены мебиусовыми отображениями, задача нахождения геодезической линии в случае кругового кольца K_r значительно усложняется. В настоящей заметке методами симметризации мы показываем, что геодезическая линия кольца K_r расположена в некотором двумерном секторе в плоскости $P_{0\mathbf{xy}}$ (теорема 1). Как следствие отсюда вытекает, что геодезической линией K_r для точек, расположенных на сфере симметрии $S(0,1)$, является дуга единичной окружности плоскости $P_{0\mathbf{xy}}$. В силу конформной инвариантности модуля последний факт равносилен изопериметрическому неравенству для конформной ёмкости (теорема 2). В теореме 3 мы устанавливаем точные нижние оценки конформной метрики кругового кольца. Доказательства теорем используют метод симметризации. Сферы применения метода симметризации достаточно широко представлены в литературе (см., например, [3–5]). Для открытого или замкнутого множества $A\subset\mathbf{R}^n$ *симметризационным преобразованием* ST называют переход от A к специально построенному множеству $ST(A)$, при котором не увеличиваются некоторые характеристики A. Нам понадобится несколько видов симметризационных преобразований: сферическая симметризация, симметризация относительно гиперсферы и поляризация. Для удобства читателя приведем необходимые нам определения.

Рассмотрим $(n-k)$-мерную плоскость $T\subset\mathbf{R}^n$, $1\leqslant k\leqslant n-1$, и замкнутую полуплоскость T_s, $T_s\subset T$. Полуплоскость T_s определяет *k-мерную сферическую симметризацию* $S\Phi_k(A)$ следующим образом.

Пусть J — граница T_s относительно T, для каждого $x\in J$ и $r>0$ определим $W(x,r)=S(x,r)\cap M(x)$, где через $M(x)$ обозначена $(k+1)$-мерная плоскость, проходящая через x перпендикулярно J. Если $r=0$, то полагаем $W(x,\ r)=\{x\}$.

Определим множество $S\Phi_k(A)$ такое, что $W(x,\ r)\cap S\Phi_k(A)$ есть шапочка (замкнутая или открытая, согласно A) на сфере $W(x,\ r)$, удовлетворяющая условиям

1) центр ее – точка $W(x,\ r)\cap T_s$;

2) $m_k(W(x,\ r)\cap S\Phi_k(A)) = m_k(W(x,\ r)\cap A)$.

Причем предполагается, что если $W(x,\ r)\cap A=\emptyset$, тогда $W(x,\ r)\cap S\Phi_k(A)=\emptyset$. Здесь m_k означает k-мерную меру Лебега.

Симметризацией множества A относительно единичной гиперсферы $S(0{,}1)$ [3], [6] называется переход к множеству $S_1(A)$, построенному следующим образом. Для каждого единичного вектора $v\in S(0,1)$ обозначим через $K(v)$ луч с направляющим вектором v и началом в нуле. Пусть $\mu_v(A)=\exp\int\limits_{A\cap K(v)}\frac{dr}{r}$ — логарифмическая мера пересечения $K(v)$ и A. В случае пустого пересечения $K(v)$ и A мы полагаем, что множество $K(v,A)$ также пусто. В остальных случаях множество $K(v,A)$ определяется как открытый или замкнутый (согласно A) интервал на луче $K(v)$, симметричный относительно гиперсферы $S(0,1)$ и логарифмической меры $\mu_v(A)$. Тогда

$$S_1(A) = \bigcup_{v\in S(0,1)} K(v,A).$$

Поляризацией множества A относительно гиперсферы $S(\mathbf{a},\rho)$ [7, 8] называется преобразование A в множество P^-A (или P^+A),

$$P^+A = (A\cap A^*)^-\cup(A\cup A^*)^+,\quad P^-A = (A\cap A^*)^+\cup(A\cup A^*)^-.$$

Здесь

$$A^+ = A^+(\rho) = \{\mathbf{x}\in A :\mid \mathbf{x}-\mathbf{a}\mid\leqslant\rho\},$$

$$A^- = A^-(\rho) = \{\mathbf{x} \in A :| \mathbf{x} - \mathbf{a} | \geqslant \rho\},$$

$$A^* = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{x}^* \in A\}$$

и $\mathbf{x}^*$ симметрична точке $\mathbf{x}$ относительно сферы $S(a,\rho)$, то есть $\mathbf{x}^* = \rho^2\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2$. Аналогично определяется поляризация относительно гиперплоскости.

Пусть $ST(A)$ — одно из преобразований: сферическая симметризация, симметризация относительно гиперсферы или поляризация. Тогда справедливо следующее утверждение. Если $A \subset G$ и область G сохраняется при преобразовании ST, $G = ST(G)$, то

$$M_n(\triangle(A, \partial G;\ G)) \geqslant M_n(\triangle(ST(A), \partial G;\ G)).$$

Доказательство соответствующего утверждения с учетом равенства емкости и модуля [9, с. 44] содержится в работах [3, 5–7, 10].

Конформная метрика μ_G применяется при изучении оценок искажения в теории квазирегулярных отображений. Отображение $f\colon\ G \to \mathbf{R}^n$ называется *квазирегулярным*, если $f \in ACL^n$ и если существует константа $K \geqslant 1$ такая, что

$$|f'(x)|^n \leqslant K J_f(x), \qquad |f'(x)| = \max_{|h|\,=\,1} |f'(x)h|$$

п. в. в G. Наименьшая константа $K \geqslant 1$, для которой справедливо это неравенство, называется *внешней дилатацией* f и обозначается через $K_O(f)$.

Если f квазирегулярно, то наименьшая константа $K \geqslant 1$, для которой неравенство

$$J_f(x) \leqslant K\ l(f'(x)), \qquad l(f'(x)) = \min_{|h|\,=\,1} |f'(x)h|$$

имеет место п. в. в G, называется *внутренней дилатацией* и обозначается $K_I(f)$. *Максимальная дилатация* — это число $K(f) = \max\{K_I(f),\ K_O(f)\}$. Если $K(f) \leqslant K$, то f называется K-квазирегулярным. В случае, когда f является гомеоморфизмом и выполняются вышеприведенные соотношения с заменой $J_f(x)$ на $|J_f(x)|$, отображение f называется *квазиконформным.*

Применение конформной метрики в теории квазирегулярных отображений обусловлено тем, что эти отображения "почти" сохраняют конформную метрику области. Если $f : G \to \mathbf{R}^n$ — не постоянное квазирегулярное отображение, то

$$\mu_{fG}(f(\mathbf{x}),\ f(\mathbf{y})) \leqslant K_I(f)\mu_G(\mathbf{x},\ \mathbf{y}); \qquad \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in G.$$

Если дополнительно f является квазиконформным отображением, то

$$\mu_{fG}(f(\mathbf{x}),\ f(\mathbf{y})) \geqslant \mu_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})/K_0(f).$$

В качестве приложения полученных оценок конформной метрики в теореме 4 мы приводим теорему искажения для квазирегулярного отображения кольца.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{x} \in K_r$, $\mathbf{y} \in K_r$, $|\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{y}|$ *и* $x_m = \min(|\mathbf{x}|, 1)$, $y_M = \max(|\mathbf{y}|, 1)$. *Тогда*

$$\mu_{K_r}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \inf_{\gamma_{\mathbf{xy}}} M_n(\triangle(\gamma_{\mathbf{xy}},\ \partial K_r;\ K_r)),$$

где инфимум берется по всем кривым $\gamma_{\mathbf{xy}}$, *соединяющим* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *и лежащим в замкнутом двумерном секторе* $P_{0\mathbf{xy}} \cap \overline{K(x_m, y_M)} \cap U_{0\mathbf{xy}}$.

Доказательство. Пусть $C_{\mathbf{xy}}$ — произвольная кривая, лежащая в кольце K_r и соединяющая $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Согласно (1) для доказательства теоремы достаточно построить последовательность симметризационных преобразований ST, $ST(K_r) = K_r$, результат применения которых содержит некоторую кривую $\gamma_{\mathbf{xy}}$, $\mathbf{x} \in \gamma_{\mathbf{xy}}$, $\mathbf{y} \in \gamma_{\mathbf{xy}}$, $\gamma_{\mathbf{xy}} \subset P_{0\mathbf{xy}} \cap \overline{K(x_m, y_M)} \cap \overline{U_{0\mathbf{xy}}}$. Если точки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ расположены на одном луче с началом в нуле, то одномерная сферическая симметризация относительно этого луча приводит к нужному нам утверждению. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\alpha_{\mathbf{xy}} > 0$.

Обозначим через m прямую, параллельную отрезку $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ и проходящую через 0. Пусть $A_{\mathbf{xy}} \subset P_{0\mathbf{xy}}$ — полуплоскость с границей m, содержащая точки $0, \mathbf{x}, \mathbf{y}$. Результат двумерной сферической симмметризации относительно полуплоскости $A_{\mathbf{xy}}$ кривой $C_{\mathbf{xy}}$ содержит некоторую кривую $\gamma^1_{\mathbf{xy}}$, лежащую в полуплоскости $A_{\mathbf{xy}}$.

На следующем этапе мы несколько раз применяем поляризацию относительно гиперплоскости (в случае $\alpha_{\mathbf{xy}} = \pi$ данный этап нужно пропустить). Первая поляризация — поляризация относительно гиперплоскости $P(\mathbf{n}_{0\mathbf{xy}}, 0)$, причем объединение происходит в сторону полупространства, содержащего $\mathbf{y}$. Затем последовательно применяется поляризация относительно гиперплоскости $P(\mathbf{n}_{0\mathbf{v}_k\mathbf{y}}, 0)$ (с объединением в сторону $\mathbf{y}$), где

$$\mathbf{v}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{v}_{k-1}}{|\mathbf{v}_{k-1}|} + \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right), \quad \mathbf{v}_0 = -\mathbf{x}, \quad k = 1, \ldots, l,$$

и l выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_{\mathbf{v}_l\mathbf{y}} < \alpha_{\mathbf{xy}}$. И последняя поляризация относительно гиперплоскости — поляризация относительно $P(\mathbf{n}_{0\mathbf{yx}}, 0)$ с объединением в сторону $\mathbf{x}$. В итоге применения этих поляризаций результат преобразования кривой $\gamma^1_{\mathbf{xy}}$ содержит некоторую кривую $\gamma^2_{\mathbf{xy}} \subset P_{0\mathbf{xy}} \cap U_{0\mathbf{xy}}$.

На последнем этапе преобразований необходимо добиться того, чтобы результат преобразования кривой $\gamma^2_{\mathbf{xy}}$ содержал некоторую кривую $\gamma_{\mathbf{xy}}$, лежащую в секторе $P_{0\mathbf{xy}} \cap \overline{K(x_m, y_M)} \cap U_{0\mathbf{xy}}$. Если $x_m = y_M$ (то есть $|\mathbf{x}| = \mathbf{y} = 1$), то достаточно применить симметризацию относительно гиперферы $S(0, 1)$. В случае $x_m < y_M$ мы несколько раз применяем поляризацию относительно гиперсферы. Сперва используется поляризация относительно $S(0, x_m)$, причем объединение происходит в сторону бесконечности. Затем последовательно применяются поляризации относительно гиперсфер $S(0, t_i)$ (с объединением в сторону начала), где

$$t_i = \sqrt{t_{i-1} y_M}, \quad t_0 = 1, \quad i = 1, \ldots, p,$$

и p выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $\left|y_M - \frac{y_M^2}{t_i}\right| < |y_M - x_m|$. И наконец последняя поляризация относительно $S(0, y_M)$ с объединением в сторону начала приводит к требуемому результату. □

В теореме 1 доказано, что в случае $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1$,

$$\mu_{K_r}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = M_n(\triangle(l_{\mathbf{xy}},\ \partial K_r;\ K_r)), \tag{2}$$

где $l_{\mathbf{xy}}$ — более короткая дуга единичной окружности в плоскости $P_{0\mathbf{xy}}$, соединяющая $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Этот результат можно переписать в терминах конформной ёмкости конденсатора. Напомним, что конденсатором $C = (E, F)$ называется пара непустых непересекающихся замкнутых множеств, а E, F называются пластинами. Конформная ёмкость конденсатора совпадает с модулем семейства кривых, соединяющих его пластины [9, с. 44].

Теорема 2. *Среди всех конденсаторов C в $\overline{\mathbf{R}}^n$, одна пластина которых содержит шары $\overline{B(-\,\mathbf{e}_1, \rho)}$ и $\overline{B(\mathbf{e}_1, \rho)}$, а другая представляет собой континуум, соединяющий точки $\mathbf{a} = t\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{b} = u\mathbf{e}_n$, $t > 0$, $u > 0$, наименьшей конформной ёмкостью обладает конденсатор C^* с пластинами $\overline{B(-\,\mathbf{e}_1, \rho)} \cup \overline{B(\mathbf{e}_1, \rho)}$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.*

Доказательство. Если считать плоскость $P_{0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_n}$ комплексной z-плоскостью, то нетрудно увидеть, что дробно-линейное отображение

$$f(z) = \frac{z + \sqrt{1 - \rho^2}}{-\,z + \sqrt{1 - \rho^2}}$$

преобразует $\infty \to -\,1$, $0 \to 1$, $-\,1 + \rho \to r$ и $-\,1 - \rho \to -\,r$. Любое дробно-линейное отображение представляет собой суперпозицию инверсий, сдвигов и отражений. Таким образом, существует мёбиусово отображение, переводящее $\overline{\mathbf{R}}^n \setminus (\overline{B(-\,\mathbf{e}_1, \rho)} \cup \overline{B(\mathbf{e}_1, \rho)})$ в некоторое кольцо K_r и точки $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ в точки, расположенные на единичной сфере. Воспользовавшись конформной инвариантностью емкости и равенством (2), получаем требуемый результат. □

Для $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ обозначим $l_\alpha = \{\mathbf{x} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n : 0 \leqslant |\varphi| \leqslant \alpha/2\}$ — наименьшую дугу единичной окружности раствора α плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, соединяющую точки $\mathbf{x_1} = (\cos(\alpha/2), -\sin(\alpha/2), 0, \ldots, 0)$ и $\mathbf{x_2} = (\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2), 0, \ldots, 0)$. Определим в случае фиксированного r, $0 < r < 1$, функцию $u_{n,r}(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и функцию $v_{n,r}(s)$, $r < s \leqslant 1$, как модули следующих семейств кривых:

$$u_{n,r}(\alpha) = M_n(\Delta(l_\alpha, \partial K_r; K_r)),$$
$$v_{n,r}(s) = M_n(\Delta([s\mathbf{e}_1, s^{-1}\mathbf{e}_1], \partial K_r; K_r)).$$

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{x} \in K_r$, $\mathbf{y} \in K_r$, $|\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{y}|$. Тогда*

$$\mu_{K(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant u_{n,r}(\alpha_{\mathbf{xy}}), \tag{3}$$

$$\mu_{K(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant v_{n,r}(\sqrt{|\mathbf{x}|/|\mathbf{y}|}). \tag{4}$$

Равенство в (3) выполняется в случае, когда точки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ лежат на единичной гиперсфере, то есть $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1$. Равенство в (4) выполняется в случае, когда точки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ симметричны относительно $S(0,1)$, то есть $\mathbf{x}/|\mathbf{x}| = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$, $|\mathbf{x}||\mathbf{y}| = 1$.

Доказательство. Пусть $C_{\mathbf{xy}}$ — кривая, лежащая в кольце K_r и соединяющая $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Применяя симметризацию относительно гиперсферы $S(0,1)$, получим

$$M_n(\triangle(C_{\mathbf{xy}},\ \partial K_r;\ K_r)) \geqslant M_n(\triangle(C^*_{\mathbf{x}^*\mathbf{y}^*},\ \partial K_r;\ K_r)),$$

где $C^*_{\mathbf{x}^*\mathbf{y}^*}$ — некоторая кривая, соединяющая точку $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ с точкой $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ и лежащая на сфере $S(0,1)$. Обозначим через m прямую, параллельную отрезку $[\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*]$ и проходящую через 0, и через B_{xy} обозначим двумерную полуплоскость с границей m, проходящую через точки $0, \mathbf{x}, \mathbf{y}$. Применяя двумерную сферическую симмметризацию относительно полуплоскости B_{xy}, получим, что

$$M_n(\triangle(C^*_{\mathbf{x}^*\mathbf{y}^*},\ \partial K_r;\ K_r)) \geqslant M_n(\triangle(l, \partial K_r;\ K_r)) = u_{n,r}(\alpha_{\mathbf{xy}}).$$

Здесь l — более короткая из двух дуг с концами $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ на окружности, лежащей в двумерной плоскости $P_{0\mathbf{xy}}$ и на сфере $S(0,1)$. Переход к инфимуму дает неравенство (3). Доказательство неравенства (4) аналогично доказательству неравенства (3) с той разницей, что сперва необходимо применить одномерную сферическую симметризацию относительно луча $[0, +\infty]$, а затем симметризацию относительно гиперсферы $S(0,1)$. Теорема доказана. $\square$

В следующей теореме мы приведем оценку искажения угла между точками, расположенными на сфере симметрии при квазирегулярном отображении кольца в кольцо.

Теорема 4. *Пусть $\mathbf{x} \in K_r$, $\mathbf{y} \in K_r$, $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1$ и $f : K_r \to \mathbf{R}^n$ — не постоянное, K — квазирегулярное отображение кольца K_r в кольцо K_ρ, $f(G) \subset K_\rho$. Тогда*

$$u_{n,\rho}(\alpha_{\mathbf{f(x)f(y)}}) \leqslant K u_{n,r}(\alpha_{\mathbf{xy}}). \tag{5}$$

Доказательство. Применяя теорему 3, упомянутые во введении свойства конформной метрики и равенство (2), получаем цепочку неравеств

$$u_{n,\rho}(\alpha_{\mathbf{f(x)f(y)}}) \leqslant \mu_{K_\rho}(\mathbf{f(x)}, \mathbf{f(y)}) \leqslant \mu_{f(G)}(\mathbf{f(x)}, \mathbf{f(y)}) \leqslant K\mu_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K u_{n,r}(\alpha_{\mathbf{xy}}).$$

$\square$

Заметим, что неравенство (5) превращается в равенство в случае тождественного отображения и поэтому является точным.

В заключение приведем схему вычисления функций $u_{n,r}(\alpha)$ и $v_{n,r}(s)$ в плоском случае при $n=2$. Богатство конформных отображений на плоскости позволяет выразить функции $u_{2,r}(\alpha)$ и $v_{2,r}(s)$ через модуль кольца Тейхмюллера. Модуль кольца Тейхмюллера на плоскости вычисляется по формуле [1, с. 68]

$$\tau_2(t) = \frac{2\mathbf{K}(1/\sqrt{1+t})}{\mathbf{K}(\sqrt{t/(1+t)})},$$

где $\mathbf{K}(x) = \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-x^2u^2)}}$ — полный эллиптический интеграл первого рода. По принципу симметрии [1, с. 55]

$$M_2(\Delta(l_\alpha, \partial K_r; K_r)) = 4M_2(\Delta(l^+_\alpha, S^+(0,r); K^+(r,1)),$$

где $l_\alpha^+ = l_\alpha \cap \{\operatorname{Im}\omega > 0\}$, $S^+(0,r) = S(0,r) \cap \{\operatorname{Im}\omega > 0\}$, $K^+(r,1) = K(r,1) \cap \{\operatorname{Im}\omega > 0\}$. Функция $z = \ln\omega - 0.5\ln r$ отображает $K^+(r,1)$ на прямоугольник PR с вершинами $A_1 = 0.5\ln(1/r)$, $A_2 = 0.5\ln(1/r) + i\pi$, $A_3 = -0.5\ln(1/r) + i\pi$, $A_4 = -0.5\ln(1/r)$. Согласно конформной инвариантности модуля

$$M_2(\Delta(l_\alpha^+, S^+(0,r); K^+(r,1)) = M_2(\Delta([A_1, B], [A_3, A_4]; PR)),$$

где $B = 0.5\ln(1/r) + i\alpha/2$. Далее мы используем стандартное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ на заданный прямоугольник PR [11, с. 719] и получаем

$$M_2(\Delta([A_1, B], [A_3, A_4]; PR)) = M_2(\Delta([1, 1+\zeta], [-\,1/k, -\,1]; \operatorname{Im} w > 0)).$$

Здесь параметры k и ζ определяются условиями

$$k = \frac{4\sum\limits_{v=0}^{\infty} q^{(v+0.5)^2}}{1 + 2\sum\limits_{v=1}^{\infty} q^{v^2}}, \ q = \exp\left(\frac{4\pi^2}{\ln r}\right), \quad \int\limits_1^{1+\zeta} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \alpha\frac{2\mathbf{K}(k)}{\ln(1/r)}.$$

Последний модуль с учетом принципа симметрии выражается через модуль кольца Тейхмюллера [1, с. 66]

$$M_2(\Delta([1, 1+\zeta], [-\,1/k, -\,1]; \operatorname{Im} w > 0)) = \frac{1}{2}\tau_2\left(\frac{2(\zeta k + k + 1)}{\zeta(1-k)}\right).$$

В итоге получим

$$u_{2,r}(\alpha) = 2\tau_2\left(\frac{2(\zeta k + k + 1)}{\zeta(1-k)}\right).$$

Приведенная схема применяется также и для вычисления функции $v_{2,r}(s)$,

$$v_{2,r}(s) = 2\tau_2\left(\frac{(1+k)(1+\eta)}{(1-\eta)(1-k)}\right),$$

где

$$\ln s - 0.5\ln r = \frac{\ln(1/r)}{4\mathbf{K}(k)}\int\limits_0^{\eta} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Список литературы

[1] M. Vuorinen, “Conformal geometry and quasiregular mappings”, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1988.

[2] I. S. Gal, “Conformally invariant metrics and uniform structures”, *Indag. Math.*, **22**, (1960), 218–244.

[3] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.

[4] A. Yu. Solynin, “Continuous symmetrization via polarization”, *Алгебра и анализ*, **24**:1, (2012), 157–222.

[5] J. Sarvas, “Symmetrization of condensers in n - space”, *Ann. Acad. Sci. Fenn, Ser AI*, **522**, (1972), 1–44.

[6] Е. Г. Ахмедзянова, “Симметризация относительно гиперсферы”, *Дальневост. матем. сб.*, 1995, № 1, 40–50.

[7] В. Н. Дубинин, “Преобразование конденсаторов в пространстве”, *Докл. АН СССР*, **296**, (1987), 18–20.

[8] Е. В. Костюченко, Е. Г. Прилепкина, “О поляризации относительно гиперсферы”, *Дальневост. матем. журн.*, **5**:1, (2004), 22–29.

[9] А. В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения*, Наука, Москва, 1983.

[10] Б. Е. Левицкий, “К-симметризация и экстремальные кольца”, *В сб. "Математический анализ"*, 1971, 35–40.

[11] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

Поступила в редакцию
29 июля 2018 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00022).

Prilepkina E. G., Afanaseva-Grigoreva A. S. On the conformal metric of annulus in the n-dimensional Euclidean space. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 2. P. 233–241.

ABSTRACT

It is shown by the methods of symmetrization that the geodesic with respect to the conformal metric of annulus in the Euclidean space is located into a two-dimensional sector. As a consequence, the geodesic is established in the case of points located on symmetric sphere of the annulus. Exact lower bounds are proved for the conformal metric of the annulus. A distortion theorem for quasi-regular mappings is given.

Key words: *conformal module, modulii of curve families, quasiregular mappings, annulus, distortion theorem.*