

УДК 517.95

MSC2010 35Q93+65N21 + 78A46

© А. В. Лобанов<sup>1</sup>, Ю. Э. Спивак<sup>1,2</sup>

## Оптимизационный метод в двумерных задачах электрической маскировки

В настоящей работе исследуются задачи управления для двумерной модели электрической маскировки в случае, когда маскировочное устройство имеет форму кольца, заполненного неоднородной анизотропной средой. Указанные задачи возникают при разработке технологий дизайна электрических маскирующих устройств с использованием оптимизационного метода решения обратных задач. Доказывается разрешимость прямой задачи и задачи управления для рассматриваемой модели электрического сопряжения. Выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума, и исследуются ее свойства. Обсуждается возможность реализации двух типов численных алгоритмов, служащих для нахождения приближенных решений.

Ключевые слова: *задача электрического сопряжения, обратная задача, оптимизационный метод, существование, единственность, система оптимальности, невидимость.*

### Введение

В течение нескольких последних лет интенсивно развиваются и предлагаются эффективные методы и технологии дизайна функциональных устройств (например, маскировочных оболочек), защищающих материальные тела от обнаружения различными средствами локации. В хронологическом порядке первые работы были посвящены электромагнитной маскировке [1], далее акустической маскировке [2], а позже полученные результаты были распространены на случай маскировки от статических магнитных [3], электрических [4] и тепловых полей [5].

Следует, однако, отметить, что техническая реализация решений, полученных в указанных выше работах, связана с существенными трудностями [6], поскольку

<sup>1</sup>Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

<sup>2</sup>Дальневосточный федеральный университет, 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.

Электронная почта: [alekslobanov1@mail.ru](mailto:alekslobanov1@mail.ru) (А. В. Лобанов), [uliyaspivak@gmail.com](mailto:uliyaspivak@gmail.com) (Ю. Э. Спивак).

такие решения предполагают использование не существующих в природе метаматериалов. Есть несколько способов преодоления указанных в [6] трудностей реализации решений. Один из способов основан на использовании оптимизационного метода решения обратных задач [7]. Этот метод широко используется при теоретическом исследовании обратных задач для дифференциальных уравнений электромагнетизма и тепломассопереноса (см., например, [8–10]).

Применение оптимизационного подхода в задачах маскировки привело к развитию новой стратегии обеспечения невидимости, получившей в [11] название стратегии обратного дизайна (“inverse design strategy”). Упомянем первые в этой области работы [12] и [13], в которых для решения задач маскировки впервые стали применяться методы численной оптимизации, а также статьи [14–20], посвященные теоретическому анализу задач электромагнитной, акустической или статической маскировки на основе оптимизационного метода. Отметим статьи [21–23], в которых предложены эффективные численные методы решения 2D-задачи тепловой маскировки на основе метода роя частиц.

Оптимизационный метод применяется и в настоящей работе при теоретическом анализе 2D-задачи электрической маскировки, в которой маскировочный эффект достигается за счет надлежащего выбора функциональных параметров неоднородной анизотропной среды, заполняющей искомую маскировочную оболочку.

## 1. Постановка задачи сопряжения

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^2$  область  $\Omega$ , имеющую в полярных координатах  $(r, \theta)$  вид кольца  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$ , где  $a$  и  $b$  — положительные константы. Обозначим через  $\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < a\}$  (либо  $\Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| > b\}$ ) внутренность (либо внешность)  $\Omega$ . Будем считать, что область  $\Omega$  заполнена неоднородной анизотропной, в общем случае, средой, электропроводящие свойства которой описываются диагональным в полярных координатах  $(r, \theta)$  тензором диэлектрической проницаемости  $\mathcal{E} = \text{diag}(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta)$ , тогда как области  $\Omega_i$  и  $\Omega_e^\infty$  заполнены разными однородными изотропными средами с постоянными диэлектрическими проницаемостями, равными, соответственно,  $\varepsilon_i > 0$  и  $\varepsilon_e > 0$ . Следуя [6, гл. 1], ниже будем ссылаться на пару  $(\Omega, \mathcal{E})$  как на материальную оболочку, причем слово “материальную” часто будем опускать.

Предположим, что вне некоторого круга  $B_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < R\}$ , содержащего область  $\Omega$  внутри себя, сосредоточены источники, создающие в  $B_R$  внешне приложенное электрическое поле  $\mathbf{E}_a = -\text{grad}\Phi_a$ , отвечающее потенциалу  $\Phi_a$ , сужение  $\phi^e$  которого на  $B_R$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\phi^e = 0$  в  $B_R$ . Наличие оболочки  $(\Omega, \mathcal{E})$  приводит к появлению дополнительного поля  $\phi_s$  во внешности  $\Omega_e^\infty$ , а также поля  $\phi$  в области  $\Omega$  и поля  $\phi_i$  во внутренней области  $\Omega_i$  (см. рис. 1а). Указанные поля  $\phi_i$ ,  $\phi$  и  $\phi_s$  вместе с полем  $\phi_e = \phi^e + \phi_s$  являются решением следующей задачи сопряжения:

$$\varepsilon_i \Delta \phi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \varepsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\varepsilon_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \varepsilon_e \Delta \phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (1)$$

$$\phi_i = \phi, \quad \varepsilon_i \frac{\partial \phi}{\partial r} = \varepsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial r} \text{ при } r = a, \quad \phi_e = \phi, \quad \varepsilon_e \frac{\partial \phi_e}{\partial r} = \varepsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial r} \text{ при } r = b, \quad (2)$$

$$\phi_s(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

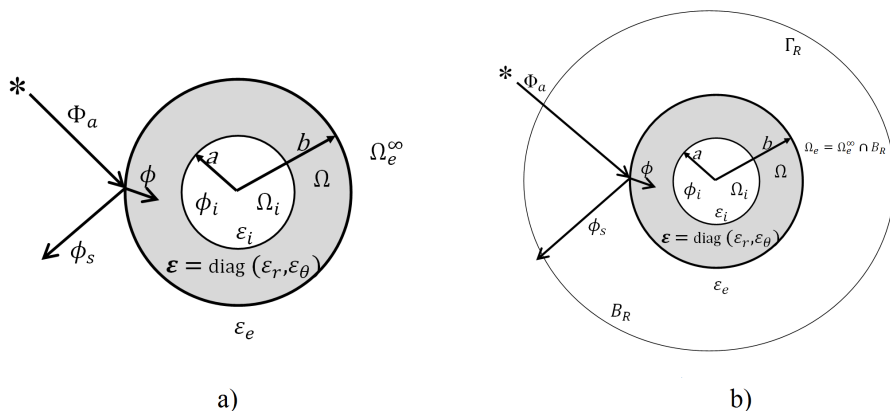


Рис. 1. а) схематическая геометрия задачи; б) введение искусственной границы  $\Gamma_R$ .

При исследовании задачи сопряжения (1)–(3) и задачи управления будем существенно использовать ряд функциональных пространств. Положим  $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$ . Будем использовать пространство  $H^1(D)$ , где  $D$  — одна из областей  $B_R, \Omega_i, \Omega$  или  $\Omega_e$ , а также пространства  $L^\infty(\Omega), H^s(\Omega), s > 0, L^2(Q), H^{1/2}(\Gamma_R)$  и  $H^{-1/2}(\Gamma_R) \equiv H^{1/2}(\Gamma_R)^*$ , где  $Q \subset B_R$  — произвольное открытое подмножество,  $\Gamma_R$  — граница круга  $B_R$  (см. рис. 1б). Нормы и скалярные произведения в  $H^1(D), H^s(\Omega), L^2(Q), H^{1/2}(\Gamma_R)$  и  $H^{-1/2}(\Gamma_R)$  будут обозначаться через  $\|\cdot\|_{1,D}, (\cdot, \cdot)_{1,D}, \|\cdot\|_{s,\Omega}, (\cdot, \cdot)_{s,\Omega}, \|\cdot\|_Q, (\cdot, \cdot)_Q, \|\cdot\|_{1/2,\Gamma_R}$  и  $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_R}$ . Положим  $L_{u_0}^\infty(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega) : u(x) \geq u_0\}, H_{u_0}^s(\Omega) = \{u \in H^s(\Omega) : u(x) \geq u_0\}, u_0 = \text{const} > 0$ . Хорошо известно в силу теоремы вложения, что справедливо непрерывное и компактное вложение  $H^s(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$  при  $s > 1$  и выполняется оценка

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_s \|u\|_{s,\Omega} \quad \forall u \in H^s(\Omega), s > 1. \quad (4)$$

Здесь  $C_s$  — константа, зависящая от  $s > 1$  и  $\Omega$ . Нам также потребуется подпространство  $H(\Omega_e) = \{\phi \in H^1(\Omega_e) : \Delta\phi = 0 \text{ в } \mathcal{D}(\Omega_e)\}$  пространства  $H^1(\Omega_e)$ , наделенное нормой  $\|\cdot\|_{1,\Omega_e} \equiv \|\cdot\|_{H^1(\Omega_e)}$ . Пространство  $H(\Omega_e)$  будет служить для описания сужений  $\phi_e$  внешне приложенных полей  $\Phi_a$  на область  $\Omega_e$ .

Отметим, что в силу теоремы о следах для любой функции  $\phi \in H^1(B_R)$  существует след  $\phi|_{\Gamma_R} \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ , тогда как для любой функции  $\phi^e \in H(\Omega_e)$  существует нормальный след  $\partial\phi^e/\partial n|_{\Gamma_R} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$ , и справедливы следующие оценки:

$$\|\phi\|_{1/2,\Gamma_R} \leq C_R \|\phi\|_X \quad \forall \phi \in H^1(B_R), \quad \|\partial\phi^e/\partial n\|_{-1/2,\Gamma_R} \leq C'_R \|\phi^e\|_{1,\Omega_e} \quad \forall \phi^e \in H(\Omega_e). \quad (5)$$

Здесь  $C_R$  и  $C'_R$  — константы, зависящие от  $\Omega$  и  $R$ , но не зависящие от  $\phi \in X$  и  $\phi^e \in H(\Omega_e)$ .

## 2. Разрешимость задачи сопряжения

Будем предполагать ниже, что функции  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  и сужение  $\phi^e$  заданного поля  $\Phi_a$  на  $\Omega_e$  удовлетворяют условиям:

- (i)  $\varepsilon_r \in L_{\varepsilon_r^0}^\infty(\Omega)$ ,  $\varepsilon_\theta \in L_{\varepsilon_\theta^0}^\infty(\Omega)$ ,  $\varepsilon_r^0 = \text{const} > 0$ ,  $\varepsilon_\theta^0 = \text{const} > 0$ ;
- (ii)  $\phi^e \equiv \Phi_a|_{\Omega_e} \in H(\Omega_e)$ .

Ниже любую пару  $(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta)$ , удовлетворяющую условию (i), будем называть регулярной парой параметров.

Поскольку электрический потенциал  $\Phi$  определяется с точностью до аддитивной константы, то условимся ниже не различать функции пространства  $H^1(B_R)$ , отличающиеся друг от друга на аддитивную константу. С учетом этого ниже основную роль будет играть фактор-пространство  $X = H^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$  с гильбертовой нормой

$$\|\Phi\|_X^2 = \|\nabla\Phi\|_{\Omega_i}^2 + \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right\|_{\Omega}^2 + \|\nabla\Phi\|_{\Omega_e}^2. \quad (6)$$

Первый этап исследования исходной задачи (1)–(3) состоит в том, чтобы свести ее к эквивалентной краевой задаче, рассматриваемой в круге  $B_R$ . С этой целью введем аналогично [14] оператор Дирихле–Неймана  $T: H^{1/2}(\Gamma_R) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R)$ , ставящий в соответствие каждой функции  $h \in H^{1/2}(\Gamma_R)$  функцию  $\partial\tilde{\phi}/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$ , где  $\tilde{\phi}$  — решение внешней задачи Дирихле для уравнения  $\Delta\phi = 0$  в  $\Omega_e^\infty \setminus B_R$  при краевом условии  $\Phi|_{\Gamma_R} = h$ , удовлетворяющее условию (3). Хорошо известно, что  $T \in L(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$ ,  $\|T\| \leq C_T$  и  $\int_{\Gamma_R} (T\psi)\psi d\sigma \leq 0$  для всех  $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ . Здесь и ниже

интеграл  $\int_{\Gamma_R}$  обозначает отношение двойственности между  $H^{-1/2}(\Gamma_R)$  и  $H^{1/2}(\Gamma_R)$ ,

$C_T$  — константа, зависящая от  $\Omega$  и  $R$ . Рассуждая, как в [24, гл.1], можно показать, что исходная задача (1)–(3), рассматриваемая на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , эквивалентна задаче нахождения тройки функций:  $\phi_i$  из первого уравнения в (1) в области  $\Omega_i$ ;  $\phi$  из второго уравнения в (1) в области  $\Omega$ ;  $\Phi_s$  из уравнения  $\varepsilon_e \Delta\phi_s = 0$  в  $\Omega_e$ ; при условиях сопряжения (2) и следующем дополнительном условии для поля  $\phi_s$  на  $\Gamma_R$ :

$$\partial\phi_s/\partial n = T\phi_s \text{ на } \Gamma_R. \quad (7)$$

Ниже, наряду с уравнением для  $\phi_s$ , мы будем также использовать уравнение для функции  $\phi_e = \phi^e + \phi_s = \Phi_a|_{\Omega_e} + \phi_s$ , имеющее в силу условия  $\Delta\phi^e = 0$  в (ii) вид

$$\varepsilon_e \Delta\phi_e = 0 \text{ в } \Omega_e. \quad (8)$$

Для краткости ниже на задачу нахождения тройки функций  $(\phi_i, \phi, \phi_e)$ , удовлетворяющих первому и второму уравнениям (1) в  $\Omega_i$  и  $\Omega$ , уравнению (8) в  $\Omega_e$ , а также граничным условиям (2) и (7), будем ссылаться как на задачу 1.

Выведем теперь слабую формулировку (при заданных коэффициентах  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\theta$ ) задачи 1. Пусть  $S \in X$  — произвольная тестовая функция. Рассуждая, как в [14], умножим первое уравнение в (1) и уравнение (8), рассматриваемые в областях  $\Omega_i$  и  $\Omega_e$ , на  $S|_{\Omega_i}$  и  $S|_{\Omega_e}$  соответственно, а второе уравнение в (1), рассматриваемое в  $\Omega$ ,

— на  $S|_{\Omega}$ , проинтегрируем по  $\Omega_i \cup \Omega_e$  либо по  $\Omega$  и применим формулы Грина. Складывая полученные тождества и используя граничные условия в (2) и (7), приходим к следующему тождеству для тройки  $\Phi = (\phi_i, \phi, \phi_e) \in X$ :

$$a_{\varepsilon}(\Phi, \Psi) = \langle F, \Psi \rangle \quad \forall \Psi \in X. \quad (9)$$

Здесь и ниже  $\varepsilon$  обозначает пару  $(\varepsilon_r, \varepsilon_{\theta})$ ,  $a_{\varepsilon}(\cdot, \cdot)$  и  $F$  — билинейную и линейную формы на  $X$ , определяемые формулами

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon}(\Phi, \Psi) &\equiv a_0(\Phi, \Psi) + a(\varepsilon_r, \varepsilon_{\theta}; \Phi, \Psi), \\ a(\varepsilon_r, \varepsilon_{\theta}; \Phi, \Psi) &= \int_{\Omega} \left( \varepsilon_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{\theta}}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) r dr d\theta, \end{aligned} \quad (10)$$

$$a_0(\Phi, \Psi) = \varepsilon_i \int_{\Omega_i} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi dx + \varepsilon_e \int_{\Omega_e} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi dx - \int_{\Gamma_R} (T\Phi)\Psi d\sigma, \quad (11)$$

$$\langle F, \Psi \rangle = - \int_{\Gamma_R} T\phi^e \Psi d\sigma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \phi^e}{\partial n} \Psi d\sigma. \quad (12)$$

Тождество (9) представляет собой слабую формулировку задачи 1. Ее решение  $\Phi = (\phi_i, \phi, \phi_e) \in X$  будем называть слабым решением задачи 1.

Используя неравенство Гельдера и формулы (6), (10), выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \varepsilon_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} r dr d\theta \right| &\leq \|\varepsilon_r\|_{L^{\infty}(\Omega)} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{\Omega} \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right\|_{\Omega} \leq \|\varepsilon_r\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X, \\ \int_{\Omega} \frac{\varepsilon_{\theta}}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} r dr d\theta &\leq \|\varepsilon_{\theta}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\|_{\Omega} \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right\|_{\Omega} \leq \|\varepsilon_{\theta}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X, \\ |a(\varepsilon_r, \varepsilon_{\theta}; \Phi, \Psi)| &\leq (\|\varepsilon_r\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|\varepsilon_{\theta}\|_{L^{\infty}(\Omega)}) \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X \quad \forall \Phi, \Psi \in X. \end{aligned} \quad (13)$$

Кроме того, используя оценки (5) и свойства оператора  $T$ , выводим из (11) и (12), полагая  $\varepsilon^0 = \max(\varepsilon_i, \varepsilon_e)$ , что

$$|a_0(\Phi, \Psi)| \leq \varepsilon^0 \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X + \|T\Phi\|_{-1/2, \Gamma_R} \|\Psi\|_{1/2, \Gamma_R} \leq (\varepsilon^0 + C_T C_R^2) \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} |\langle F, \Psi \rangle| &\leq (\|T\| \|\phi^e\|_{1/2, \Gamma_R} + \|\partial \phi^e / \partial n\|_{-1/2, \Gamma_R}) \|\Psi\|_{1/2, \Gamma_R} \leq \\ &\leq (C_T C_R + C'_R) C_R \|\phi^e\|_{1, \Omega_e} \|\Psi\|_X. \end{aligned} \quad (15)$$

Из этих оценок следует, что формы  $a_0$ ,  $a(\varepsilon_r, \varepsilon_{\theta}; \cdot, \cdot)$  и  $F$  непрерывны на  $X$ , причем

$$\|a_0\| \leq C_0, \quad \|F\|_{X^*} \leq C_0 \|\phi^e\|_{1, \Omega_e}, \quad C_0 = \max[\varepsilon^0 + C_T C_R^2, (C_T C_R + C'_R) C_R]. \quad (16)$$

Здесь  $X^*$  — двойственное к  $X$ .

Более того, используя предположение (i) и свойства оператора  $T$ , выводим, что

$$\int_{\Omega} \varepsilon_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} r dr d\theta \geq \varepsilon_r^0 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{\Omega}^2, \quad \int_{\Omega} \frac{\varepsilon_{\theta}}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} r dr d\theta \geq \varepsilon_{\theta}^0 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\|_{\Omega}^2,$$

$$a_0(\Phi, \Phi) = \varepsilon_i \int_{\Omega_i} |\nabla \Phi|^2 dx + \varepsilon_e \int_{\Omega_e} |\nabla \Phi|^2 dx - \int_{\Gamma_R} (T\Phi)\Phi d\sigma \geq \bar{\varepsilon}_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |\nabla \Phi|^2 dx \quad \forall \Phi \in X,$$

где  $\bar{\varepsilon}_0 = \min(\varepsilon_i, \varepsilon_e)$ . Из этих оценок и определения нормы (6) в пространстве  $X$  вытекает, что билинейная форма  $a_\varepsilon$ , введенная в (10), удовлетворяет условию

$$a_\varepsilon(\Phi, \Phi) \geq \varepsilon_0 \|\Phi\|_X^2 \quad \forall \Phi \in X, \quad \varepsilon_0 = \min(\varepsilon_i, \varepsilon_e, \varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0). \quad (17)$$

Отметим также, что форма  $a_\varepsilon$  определяет линейный оператор  $A_\varepsilon : X \rightarrow X^*$ , действующий по формуле

$$\langle A_\varepsilon \Phi, \Psi \rangle = a_\varepsilon(\Phi, \Psi) \equiv a_0(\Phi, \Psi) + a(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta; \Phi, \Psi), \quad (18)$$

причем задача (9) эквивалентна операторному уравнению

$$A_\varepsilon \Phi = F. \quad (19)$$

Из неравенств (13), (14) вытекает, что при выполнении условия (i) билинейная форма  $a_\varepsilon$ , введенная в (10), непрерывна на  $X \times X$ , а из (17) следует, что форма  $a_\varepsilon$  коэрцитивна на  $X$ . В таком случае из теоремы Лакса–Мильграма вытекает, что оператор  $A_\varepsilon : X \rightarrow X^*$  — изоморфизм, причем обратный  $A_\varepsilon^{-1} : X^* \rightarrow X$  к нему также является изоморфизмом. Полагая  $C_\varepsilon = \|A_\varepsilon^{-1}\|$ , отметим, что в силу теоремы Лакса–Мильграма  $C_\varepsilon \leq C_1 = (1/\varepsilon_0)$ . С учетом этого выводим, что для любого элемента  $F \in X^*$  операторное уравнение (19), или эквивалентная задача (9), имеет единственное решение  $\Phi_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}(F) \in X$ , для которого справедлива оценка  $\|\Phi_\varepsilon\|_X \leq C_1 \|F\|_{X^*}$ , которую в силу (16) запишем в виде

$$\|\Phi_\varepsilon\|_X \leq C_2 \|\phi^e\|_{1, \Omega_e}, \quad C_2 = C_0 C_1. \quad (20)$$

Тем самым доказана теорема.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда для любой пары  $\varepsilon = (\varepsilon_r, \varepsilon_\theta) \in L_{\varepsilon_r}^\infty(\Omega) \times L_{\varepsilon_\theta}^\infty(\Omega)$  оператор  $A_\varepsilon : X \rightarrow X^*$ , определенный в (18), осуществляет изоморфизм, причем для обратного оператора  $A_\varepsilon^{-1} : X^* \rightarrow X$  справедлива оценка  $\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq C_1 \equiv (1/\varepsilon_0)$ , где константа  $\varepsilon_0$  определена в (17). Для любого внешнего поля  $\phi^e \in H(\Omega_e)$  задача (9), где  $F$  определяется по  $\phi^e$  формулой (12), имеет единственное решение  $\Phi_\varepsilon \in X$ , для которого справедлива оценка (20) с константой  $C_2 = C_0 C_1$ , не зависящей от  $(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta)$ .

### 3. Формулировка обратной задачи. Применение оптимизационного метода. Вывод системы оптимальности

Напомним, что целью данной статьи является анализ обратной задачи для модели (1)–(3), возникающей при разработке технологий дизайна устройств электрической маскировки. Общая обратная задача, называемая задачей общей маскировки, состоит в том, чтобы найти параметры  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\theta$  оболочки  $(\Omega, \varepsilon)$ , исходя из выполнения следующих двух условий (см. [22, 23]):

$$\nabla \Phi_\varepsilon \equiv \nabla \phi_i = 0 \quad \text{в } \Omega_i, \quad \Phi_\varepsilon = \phi^e \quad \text{в } \Omega_e. \quad (21)$$

Здесь  $\Phi_\varepsilon$  — решение прямой задачи (1)–(3), отвечающее искомой паре  $\varepsilon = (\varepsilon_r, \varepsilon_\theta)$ .

Оболочка  $(\Omega, \varepsilon)$ , обеспечивающая выполнение обоих условий в (21), называется идеальной МО. В случае, когда параметры  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\theta$  определяются лишь из первого (либо второго) условия в (21), на соответствующую обратную задачу ссылаются как на задачу внутренней (либо внешней) маскировки.

Хорошо известно, что точного решения задачи общей маскировки в классе регулярных параметров  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\theta$ , удовлетворяющих условию (i), не существует (см., например, [5, 23]). В связи с этим естественно отыскивать приближенные решения, используя оптимизационный метод. Согласно данному методу рассматриваемая обратная задача заменяется задачей минимизации определенного функционала качества [7]. Ниже будем использовать функционал качества вида

$$I(\Phi) = [\alpha I_1(\Phi) + \beta I_2(\Phi)] \quad (\alpha + \beta = 1), \quad (22)$$

где

$$I_1(\Phi) = \|\nabla\Phi\|_{\Omega_i}^2 \equiv \int_{\Omega_i} |\nabla\Phi|^2 dx, \quad I_2(\Phi) = \|\Phi - \phi^e\|_{\Omega_e}^2 \equiv \int_{\Omega_e} |\Phi - \phi^e|^2 dx. \quad (23)$$

Здесь  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  — произвольные параметры, удовлетворяющие условию  $\alpha + \beta = 1$ . Выбор функционала  $I(\Phi)$  отвечает задаче внутренней (либо внешней) маскировки при  $\alpha = 1, \beta = 0$  (либо  $\alpha = 0, \beta = 1$ ). Для остальных значений  $\alpha$  и  $\beta$  функционал (22) отвечает задаче общей маскировки. В качестве управлений выберем компоненты  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\theta$  тензора  $\mathcal{E}$  диэлектрической проницаемости анизотропной среды, заполняющей область  $Q$ .

Будем предполагать, что управления  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\varphi$  могут изменяться в некоторых множествах  $K_1$  и  $K_2$ , удовлетворяющих условиям:

(j)  $K_1 \subset H_{\varepsilon_0}^s(\Omega)$ ,  $\varepsilon_r^0 = \text{const} > 0$ ,  $K_2 \subset H_{\varepsilon_0}^{s_0}(\Omega)$ ,  $\varepsilon_\theta^0 = \text{const} > 0$ ,  $s > 1$ ;

(jj)  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$  и  $K_1, K_2$  — ограниченные множества, либо  $\alpha_k > 0$ ,  $k=0,1,2$ .

Полагая  $K = K_1 \times K_2$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_r, \varepsilon_\theta)$ , введем оператор  $G: X \times K \rightarrow X^*$ , действующий по формуле

$$\langle G(\Phi, \varepsilon), \Psi \rangle = \langle A_\varepsilon \Phi, \Psi \rangle - \langle F, \Psi \rangle \equiv a_\varepsilon(\Phi, \Psi) - \langle F, \Psi \rangle \quad \forall \Psi \in X. \quad (24)$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(\Phi, \varepsilon) \equiv \frac{\alpha_0}{2} I(\Phi) + \frac{\alpha_1}{2} \|\varepsilon_r\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\alpha_2}{2} \|\varepsilon_\theta\|_{s,\Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad G(\Phi, \varepsilon) = 0, \quad (\Phi, \varepsilon) \in X \times K. \quad (25)$$

Здесь  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  — неотрицательные параметры, которые служат для регулирования относительной важности каждого из слагаемых в (25). Введем множество допустимости  $Z_{ad} = \{(\Phi, \varepsilon) \in X \times K : G(\Phi, \varepsilon) = 0, J(\Phi, \varepsilon) < \infty\}$  для задачи (25) и отметим, что оно не пусто в силу теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (ii), (j) и (jj). Тогда задача (25), где  $I(\Phi)$  определяется формулой (22), имеет по крайней мере одно решение.

**Доказательство.** Обозначим через  $(\Phi_m, \varepsilon_m) \in Z_{ad}$ ,  $\varepsilon_m = (\varepsilon_r^m, \varepsilon_\theta^m)$ ,  $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  минимизирующую последовательность для функционала  $J$ , для которой выполняются соотношения

$$a_0(\Phi_m, \Psi) + a(\varepsilon_r^m, \varepsilon_\theta^m; \Phi_m, \Psi) = \langle F, \Psi \rangle \quad \forall \Psi \in X, \quad (26)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(\Phi_m, \varepsilon_m) = \inf_{(\Phi, \varepsilon) \in Z_{ad}} J(\Phi, \varepsilon) \equiv J^*. \quad (27)$$

В силу условий (j) для всех  $m \in \mathbb{N}$  справедливы оценки  $\|\varepsilon_r^m\|_{s, \Omega} \leq c_1$ ,  $\|\varepsilon_\theta^m\|_{s, \Omega} \leq c_2$ . Здесь и ниже  $c_1, c_2, c_3$  — некоторые константы, не зависящие от  $m$ . Из приведенных оценок и теоремы 1 вытекает, что  $\|\varphi_m\|_X \leq c_3$ . Следовательно, существуют слабые пределы  $\varepsilon_r^* \in K_1$ ,  $\varepsilon_\theta^* \in K_2$ ,  $\Phi^* \in X$  некоторых подпоследовательностей последовательностей  $\{\varepsilon_r^m\}$ ,  $\{\varepsilon_\theta^m\}$ ,  $\{\Phi_m\}$ . Отсюда и из компактности вложения  $H^s(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$  при  $s > 1$  вытекает, что  $\varepsilon_r^m \rightarrow \varepsilon_r^*$ ,  $\varepsilon_\theta^m \rightarrow \varepsilon_\theta^*$  сильно в  $L^\infty(\Omega)$ , тогда как  $\Phi_m \rightarrow \Phi^*$  слабо в  $X$ . Переходя далее к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , покажем, что тройка  $(\Phi^*, \varepsilon_r^*, \varepsilon_\theta^*)$  удовлетворяет тождеству

$$a_0(\Phi^*, \Psi) + a(\varepsilon_r^*, \varepsilon_\theta^*; \Phi^*, \Psi) = \langle F, \Psi \rangle \quad \forall \Psi \in X. \quad (28)$$

С этой целью перейдем в (26) к пределу при  $m \rightarrow \infty$ . Ясно, что линейное слагаемое  $a_0(\Phi_m, \Psi)$  переходит в слагаемое  $a_0(\Phi^*, \Psi)$  при  $m \rightarrow \infty$ , тогда как для разности  $a(\varepsilon_r^m, \varepsilon_\theta^m, \Phi^m, \Psi) - a(\varepsilon_r^*, \varepsilon_\theta^*, \Phi^*, \Psi)$  имеем

$$\begin{aligned} & |a(\varepsilon_r^m, \varepsilon_\theta^m, \Phi^m, \Psi) - a(\varepsilon_r^*, \varepsilon_\theta^*, \Phi^*, \Psi)| = \\ & \left| \int_{\Omega} \left( \varepsilon_r^m \frac{\partial \Phi^m}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta^m}{r^2} \frac{\partial \Phi^m}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) r dr d\theta - \int_{\Omega} \left( \varepsilon_r^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta^*}{r^2} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) r dr d\theta \right| = \\ & = \left| \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi^m}{\partial r} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right) \varepsilon_r^* \frac{\partial \Psi}{\partial r} r dr d\theta + \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi^m}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} \right) \varepsilon_\theta^* \frac{\partial \Psi}{\partial r} r dr d\theta + \right. \\ & \left. + \int_{\Omega} (\varepsilon_r^m - \varepsilon_r^*) \frac{\partial \Phi^m}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} r dr d\theta + \int_{\Omega} (\varepsilon_\theta^m - \varepsilon_\theta^*) \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^m}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} r dr d\theta \right| \quad \forall \Psi \in X. \quad (29) \end{aligned}$$

Поскольку  $\Phi^m \rightarrow \Phi^*$  слабо в  $X$ , то первые два интеграла в правой части (29) стремятся к нулю при  $m \rightarrow \infty$ . Кроме того, из сильной сходимости  $\varepsilon_r^m \rightarrow \varepsilon_r^*$ ,  $\varepsilon_\theta^m \rightarrow \varepsilon_\theta^*$  в  $L^\infty(\Omega)$  следует, что последние два интеграла в (29) стремятся к нулю при  $m \rightarrow \infty$ . Поэтому, переходя к пределу в (26) при  $m \rightarrow \infty$ , получим (28). Это означает, что  $G(\Phi^*, \varepsilon^*) = 0$ , где  $\varepsilon^* = (\varepsilon_r^*, \varepsilon_\theta^*)$ . Поскольку функционал  $J(\Phi)$  слабо полунепрерывен снизу на  $X \times K$ , то выводим  $J(\Phi^*, \varepsilon^*) = J^*$ , что доказывает теорему.  $\square$

Выведем теперь необходимые условия оптимальности для задачи (25). Для этого воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых экстремальных задачах [25]. Из линейности введенного в (24) оператора  $G$  по  $\Phi$  вытекает, что производная Фреше  $G'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon})$  в каждой точке  $(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon}) \in X \times K$ , где  $\hat{\varepsilon} = (\hat{\varepsilon}_r, \hat{\varepsilon}_\theta)$ , определяется соотношением  $G'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon}) = \hat{A} \equiv A_{\hat{\varepsilon}}$ . Здесь оператор  $A_{\hat{\varepsilon}}$  определен формулой (18) при  $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon_r = \hat{\varepsilon}_r$ ,  $\varepsilon_\theta = \hat{\varepsilon}_\theta$ .



В соответствии с общей теорией экстремальных задач (см. [25]) введем в рассмотрение множитель Лагранжа  $P \in X$ , на который будем ссылаться как на сопряженное электрическое поле, и лагранжиан  $\mathcal{L}: X \times K \times X \rightarrow \mathbb{R}$  формулой

$$L(\Phi, \varepsilon, P) \equiv J(\Phi, \varepsilon) + \langle G(\Phi, \varepsilon), P \rangle_{X^* \times X}. \quad (30)$$

Обозначим через  $\hat{A}^* \equiv G'_{\Phi}(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon})^*: X \rightarrow X^*$  оператор, сопряженный к оператору  $\hat{A} = G'_{\Phi}(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon}): X \rightarrow X^*$ , действующий по формуле

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}^* P, \Psi \rangle_{X^* \times X} &\equiv \langle G'_{\Phi}(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon})^* P, \Psi \rangle_{X^* \times X} = \\ &= \langle G'_{\Phi}(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon}) \Psi, P \rangle_{X^* \times X} = \langle \hat{A} \Psi, P \rangle_{X^* \times X} \quad \forall P \in X, \quad \Psi \in X. \end{aligned} \quad (31)$$

Из линейности оператора  $G$  по  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\theta$  и из выпуклости множества  $K = K_1 \times K_2$  вытекает, что множество  $G(\Phi, K) = \{x^* = G(\Phi, \varepsilon) \in X^*, \varepsilon \in K\}$  является выпуклым подмножеством в  $X^*$  для любой функции  $\Phi \in X$ . Так как оператор  $G'_{\Phi}(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon}) \equiv \hat{A}$  является изоморфизмом в силу теоремы 1, то из результатов [25, стр. 79] вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть при выполнении условий теоремы 2 пара  $(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon}) \in X \times K$  является решением задачи (25). Тогда существует единственный множитель Лагранжа  $\hat{P} \in X$  такой, что справедливо уравнение Эйлера – Лагранжа в  $X^*$

$$L'_{\Phi}(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon}, \hat{P}) = G'_{\Phi}(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon})^* \hat{P} + (\alpha_0/2) I'_{\Phi}(\hat{\Phi}) = 0, \quad (32)$$

эквивалентное тождеству

$$a_{\varepsilon}(\Psi, \hat{P}) \equiv a_0(\Psi, \hat{P}) + a(\hat{\varepsilon}_r, \hat{\varepsilon}_\theta; \Psi, \hat{P}) = -(\alpha_0/2) \langle I'_{\Phi}(\hat{\Phi}), \Psi \rangle \quad \forall \Psi \in X, \quad (33)$$

и выполняется принцип минимума  $L(\hat{\Phi}, \hat{\varepsilon}, \hat{P}) \leq L(\hat{\Phi}, \varepsilon, \hat{P})$  для всех  $\varepsilon \in K$ , эквивалентный следующим двум вариационным неравенствам относительно искомых управлений  $\hat{\varepsilon}_r$  и  $\hat{\varepsilon}_\theta$ :

$$\alpha_1(\hat{\varepsilon}_r, \varepsilon_r - \hat{\varepsilon}_r)_{s, \Omega} + \int_{\Omega} (\varepsilon_r - \hat{\varepsilon}_r) \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r} r \, dr \, d\theta \geq 0 \quad \forall \varepsilon_r \in K_1, \quad (34)$$

$$\alpha_2(\hat{\varepsilon}_\theta, \varepsilon_\theta - \hat{\varepsilon}_\theta)_{s, \Omega} + \int_{\Omega} \frac{(\varepsilon_\theta - \hat{\varepsilon}_\theta)}{r^2} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} r \, dr \, d\theta \geq 0 \quad \forall \varepsilon_\theta \in K_2. \quad (35)$$

Из вида общего функционала  $I(\Phi)$  в (22) следует, что его производная Фреше  $I'(\hat{\Phi})$  в любой точке  $\hat{\Phi} \in X$  определяется формулой

$$\langle I'(\hat{\Phi}), \Psi \rangle = 2 \left[ \alpha \int_{\Omega_i} \nabla \hat{\Phi} \cdot \nabla \Psi \, dx + \beta \int_{\Omega_e} (\hat{\Phi} - \phi^e) \Psi \, dx \right], \quad \Psi \in X. \quad (36)$$

Подставляя (36) в (33), приходим к следующему окончательному виду уравнения Эйлера – Лагранжа относительно сопряженного электрического поля  $\hat{P}$ :

$$\begin{aligned} a_0(\Psi, \hat{P}) + a(\hat{\varepsilon}_r, \hat{\varepsilon}_\theta; \Psi, \hat{P}) = \\ = -\alpha_0 \left[ \alpha \int_{\Omega_i} \nabla \hat{\Phi} \cdot \nabla \Psi \, dx + \beta \int_{\Omega_e} (\hat{\Phi} - \phi^e) \Psi \, dx \right], \quad \Psi \in X. \end{aligned} \quad (37)$$

Напомним, что параметры  $\alpha$  и  $\beta$  в (37) изменяются в интервале  $[0, 1]$ , причем случай  $\alpha=1, \beta=0$  (либо  $\alpha=0, \beta=1$ ) отвечает задаче внутренней (либо внешней) маскировки, тогда как случай  $\alpha > 0, \beta > 0$  отвечает задаче общей маскировки.

Отметим, что прямая задача (9), где следует положить  $\Phi = \hat{\Phi}$ ,  $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ , сопряженная задача (37) относительно сопряженного электрического поля  $\hat{P}$  и неравенства (34), (35) представляют собой систему оптимальности, описывающую необходимые условия экстремума для задачи (25). Система оптимальности играет важную роль при решении экстремальных задач. Во-первых, с ее помощью можно установить достаточные условия для исходных данных, которые обеспечивают единственность и устойчивость оптимальных решений рассматриваемых экстремальных задач относительно малых возмущений исходных данных (см., например, [19, 20]).

Во-вторых, построенную систему оптимальности можно использовать для разработки эффективного численного алгоритма, предназначенного для решения экстремальной задачи (25). Простейший алгоритм может быть получен с помощью метода простой итерации. Тогда  $m$ -я итерация такого алгоритма состоит в нахождении неизвестных значений  $\Phi^m, P^m, \varepsilon_r^{m+1}$  и  $\varepsilon_\theta^{m+1}$  при заданных  $\varepsilon_r^m, \varepsilon_\theta^m, m=0, 1, 2, \dots$  путем последовательного решения следующих задач:

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\Phi^m, \Psi) &= a_0(\Phi^m, \Psi) + a_1(\varepsilon_r^m; \Phi^m, \Psi) + a_2(\varepsilon_\theta^m; \Phi^m, \Psi) = \langle F, \Psi \rangle \quad \forall \Psi \in X, \\ a_\varepsilon(\Psi, P^m) &= a_0(\Psi, P^m) + a_1(\varepsilon_r^m, \Psi, P^m) + a_2(\varepsilon_\theta^m, \Psi, P^m) = \\ &= -\alpha_0 \left[ \alpha \int_{\Omega_i} \nabla \Phi^m \cdot \nabla \Psi dx + \beta \int_{\Omega_e} (\Phi^m - \phi^e) \Psi dx \right] \quad \forall \Psi \in X, \\ \alpha_1(\varepsilon_r^{m+1}, \varepsilon_r - \varepsilon_r^m)_{s, \Omega} + a_1((\varepsilon_r - \varepsilon_r^{m+1}) \Phi^m, P^m) &\geq 0 \quad \forall \varepsilon_r \in K_1, \\ \alpha_2(\varepsilon_\theta^{m+1}, \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^m)_{s, \Omega} + a_2((\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^{m+1}) \Phi^m, P^m) &\geq 0 \quad \forall \varepsilon_\theta \in K_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Альтернативный алгоритм основывается на использовании метода роя частиц по схеме, предложенной в [21, 23] при численном решении задачи тепловой маскировки цилиндрического тела. Разработке и исследованию свойств указанных алгоритмов, а также сравнительному анализу результатов, полученных с их помощью, будет посвящена отдельная статья авторов.

## Список литературы

- [1] J. B. Pendry, D. Shurig, D. R. Smith, "Controlling electromagnetic fields", *Science*, **312**, (2006), 1780–1782.
- [2] S. A. Cummer, B. I. Popa, D. Shurig, D. R. Smith, J. Pendry, M. Rahm, A. Starr, "Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell", *Phys. Rev. Lett.*, **100**, (2008), 024301.
- [3] A. Sanchez, C. Navau, J. Prat-Camps, D. X. Chen, "Antimagnets: controlling magnetic fields with superconductor/metamaterial hybrids", *New J. Phys.*, **13**, (2011), 093034.
- [4] W. Jiang, C. Luo, H. F. Ma, Z. L. Mei, T. J. Cui, "Enhancement of current density by dc electric concentrator", *Sci. Rep.*, **2**, (2012), 956.

- [5] S. Guenneau, C. Amra, D. Veynante, “Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux”, *Opt. Express.*, **20**, (2012), 8207–8218.
- [6] Г. В. Алексеев, *Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе*, Дальнаука, Владивосток, 2016.
- [7] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.
- [8] Р. В. Бризицкий, Ж. Ю. Саричкая, “Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции-диффузии-реакции”, *Изв. РАН (Серия Математическая)*, **82**:1, (2018), 17–33.
- [9] Р. В. Бризицкий, Ж. Ю. Саричкая, “Задача граничного управления для нелинейного уравнения конвекции-диффузии-реакции”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:12, (2018), 2139–2152.
- [10] Д. А. Терешко, “Численное восстановление граничного потока тепла для стационарных уравнений тепловой конвекции”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **17**:4, (2014), 111–119.
- [11] S. Xu, Y. Wang, B. Zhang, H. Chen, “Invisibility cloaks from forward design to inverse design”, *Science China Information Sciences*, **56**, (2013), 120408.
- [12] B. I. Popa, S. A. Cummer, “Cloaking with optimized homogeneous anisotropic layers”, *Phys. Rev. A.*, **79**, (2009), 023806.
- [13] S. Xi, H. Chen, B. Zhang, B.-I. Wu, J.A. Kong, “Route to low-scattering cylindrical cloaks with finite permittivity and permeability”, *Phys. Rev. B.*, **79**, (2009), 155122.
- [14] Г. В. Алексеев, “Управление граничным импедансом в двумерной задаче маскировки материальных тел методом волнового обтекания”, *Журн. выч. матем. и матем. физ.*, **53**:12, (2013), 98–115.
- [15] Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, “Оценки устойчивости в двумерной задаче маскировки материальных тел”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:2, (2014), 127–140.
- [16] Г. В. Алексеев, “Анализ и оптимизация в задачах маскировки материальных тел для уравнений Максвелла”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:3, (2016), 366–377.
- [17] G. V. Alekseev Yu. E. Spivak, “Analysis of the 3D acoustic cloaking problems using optimization method”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **722**, (2016), 012002.
- [18] Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак, “Оптимизационный метод в задачах акустической маскировки материальных тел”, *Журн. выч. матем. и матем. физ.*, **57**:9, (2017), 79–95.
- [19] Г. В. Алексеев, “Анализ двумерной задачи тепловой маскировки на основе оптимизационного метода”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:4, (2018), 504–519.
- [20] Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак, “Теоретический анализ задачи магнитной маскировки на основе оптимизационного метода”, *Дифференциальные уравнения*, **54**:9, (2018), 1155–1166.
- [21] Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. А. Терешко, “Оптимизационный анализ задачи тепловой маскировки цилиндрического тела”, *Докл. АН.*, **472**:4, (2017), 398–402.
- [22] Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко, “Оптимизационный метод в осесимметричных задачах электрической маскировки материальных тел”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:2, (2019), 217–234.
- [23] G. Alekseev, D. Tereshko, “Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **135**, (2019), 1269–1277.
- [24] H. Han, X. Wu, *Artificial Boundary Method*, Springer-Verlag (Tsinghua University Press), Berlin (Beijing), 2013.

[25] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974.

Поступила в редакцию  
30 апреля 2019 г.

Исследование выполнено при финансовой  
поддержке ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток”  
(проект № 18-5-064).

---

*Lobanov A. V., Spivak Yu. E.* Optimization method in two-dimensional electrical cloaking problems. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019. V. 19. No 1. P. 31–42.

#### ABSTRACT

In this paper, we study control problems for the two-dimensional electrical cloaking model in the case when the cloaking device has shape of a ring filled with an inhomogeneous anisotropic medium. These problems arise while developing technologies of design of electrical cloaking devices using an optimization method for solving inverse problems. The solvability of the direct and control problems for considered electrical transmission model is proved. The optimality system that describes the necessary conditions for an extremum is derived, and its properties are investigated. The possibility of implementing two types of numerical algorithms that are used to find approximate solutions is discussed.

Key words: *electric transmission problem, inverse problem, optimization method, existence, uniqueness, optimality system, invisibility.*