Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 1. С. 58–62

УДК 531.31
MSC2010 70B05

© М. А. Гузев[1]

Особенности отображений, приводящие к центральному полю

Для механической системы с двумя степенями свободы показано, что условие обращения в нуль якобиана отображения, зависящего от потенциала взаимодействия, выделяет центральное поле, обеспечивающее выполнение этого условия. Высказана гипотеза, что в общем случае особенности координатных отображений приводят к потенциалам, допускающим существование дополнительного к энергии интеграла движения.

Ключевые слова: *центральное поле, интеграл движения.*

В классической механике хорошо известна теорема Лиувилля [1], по которой канонические уравнения гамильтоновой системы $2n$ порядка интегрируются в квадратурах при наличии у системы n первых интегралов в инволюции. При этом траектория такой системы в $2n$-мерном фазовом пространстве может быть представлена как намотка на n-мерном торе. Составляющим элементом «научного фольклора», повествующего о поведении замкнутой механической системы материальных точек, является закон сохранения полной энергии, при этом существование дополнительных интегралов движения к энергии зависит от свойств потенциала взаимодействия точек. В частности, для точки в центральном поле на плоскости с потенциалом

$$V(q_1, q_2) = V(|\mathbf{q}|), \quad |\mathbf{q}|^2 = q_1^2 + q_2^2,$$

момент импульса является интегралом движения, независимым от функции Гамильтона и находящимся с ней в инволюции, что позволяет свести задачу о движении в центральном поле к задаче с одной степенью свободы. В трехмерном пространстве при движении в центральном поле всякая орбита является плоской, так что ее исследование сводится к предыдущей задаче.

Существование интегралов движения для механической системы при заданном потенциале взаимодействия приводит к необходимости уменьшить число независимых кинематических характеристик, вводимых для описания системы. Тогда набор переменных, который изначально был введен, следует изменить, согласовав его

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `guzev@iam.dvo.ru`

со структурой интегралов движения. В связи с этим заметим, что в классической механике для систем с функцией Гамильтона традиционно исследуются вопросы, связанные с выбором переменных, сохраняющих канонический вид уравнений движения [1]. При этом в [1] также показано, как наличие интеграла энергии понижает размерность фазового пространства, а фазовые траектории в новых переменных удовлетворяют каноническим уравнениям.

В данной заметке мы рассмотрим уменьшение числа независимых параметров с точки зрения появления особенностей у отображения, задающего замену переменных при переходе от одного набора кинематических характеристик описания к другому. Формальная постановка может быть следующей: в $2n$-мерном фазовом пространстве с координатами $q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n$ введем новые координатные функции

$$z_1 = z_1(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,V),\dots,z_i = z_i(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,V),\quad i=1,\dots,2n, \tag{1}$$

полагая, что соотношения (1) содержат явно потенциал $V=V(q_1,\dots,q_n)$. По определению отображение $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)\to(z_1,\dots,z_n,z_{n+1},\dots,z_{2n})$ имеет особенности, если определитель матрицы Якоби равен нулю, т.е.

$$\det\left\|\frac{\partial(z_1,\dots,z_n,z_{n+1},\dots,z_{2n})}{\partial(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)}\right\| =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial q_1}+\frac{\partial z_1}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial q_n}+\frac{\partial z_1}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial q_n} & \frac{\partial z_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial q_1}+\frac{\partial z_n}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial q_n}+\frac{\partial z_n}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial q_n} & \frac{\partial z_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial z_{n+1}}{\partial q_1}+\frac{\partial z_{n+1}}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial q_n}+\frac{\partial z_{n+1}}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial q_n} & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial p_n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial z_{2n}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial z_{2n}}{\partial q_n} & \frac{\partial z_{2n}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial z_{2n}}{\partial p_n} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Задача состоит в том, чтобы указать потенциалы, приводящие к появлению особенностей типа (2).

Возможные решения такой задачи исследуем на примере системы с двумя степенями свободы, для которой фазовое пространство является четырехмерным пространством с координатами q_1,q_2,p_1,p_2. Введем кинематические переменные

$$z_1 = p_1q_2 - p_2q_1,\quad z_2 = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + V(\mathbf{q}) = \frac{p_1^2}{2}+\frac{p_2^2}{2}+V(q_1,q_2),$$
$$z_3 = \frac{1}{2}|\mathbf{q}|^2 = \frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2),\quad z_4 = (\mathbf{p},\mathbf{q}) = p_1q_1+p_2q_2. \tag{3}$$

Сразу заметим, что для динамической системы с функцией Гамильтона $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ координатные поверхности $z_2=const$ соответствуют уровням постоянной энергии системы. Матрица Якоби отображения (3) равна

$$\left\| \frac{\partial(z_1,z_2,z_3,z_4)}{\partial(q_1,q_2,p_1,p_2)} \right\| = \begin{pmatrix} -p_2 & p_1 & q_2 & -q_1 \\ V_{q_1} & V_{q_2} & p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & q_1 & q_2 \end{pmatrix}, \quad V_{q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad V_{q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}.$$

Разложение по третьей строке дает представление для якобиана J в виде

$$J = \det \left\| \frac{\partial(z_1,z_2,z_3,z_4)}{\partial(p_1,p_2,q_1,q_2)} \right\| = q_1 \begin{vmatrix} p_1 & q_2 & -q_1 \\ V_{q_2} & p_1 & p_2 \\ p_2 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} - q_2 \begin{vmatrix} -p_2 & q_2 & -q_1 \\ V_{q_1} & p_1 & p_2 \\ p_1 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}.$$

Дальнейшее вычисление детерминантов приводит к следующему выражению:

$$J = p_1q_1(p_1q_2 - q_1p_2) - q_1q_2(q_2V_{q_2} - p_2^2) - q_1^2(q_1V_{q_2} - p_1p_2) +$$
$$+ p_2q_2(p_1q_2 - q_1p_2) + q_2^2(q_2V_{q_1} - p_1p_2) + q_1q_2(q_1V_{q_1} - p_1^2).$$

Группируя однородные слагаемые, получаем

$$J = q_2V_{q_1}(q_1^2 + q_2^2) - q_1V_{q_2}(q_1^2 + q_2^2) = 2z_3(q_2V_{q_1} - q_1V_{q_2}). \tag{4}$$

Таким образом, для системы с двумя степенями свободы координатные отображения (3) порождают преобразование $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \to (\mathbf{z})$, не имеющее особенностей, если якобиан (4) не равен нулю. Возвращаясь к сформулированной выше задаче, получаем, что отображение (3) имеет особенность при условии

$$q_2V_{q_1} - q_1V_{q_2} = 0. \tag{5}$$

Это ограничение на потенциал выделяет функции V, которые удовлетворяют полученному условию (5): $V = V(q_1^2 + q_2^2)$. Отсюда следует, что поле V должно быть центральным.

Убедимся в том, что это ограничение на потенциал уменьшает на единицу число кинематических характеристик, т.е. ранг матрицы Якоби равен трем. Технически это проще показать в переменных $r, \varphi, p_r, p_\varphi$, связанных ортогональным преобразованием с q_1, q_2, p_1, p_2:

$$q_1 = r\cos\varphi, \quad q_2 = r\sin\varphi, \quad p_r \equiv p_1\cos\varphi + p_2\sin\varphi, \quad p_\varphi \equiv p_1\sin\varphi - p_2\cos\varphi.$$

В этом случае формулы (3) можно представить в виде

$$z_1 = rp_\varphi, \quad z_2 = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2} + V(r), \quad z_3 = \frac{r^2}{2}, \quad z_4 = rp_\varphi. \tag{6}$$

Соответствующая преобразованию (6) матрица Якоби равна

$$\begin{pmatrix} p_\varphi & 0 & 0 & r \\ V_r & 0 & p_r & p_\varphi \\ r & 0 & 0 & 0 \\ p_r & 0 & r & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг полученной матрицы совпадает с рангом матрицы

$$\begin{pmatrix} p_\varphi & 0 & r \\ V_r & p_r & p_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ p_r & r & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для его нахождения вычисляем все миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} p_\varphi & 0 & r \\ V_r & p_r & p_\varphi \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = -r^2 p_r, \quad \begin{vmatrix} p_\varphi & 0 & r \\ V_r & p_r & p_\varphi \\ p_r & r & 0 \end{vmatrix} = r^2 V_r - r\left(p_r^2 + p_\varphi^2\right),$$
$$\begin{vmatrix} V_r & p_r & p_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ p_r & r & 0 \end{vmatrix} = r^2 p_\varphi, \quad \begin{vmatrix} p_\varphi & 0 & r \\ r & 0 & 0 \\ p_r & r & 0 \end{vmatrix} = r^3.$$

Отсюда видно, что миноры отличны от нуля всюду, кроме точки, определяющей начало координат, т.е. ранг матрицы (7) равен трем.

Таким образом, для системы с двумя степенями свободы центральное поле выделено из всех потенциалов взаимодействия условием обращения в нуль якобиана координатного отображения между картами $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ и $(\mathbf{z})$. Такое уменьшение на единицу числа независимых кинематических параметров описания согласовано с динамикой гамильтоновой системы, для которой в случае центрального поля момент импульса является интегралом движения. Рассмотренный пример позволяет высказать гипотезу, что в общем случае решения уравнения (2) относительно функции $V = V(q_1,\dots,q_n)$ могут приводить к потенциалам, допускающим существование дополнительного к энергии интеграла движения.

Список литературы

[1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Едиториал УРСС, М., 2017.

Поступила в редакцию
20 мая 2020 г.

Guzev M. A. Features of mappings leading to a central field. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 1. P. 58–62.

ABSTRACT

For a mechanical system with two degrees of freedom, it is shown that the condition of zeroing the Jacobian map depended on the interaction potential selects a central field that ensures this condition fulfillment. It has been hypothesized that, in the general case, the features of coordinate mappings lead to potentials that admit the existence of an motion integral additional to the energy.

Key words: *central field, motion integral.*