Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 2. С. 135–143

УДК 517.54
MSC2010 31B99

© А. С. Афанасьева-Григорьева[1], Е. Г. Прилепкина[2]

Задачи об экстремальном разбиении для p-гармонических радиусов Робена

Теоремы об экстремальном разбиении плоских областей, касающиеся произведений радиусов Робена, распространяются на области евклидова пространства. В некоторых случаях ослаблено классическое условие неналегания. Доказательства основаны на технике модулей семейств кривых и диссимметризации.

Ключевые слова: *p-гармонический радиус, радиус Робена, модуль семейства кривых, диссимметризация, экстремальные разбиения.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202014

1. Предварительные сведения

Задачи об экстремальном разбиении плоских областей имеют богатую историю и тесно связаны с различными задачами геометрической теории функций. В классической постановке речь идет о нахождении разбиения области D на две непересекающиеся подобласти с максимальным произведением конформных (внутренних) радиусов. Как было доказано Лаврентьевым М.А. [1], экстремальным разбиением комплексной плоскости для выбранных различных точек $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ является разбиение на две полуплоскости D_1^*, D_2^* с общей границей, причем точки $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ симметричны относительно этой границы. А именно

$$r(D_1,\mathbf{a}_1)\cdot r(D_2,\mathbf{a}_2)\leqslant r(D_1^*,\mathbf{a}_1)\cdot r(D_2^*,\mathbf{a}_2)=|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2|^2, \tag{1}$$

где $r(D_1,\mathbf{a}_1)$ и $r(D_2,\mathbf{a}_2)$ – конформные радиусы плоских неналегающих областей, $\mathbf{a}_i\in D_i$, $i=1,2$. Для непересекающихся областей D_1, D_2, лежащих в единичном круге $U=\{|z|<1\}$, справедливо неравенство Куфарева [2]

$$r(D_1,\mathbf{a}_1)\cdot r(D_2,\mathbf{a}_2)\leqslant|\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1|^2(1-|(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)/(1-\overline{\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_2)|^2). \tag{2}$$

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690091, г. Владивосток,ул. Суханова, 8.
[2] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
Электронная почта: `a.s.afanasevagrigoreva@yandex.ru` (А. С. Афанасьева-Григорьева), `pril-elena@yandex.ru` (Е. Г. Прилепкина).

Хорошо известно, что на комплексной плоскости существует конформное отображение, переводящее единичный круг в себя, и две заданные точки $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ в точки, расположенные на вещественной прямой симметрично началу координат. Поэтому неравенство (2) в эквивалентной формулировке может быть записано в виде

$$r(D_1, \mathbf{a}_1) \cdot r(D_2, \mathbf{a}_2) \leqslant r(G_1^*, \mathbf{a}_1) \cdot r(G_2^*, \mathbf{a}_2), \tag{3}$$

где $\mathbf{a}_1 = (a,0)$, $\mathbf{a}_2 = (-a,0)$, $a > 0$, $G_1^* = U \cap \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$, $G_2^* = U \cap \{\mathrm{Re}\, z < 0\}$. В дальнейшем неравенства (1), (2) обобщались в различных направлениях. Задачи об экстремальном разбиении областей на комплексной плоскости продолжают вызывать интерес у специалистов и в настоящее время [3–5]. Часть исследований касается также ослабления условий неналегания областей, в других работах распространяется понятие конформного радиуса. Одним из методов решения задач об экстремальном разбиении является емкостной метод, наиболее успешно применяемый Дубининым В.Н. [6]. В [7] было введено понятие радиуса Робена плоских областей (конформный радиус является частным случаем радиуса Робена) и доказаны некоторые неравенства типа (1). В частности, для непересекающихся плоских подобластей D_1, D_2 единичного круга U и точек $\mathbf{a}_1 \in D_1$, $\mathbf{a}_2 \in D_2$, замкнутых множеств $\Gamma_i \subset \partial D_i$ таких, что $(U \cap \partial D_i) \subset \Gamma_i$, $i = 1,2$, справедливо неравенство [7]

$$r(D_1, \Gamma_1, \mathbf{a}_1) r(D_2, \Gamma_2, \mathbf{a}_2) \leqslant \frac{|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|^2 |1 - \overline{\mathbf{a}_1} \mathbf{a}_2|^2}{(1 - |\mathbf{a}_1|^2)(1 - |\mathbf{a}_2|^2)}. \tag{4}$$

Здесь $r(D,\Gamma,\mathbf{a})$ означает вычисленный в точке $\mathbf{a} \in D$ радиус Робена области D относительно множества $\Gamma \subset \partial D$ [7]. В случае $\Gamma_i \subset \partial U$ справедливо неравенство в другую сторону [8]

$$r(D_1, \Gamma_1, \mathbf{a}_1) r(D_2, \Gamma_2, \mathbf{a}_2) \geqslant \frac{(1 - |\mathbf{a}_1|^2)(1 - |\mathbf{a}_2|^2) |1 - \overline{\mathbf{a}_1} \mathbf{a}_2|^2}{|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|^2}. \tag{5}$$

Вновь применяя конформное отображение круга на себя, переводящее заданные точки в симметричные относительно начала, мы можем записать неравенства (4), (5) в виде

$$r(D_1, \Gamma_1, \mathbf{a}_1) r(D_2, \Gamma_2, \mathbf{a}_2) \leqslant r(G_1^*, \Gamma_1^*, \mathbf{a}_1) r(G_2^*, \Gamma_2^*, \mathbf{a}_2), \tag{6}$$

$$r(D_1, \Gamma_1, \mathbf{a}_1) r(D_2, \Gamma_2, \mathbf{a}_2) \geqslant r(G_1^*, \Gamma_1^{**}, \mathbf{a}_1) r(G_2^*, \Gamma_2^{**}, \mathbf{a}_2), \tag{7}$$

где $(U \cap \partial D_i) \subset \Gamma_i$ в неравенстве (6), $\Gamma_i \subset \partial U$ в неравенстве (7), $i = 1,2$, $\Gamma_1^* = \Gamma_2^* = U \cap \{\mathrm{Re}\, z = 0\}$, $\Gamma_1^{**} = \partial U \cap \{\mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$, $\Gamma_2^{**} = \partial U \cap \{\mathrm{Re}\, z \leqslant 0\}$ и $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, G_1^*, G_2^* определены в (3).

Для областей размерности $n \geqslant 2$ и $p > 1$ Левицкий Б.Е. ввел понятие p-гармонического радиуса, которое в случае плоской области и $p = 2$ совпадает с конформным радиусом [9]. Наиболее изученными на данный момент являются случаи $p = 2$ [10] и $p = n$ [11]. Нами было доказано несколько теорем об экстремальном разбиении пространственных областей, касающихся p–гармонических радиусов и 2–гармонических радиусов Робена [12–14]. В [12] Дубинин В.Н. предложил использовать в доказательствах метод модулей семейств кривых наряду с асимптотическими формулами емкостей вырождающихся конденсаторов. Эти идеи легли в основу работ [14,15]. В [15] мы ввели понятие радиуса Робена пространственной области, которое, в частности, включает в себя понятия конформного радиуса, радиуса Робена плоских областей и p–гармонического радиуса в евклидовом пространстве. Данная работа продолжает исследования, начатые в [15]. В Теореме 1 мы распространяем на случай пространственных областей неравенства (6), (7). При этом единичный круг заменен на область, симметричную относительно некоторой гиперплоскости. Теорема 2 дополняет Теорему 3 работы [15] таким же образом, как неравенство (5) дополняет (4). В Теоремах 3 и 4 ослаблены классические условия неналегания областей в некоторых специальных случаях экстремального разбиения. Заметим, что Теорема 4 является обобщением Теоремы 6.19 [6].

Всюду ниже $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное евклидово пространство, состоящее из точек $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$, $n\geqslant 2$, с обычным евклидовым расстоянием $|\cdot|$. Для шара и гиперсферы с центром в точке $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ и радиусом $t>0$ мы будем использовать обозначения $B(\mathbf{a},t)=$ $=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n: |\mathbf{a}-\mathbf{x}|<t\}$, $S(\mathbf{a},t)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n: |\mathbf{a}-\mathbf{x}|=t\}$ соответственно. Через w_n обозначим объем единичного шара $B(0,1)$. Также нам понадобятся цилиндрические координаты $[r,\theta,x']$ точки $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, связанные с начальными координатами формулами $x_1=r\cos\theta$, $x_2=r\sin\theta$, $\mathbf{x}'=(x_3,x_4,...,x_n)$. Обозначим через J $(n-2)$-мерную плоскость $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n: \mathbf{x}=(0,0,x_3,...,x_d)\}$. Область $B\subset\mathbb{R}^n$ назовем *областью вращения* (относительно оси J), если для любой точки $[r,\theta,\mathbf{x}']\in B$ и любого φ точка $[r,\varphi,\mathbf{x}']$ также принадлежит B. Записи типа $\{x_i=0\}$, $\{\theta=\theta_0\}$, $\{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\}$, будут, соответственно, обозначать гиперплоскость $\{\mathbf{x}=(x_1,...,x_i,...,x_n)\in\mathbb{R}^n: x_i=0\}$, "половину" гиперплоскости $\{[r,\theta,\mathbf{x}']\in\mathbb{R}^n: \theta=\theta_0\}$, двугранный угол $\{[r,\theta,\mathbf{x}']\in\mathbb{R}^n: \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\}$. Точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$ симметричны относительно гиперплоскости $\{x_i=0\}$, если $\mathbf{x}=(x_1,...,x_i,....,x_n)$ и $\mathbf{x}^*=$ $=(x_1,...,-x_i,...,x_n)$. Множество $A\subset\mathbb{R}^n$ симметрично относительно $\{x_i=0\}$, если это множество совпадает с множеством $A^*=\{(x_1,...,-x_i,...,x_n)\in\mathbb{R}^n: (x_1,...,x_i,...,x_n)\in A\}$.

Пусть Λ — семейство локально спрямляемых кривых в $\mathbb{R}^n$. Предполагается, что каждая кривая $l\in\Lambda$ является объединением конечного числа открытых дуг, замкнутых дуг или замкнутых кривых. Чтобы подчеркнуть, что кривая понимается в стандартном смысле, мы будем называть ее непрерывной кривой. Фраза "кривая соединяет два множества A и B в G" (где $A\subset\overline{G}$, $B\subset\overline{G}$) означает, что кривая непрерывна и имеет представление $l:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ такое, что $l(a)\in A$, $l(b)\in B$, $l(t)\in G$ для $a<t<b$. Модулем (p-модулем), $p>1$, семейства Λ называется величина

$$M_p(\Lambda) = \inf \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ таким, что $\int\limits_l \rho ds\geqslant 1$ имеет место для каждой кривой $l\in\Lambda$. Свойства модулей семейств кривых широко представлены в литературе, более подробную информацию можно посмотреть, например, в работах [16–18].

Пусть нам даны область $D\subset\mathbb{R}^n$, точка $\mathbf{a}\in D$, непустое множество $\Gamma\subset\partial D$ и $t>0$ достаточно малое число для того, чтобы шар $B(\mathbf{a},t)$ принадлежал D. Обозначим через $M_p(t,\mathbf{a},D,\Gamma)$ — p-модуль семейства кривых $\Lambda(t,\mathbf{a},D,\Gamma)$, соединяющих гиперсферу

$S(\mathbf{a},t)$ и множество Γ по области D,

$$mod_p(t,\mathbf{a},D,\Gamma) = \left(\frac{nw_n}{M_p(t,\mathbf{a},D,\Gamma)}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Определим p-гармонический радиус Робена $R_p(D,\Gamma,\mathbf{a})$ области D относительно множества Γ в точке $\mathbf{a}$ с помощью равенства

$$\mu_p(R_p(D,\Gamma,\mathbf{a})) = \lim_{t\to 0+}\left(\mu_p(t) - mod_p(t,\mathbf{a},D,\Gamma)\right), \tag{8}$$

где

$$\mu_p(t) = \begin{cases} -\log(t), & p=n, \\ \frac{p-1}{n-p}t^{(p-n)/(p-1)}, & p\neq n. \end{cases}$$

Существование предела (8) вытекает из свойств модуля семейств кривых [15]. Непосредственно из определения следуют асимптотические формулы при $t\to 0$,

$$\begin{gathered} M_p(t,\mathbf{a},D,\Gamma) = (nw_n)\left(\frac{1}{\mu_p(t)}\right)^{p-1} + (p-1)nw_n\mu_p(R_p(D,\Gamma,\mathbf{a}))\left(\frac{1}{\mu_p(t)}\right)^{p} + \\ +o(1)\left(\frac{1}{\mu_p(t)}\right)^{p}, \qquad p\leqslant n, \end{gathered} \tag{9}$$

$$M_p(t,\mathbf{a},D,\Gamma) = nw_n(-\,\mu_p(R_p(D,\Gamma,\mathbf{a}))^{1-p} + o(1), \qquad p>n. \tag{10}$$

Известно, что емкость конденсатора равна модулю семейств кривых, соединяющих его пластины [19]. Этот факт показывает, что введенное нами понятие радиуса Робена совпадает с p-гармоническим радиусом [9] в случае $\Gamma=\partial D$. Когда $p=2$, $n=2$ и Γ — замкнутом множестве, мы получаем радиус Робена [7] областей на плоскости. При $p=2$, $n\geqslant 3$ понятие радиуса Робена было введено в работе [13] с использованием функционального подхода.

2. Результаты

Теорема 1. *Пусть область D симметрична относительно гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$, D_1 и D_2 — непересекающиеся подобласти D, точки $\mathbf{a}_1 = (a_1,\dots,a_n)\in D_1$, $\mathbf{a}_2 = (-\,a_1,\dots,a_n)\in D_2$ также симметричны относительно $\{x_1=0\}$, $a_1>0$ для определенности. Если множества $\Gamma_i\subset\partial D_i$, $i=1,2$, удовлетворяют условию $(D\cap\partial D_i)\subset\Gamma_i$, то*

$$\mu_p(R_p(D_1,\Gamma_1,\mathbf{a}_1)) + \mu_p(R_p(D_2,\Gamma_2,\mathbf{a}_2)) \geqslant 2\mu_p(R_p(D^*,\Gamma^*,\mathbf{a}_1)), \tag{11}$$

где $D^*=D\cap\{x_1>0\}$, $\Gamma^*=\overline{D\cap\{x_1=0\}}$. В случае $\Gamma_i\subset(\partial D_i\cap\partial D)$, $i=1,2$, справедливы неравенства

$$\mu_p(R_p(D_1,\Gamma_1,\mathbf{a}_1)) + \mu_p(R_p(D_2,\Gamma_2,\mathbf{a}_2)) \leqslant 2\mu_p(R_p(D^*,\Gamma^{**},\mathbf{a}_1)), \qquad p\leqslant n, \tag{12}$$

$$\begin{gathered}(-\,\mu_p(R_p(D_1,\Gamma_1,\mathbf{a}_1)))^{1-p} + (-\,\mu_p(R_p(D_2,\Gamma_2,\mathbf{a}_2))^{1-p} \leqslant \\ 2(-\,\mu_p(R_p(D^*,\Gamma^{**},\mathbf{a}_1)))^{1-p}, \qquad p>n, \end{gathered} \tag{13}$$

где $\Gamma^{**}=\partial D\cap\{x_1\geqslant 0\}$.

Доказательство. Пусть Λ' — кривые вида $l_1 \cup l_2$, где l_1 — кривая из семейства $\Lambda(t, \mathbf{a}_1, D^*, \Gamma^*)$, l_2 — отражение l_1 относительно гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$. Тогда из принципа композиции и симметрии [17, с. 178–179] (см. также [15, Lemma 2]

$$M_p(\Lambda') = 2^{1-p} M_p(t, \mathbf{a}_1, D^*, \Gamma^*).$$

Условие $\Gamma_i \subset \partial D_i$ гарантирует, что Λ' длиннее, чем каждое из разделенных семейств $\Lambda(t, \mathbf{a}_i, D_i, \Gamma_i)$ $i = 1, 2$. Поэтому

$$M_p(t, \mathbf{a}_1, D_1, \Gamma_1)^{1/(1-p)} + M_p(t, \mathbf{a}_2, D_2, \Gamma_2)^{1/(1-p)} \leqslant M_p(\Lambda')^{1/(1-p)} \\ = 2 M_p(t, \mathbf{a}_1, D^*, \Gamma^*)^{1/(1-p)},$$

откуда с учетом определения радиуса Робена вытекает (11). Для доказательства (12), (13) заметим, что в случае $\Gamma_i \subset \partial D_i \cap \partial D$, $i=1,2$, семейства $\Lambda(t, \mathbf{a}_i, D_i, \Gamma_i)$ длиннее, чем семейство кривых, соединяющих $S(\mathbf{a}_1, t) \cup S(\mathbf{a}_2, t)$ с ∂D по области D. Обозначим последнее семейство кривых через Λ'' и заметим, что $M_p(\Lambda'') = 2M_p(t, \mathbf{a}_1, D^*, \Gamma^{**})$ [21]. Таким образом,

$$M_p(t, \mathbf{a}_1, D_1, \Gamma_1) + M_p(t, \mathbf{a}_2, D_2, \Gamma_2) \leqslant M_p(\Lambda'') = 2M_p(t, \mathbf{a}_1, D^*, \Gamma^{**}).$$

Остается воспользоваться асимптотическими формулами (9), (10). Теорема доказана. □

Теорема 2. *Предположим, что G — область вращения и при $k = 0, 1, \ldots m-1$ выполняются следующие условия:*

- *точки $\mathbf{a}_k$ принадлежат окружности $\{[\rho_0, \theta, x_0'] : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, $\mathbf{a}_k = [\rho_0, \theta_k, x_0']$, $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{m-1} < 2\pi$, $\mathbf{a}_k \in G$;*
- *D_k попарно непересекающиеся подобласти G, $\mathbf{a}_k \in D_k$,*
- *$\Gamma_k \subset (\partial D_k \cap \partial G)$.*

Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mu_p(R_p(D_k, \Gamma_k, \mathbf{a}_k)) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \mu_p(R_p(D_k^*, \Gamma_k^{**}, \mathbf{a}_k^*)), \ p \leqslant n,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-\mu_p(R_p(D_k, \Gamma_k, \mathbf{a}_k)))^{1-p} \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} (-\mu_p(R_p(D_k^*, \Gamma_k^{**}, \mathbf{a}_k^*))^{1-p}, \ p > n,$$

где $D_k^* = G \cap \{\pi(2k-1)/m < \theta < \pi(2k+1)/m\}$, $\mathbf{a}_k^* = [\rho_0, 2\pi k/m, x_0']$, и $\Gamma_k^{**} = \partial G \cap \{\pi(2k-1)/m \leqslant \theta \leqslant \pi(2k+1)/m\}$.

Доказательство. Пусть Λ^* — семейство кривых, соединяющих $\cup_{k=0}^{m-1} S(\mathbf{a}_k^*, t)$ с ∂G, и Λ — семейство кривых, соединяющих $\cup_{k=0}^{m-1} S(\mathbf{a}_k, t)$ с ∂G. Заметим , что $M_p(\Lambda^*)$ совпадает с p – емкостью конденсатора, одна пластина которого $\cup_{k=0}^{m-1} S(\mathbf{a}_k^*, t)$, а вторая ∂G. Аналогично вышесказанному, $M_p(\Lambda)$ совпадает с p −емкостью конденсатора, одна пластина которого $\cup_{k=0}^{m-1} S(\mathbf{a}_k, t)$, а вторая ∂G. Применяя диссиметризацию [20], заключаем, что

$$M_p(\Lambda^*) \geqslant M_p(\Lambda). \tag{14}$$

Из симметричности Λ^* вытекает, что

$$M_p(\Lambda^*) = \sum_{k=0}^{m-1} M_p(t, \mathbf{a}_k^*, D_k^*, \Gamma_k^{**})). \tag{15}$$

Для доказательства этого факта достаточно с очевидными изменениями повторить доказательство Леммы 1 работы [21]. Далее, семейства кривых $\Lambda(t,\mathbf{a}_k,D_k,\Gamma_k)$ разделены и $\Lambda(t,\mathbf{a}_k,D_k,\Gamma_k)$ длиннее, чем Λ. Следовательно,

$$M_p(\Lambda) \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_p(t, \mathbf{a}_k, D_k, \Gamma_k)). \tag{16}$$

Из (14)–(16) вытекает, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} M_p(t, \mathbf{a}_k^*, D_k^*, \Gamma_k^{**})) \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_p(t, \mathbf{a}_k, D_k, \Gamma_k)).$$

Остается воспользоваться (9), (10). Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть область D симметрична относительно гиперплоскости $\{x_n = 0\}$ и симметрична относительно гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$, точки $\mathbf{a}_1 = (a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$ $(a_1 > 0)$ принадлежат D. Пусть D_1 и D_2 — подобласти D, $\mathbf{a}_i \in D_i$, $i = 1, 2$, причем $(D_1 \cup D_2) \cap \{x_n > 0\}$ состоит из нескольких непересекающихся областей (компонент связности), и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ принадлежат границам разных компонент. Кроме того, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ также принадлежат границам разных непересекающихся компонент множества $(D_1 \cup D_2) \cap \{x_n < 0\}$. Тогда*

$$\mu_p(R_p(D_1, \mathbf{a}_1)) + \mu_p(R_p(D_2, \mathbf{a}_2)) \geqslant 2\mu_p(R_p(D^*, \mathbf{a}_1)), \tag{17}$$

где $D^* = D \cap \{x_1 > 0\}$. Если множества $\Gamma_i \subset \partial D_i$ удовлетворяют условию $(D \cap \partial D_i) \subset \Gamma_i$, $i = 1,2$, то справедливо неравенство

$$\mu_p(R_p(D_1, \Gamma_1, \mathbf{a}_1)) + \mu_p(R_p(D_2, \Gamma_2, \mathbf{a}_2)) \geqslant 2\mu_p(R_p(D^*, \Gamma^*, \mathbf{a}_1)), \tag{18}$$

где $\Gamma^* = \overline{D \cap \{x_1 = 0\}}$.

Доказательство. Определим следующие семейства кривых: Λ_1^* — кривые, соединяющие в $D^* \cap \{x_n \geqslant 0\}$ полусферу $S(\mathbf{a}_1, t) \cap \{x_n \geqslant 0\}$ с Γ^*; Λ^* — кривые вида $\cup_{i=1}^4 l_i$, где l_1 — кривая из семейства Λ_1^*, l_2 — отражение l_1 относительно гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$, l_3 — отражение l_2 относительно $\{x_n = 0\}$, l_4 — отражение l_2 относительно $\{x_1 = 0\}$; Λ_1^+ — кривые из семейства $\Lambda(t, \mathbf{a}_1, D_1, \Gamma_1)$, лежащие в $\{x_n \geqslant 0\}$; Λ_1^-

— кривые из семейства $\Lambda(t, \mathbf{a}_1, D_1, \Gamma_1)$, лежащие в $\{x_n \leqslant 0\}$; Λ_2^+ — кривые из семейства $\Lambda(t, \mathbf{a}_2, D_2, \Gamma_2)$, лежащие в $\{x_n \geqslant 0\}$; Λ_2^- — кривые из семейства $\Lambda(t, \mathbf{a}_1, D_2, \Gamma_2)$, лежащие в $\{x_n \leqslant 0\}$. В силу симметрии, как в Лемме 2 [15], получаем

$$M_p(\Lambda^*) = 4^{1-p} M_p(\Lambda_1^*) = \frac{4^{1-p} M_p(t, \mathbf{a}_1, D^*, \Gamma^*)}{2}. \tag{19}$$

Заметим, что Λ_1^+, Λ_1^-, Λ_2^+, Λ_1^+ разделены и Λ^* длиннее каждого семейства Λ_1^+, Λ_1^-, Λ_2^+, Λ_2^-. Таким образом, мы имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} M_p(\Lambda^*)^{\frac{1}{1-p}} \geqslant M_p(\Lambda_1^+)^{\frac{1}{1-p}} + M_p(\Lambda_1^-)^{\frac{1}{1-p}} + M_p(\Lambda_2^+)^{\frac{1}{1-p}} + M_p(\Lambda_2^-)^{\frac{1}{1-p}} \geqslant \\ 2^{1-\frac{1}{1-p}} \left(M_p(\Lambda_1^+) + M_p(\Lambda_1^-)\right)^{\frac{1}{1-p}} + 2^{1-\frac{1}{1-p}} \left(M_p(\Lambda_2^+) + M_p(\Lambda_2^-)\right)^{\frac{1}{1-p}} \geqslant \\ 2^{1-\frac{1}{1-p}} \left(M_p(t, \mathbf{a}_1, D_1, \Gamma_1)^{\frac{1}{1-p}} + M_p(t, \mathbf{a}_2, D_2, \Gamma_2)^{\frac{1}{1-p}}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Из (19) и (20) вытекает неравенство

$$2M_p(t, \mathbf{a}_1, D^*, \Gamma^*)^{\frac{1}{1-p}} \geqslant M_p(t, \mathbf{a}_1, D_1, \Gamma_1)^{\frac{1}{1-p}} + M_p(t, \mathbf{a}_2, D_2, \Gamma_2)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Умножая на $-(nw_n)^{1/(p-1)}$, добавляя $2\mu_p(t)$ и переходя к пределу, получаем (18). Доказательство (17) повторяет доказательство (18) с заменой множеств Γ^*,Γ_1,Γ_2 на границы соответствующих областей. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Предположим, что G – область вращения и при $k = 0, 1, \ldots m-1$ выполняются следующие условия:*

- *точки $\mathbf{a}_k$ принадлежат окружности $\{[\rho_0, \theta, x_0'] : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, $\mathbf{a}_k = [\rho_0, \theta_k, x_0']$, $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{m-1} < 2\pi$, $\mathbf{a}_k \in G$;*
- *$D_k \subset G$ подобласти G, $\mathbf{a}_k \in D_k$, $D_k \cap D_{k+1} \cap \{\theta_k \leqslant \theta \leqslant \theta_{k+1}\} = \emptyset$, (полагая $D_m = D_0$, $\theta_m = \theta_0$);*
- *$\Gamma_k \subset \partial D_k$, $((\partial D_k) \cap G) \subset \Gamma_k$.*

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mu_p(R_p(D_k, \Gamma_k, \mathbf{a}_k)) \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} \mu_p(R_p(D_k^*, \Gamma_k^*, \mathbf{a}_k^*)),$$

где $D_k^* = G \cap \{\pi(2k-1)/m < \theta < \pi(2k+1)/m\}$, $a_k^* = [\rho_0, 2\pi k/m, x_0']$, *и*

$$\Gamma_k^* = \overline{G} \cap (\{\theta = \pi(2k-1)/m\} \cup \{\theta = \pi(2k+1)/m\}).$$

Кроме того,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mu_p(R_p(D_k, \mathbf{a}_k)) \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} \mu_p(R_p(D_k^*, \mathbf{a}_k^*)).$$

Доказательство. Пусть Λ_k^+ — семейство кривых $\Lambda(t, \mathbf{a}_k, D_k, \Gamma_k)$, лежащих в угле $\{\theta_k \leqslant \theta \leqslant \theta_{k+1}\}$ и Λ_k^- — семейство кривых $\Lambda(t, \mathbf{a}_k, D_k, \Gamma_k)$, лежащих в угле $\{\theta_{k-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_k\}$, $k = 0, \ldots, m-1$, $\theta_{-1} = \theta_{m-1}$, $\theta_m = \theta_0$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство Теоремы 3 статьи [15] с тем лишь замечанием, что в условиях теоремы участвующие в доказательстве семейства кривых Λ_k^+ и Λ_k^-, $k = 0, \ldots, m-1$, остаются разделенными. Теорема доказана. □.

Список литературы

[1] М. А. Лаврентьев, “К теории конформных отображений”, *Труды физ. мат. ин-та им. В.А. Стеклова.*, **5**, (1934), 159–245.

[2] П. П. Куфарев, “О конформных отображениях дополнительных областей”, *Докл. акад. наук СССР*, **73**, (1950), 881–884.

[3] Г. В. Кузьмина, “Об одном экстремально-метрическом подходе к задачам об экстремальном разбиении”, *Аналитическая теория чисел и теория функций. 32, Зап. научн. сем. ПОМИ*, **449**, (2016), 214–229.

[4] A. K. Bakhtin, I. V. Denega, “Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane”, *Probl. Anal. Issues Anal.*, **8(26)**:1, (2019), 17–31.

[5] A. Bakhtin, L. Vygivska and I. Denega, “N-Radial Systems of Points and Problems for Non-Overlapping Domains”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38**:2, (2017), 229–235.

[6] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhauser/Springer, Basel, 2014.

[7] В. Н. Дубинин, Д. А. Кириллова, “К задачам об экстремальном разбиении”, *Аналитическая теория чисел и теория функций. 23*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **357**, 2008, 54–74.

[8] Е. Г. Прилепкина, “О принципах композиции для приведенных модулей”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:6, (2011), 1357–1372.

[9] Б. Е Левицкий, “Приведенный p-модуль и внутренний p-гармонический радиус”, *Докл. АН СССР*, **316**:4, (1991), 812–815.

[10] C. Bandle, M. Flucher, “Harmonic radius and concentration of energy, hyperbolic radius and Liouvilles equations $\Delta U = 0$ and $\Delta U = U^{\frac{n+2}{n-2}}$”, *SIAM Review*, **38**:2, (1996), 191–238.

[11] W. Wang, “N-Capacity, N-harmonic radius and N-harmonic transplantation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **327**:1, (2007), 155–174.

[12] В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина, “Об экстремальном разбиении пространственных областей”, *Аналитическая теория чисел и теория функций. 15*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **254**, 1998, 95–107.

[13] K. A. Gulyaeva, S. I. Kalmykov, E. G. Prilepkina, “Extremal decomposition problems in the Euclidean space”, *International Journal of Mathematical Analysis*, **9**:56, (2015), 2763–2773.

[14] S. Kalmykov, E. Prilepkina, “Extremal decomposition problems for p-harmonic radius”, *Analysis Mathematica*, **43**, (2017), 49–65.

[15] С. И. Калмыков, Е. Г. Прилепкина, “О p-гармоническом радиусе Робена в евклидовом пространстве”, *Аналитическая теория чисел и теория функций. 32*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **449**, 2016, 196-–213.

[16] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Princeton, N.J., Van Nostrand, 1966.

[17] B. Fuglede, “Extremal length and functional completion”, *Acta. Math.*, **98**:3-4, (1957), 171–219.

[18] M. Vuorinen, *Conformal geometry and quasiregular mapping*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1988.

[19] В. А. Шлык, “О равенстве p-емкости и p-модуля”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:6, (1993), 216—221.

[20] V. N. Dubinin, “Capacities and geometric transformations of subsets in n-space”, *Geometric and Functional Analysis*, **3**:4, (1993), 342–369.

[21] F. W. Gehring, "A remark on domains quasiconformally equivalent to a ball", *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **2**, (1976), 47–155.

Поступила в редакцию
28 июля 2020 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00018).

Afanaseva-Grigoreva A. S., Prilepkina E.G. Extremal decomposition problems for p-harmonic Robin radius. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 2. P. 135–143.

ABSTRACT

The theorems on the extremal decomposition of plane domains concerning to the products of Robin's radii are extended to the case of domains in Euclidean space. In some cases, the classical non-overlapping condition is weakened. The proofs are based on the moduli technique for families of curves and dissymmetrization.

Key words: *p-harmonic radius, Robin radius, modulus of a family of curves, dissymmetrization, extremal decompositions.*