Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 2. С. 227–233

УДК 517.965, 517.583
MSC2010 39B32, 33E05

© В. Я. Прудников[1]

Задача о разделении переменных

В работе приведен критерий допустимости разделения переменных для голоморфной функции двух переменных.

Ключевые слова: *разделение переменных, голоморфная функция.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202023

В работах [1–12] рассматривались функциональные уравнения

$$f(z_1+z_2)\cdot\varphi(z_1-z_2)=a_1(z_1)b_1(z_2)+\ldots+a_m(z_1)b_m(z_2),$$
$$f(z_1+z_3)\cdot\varphi(z_2+z_3)\cdot\psi(z_1+z_2-z_3)=a_1(z_1,z_2)b_1(z_3)+\ldots+a_m(z_1,z_2)b_m(z_3).$$

В данной работе решается вопрос об условиях представимости голоморфной функции двух переменных в виде

$$f(z_1,z_2)=a_1(z_1)\cdot b_1(z_2)+\ldots+a_m(z_1)\cdot b_m(z_2),$$

где $a_s(z_1)$,$b_s(z_2)$ — голоморфные функции.

Введем обозначения: $k=(k_1,\ldots,k_n)$ — целочисленный вектор с неотрицательными координатами, $|k|:=k_1+k_2+\ldots+k_n$,

$$\frac{\partial^{|k|}f}{\partial^{k_1}z_1\ldots\partial^{k_n}z_n}:=D_{k_1,\ldots,k_n}f.$$

Если функция $a\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, то применяем стандартное обозначение

$$a^{(k)}=\frac{d^ka}{dz^k}.$$

Для функций $a_s=a_s(z_1)$, $b_s=b_s(z_2)$, $s=\overline{1,m}$ введем обозначения

$$a=(a_1,\ldots,a_m),\quad b=(b_1,\ldots,b_m),\quad a\cdot b=a_1b_1+\ldots+a_mb_m,$$
$$a^{(k)}\cdot b=a_1^{(k)}b_1+\ldots+a_m^{(k)}b_m,\quad a\cdot b^{(k)}=a_1b_1^{(k)}+\ldots+a_mb_m^{(k)}.$$

[1] Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: `prudnickov.vit@yandex.ru`

W — вронскиан соответствующей системы функций. Будем обозначать через $(a_s^{(k)})_{m\times m}$ матрицу размером $m\times m$, где s — номер столбца, $s=\overline{1,m}$, а порядок производной k — номер строки, $k=\overline{0,m-1}$. Ясно, что

$$\det(a_s^{(k)}(z_1))_{m\times m} = W(a)(z_1), \qquad \det(b_s^{(k)}(z_2))_{m\times m} = W(b)(z_2),$$
$$W(\{z_2 \to a^{(k)}(z_1)\cdot b(z_2)\}_{k=0}^{m-1}) = W(\{z_1 \to a(z_1)\cdot b^{(k)}(z_2)\}_{k=0}^{m-1}).$$

Считаем, что в определителе $\det(D_{i,j}f)_{m\times m}$ индексы $i,j=\overline{0,m-1}$.

Для голоморфных функций $f,\varphi\colon \omega\to\mathbb{C}$, $\omega\subset\mathbb{C}^2$ полагаем

$$(f,\varphi)_\omega = \int\limits_\omega f\cdot\overline{\varphi}\,d\omega.$$

Если $\{f_i\}_{i=1}^m$ — некоторая система голоморфных функций, то через $\Gamma(f_1,\ldots,f_m)_\omega$ обозначим определитель Грама

$$\Gamma(f_1,\ldots,f_m)_\omega = \begin{vmatrix} (f_1,f_1)_\omega & (f_1,f_2)_\omega & \ldots & (f_1,f_m)_\omega \\ (f_2,f_1)_\omega & (f_2,f_2)_\omega & \ldots & (f_2,f_m)_\omega \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (f_m,f_1)_\omega & (f_m,f_2)_\omega & \ldots & (f_m,f_m)_\omega \end{vmatrix}.$$

Известно, что условие $\Gamma(f_1,\ldots,f_m)_\omega=0$ необходимо и достаточно для линейной зависимости системы функций $\{f_i\}_{i=1}^m$ на множестве ω.

Лемма 1. $W(a)(z_1)\cdot W(b)(z_2) = W(\{z_2\to a^{(k)}(z_1)\cdot b(z_2)\}_{k=0}^{m-1})$.

Доказательство. Так как

$$(a_s^{(k)})_{m\times m}\cdot(b_s^{(k)})^T_{m\times m} = (a^{(s)}\cdot b^{(k)})_{m\times m} \quad \text{и} \quad \det(b_s^{(k)}(z_2))^T_{m\times m} = W(b)(z_2),$$

то из равенства

$$\det(a_s^{(k)})_{m\times m}\cdot\det(b_s^{(k)})^T_{m\times m} = \det(a^{(s)}\cdot b^{(k)})_{m\times m}$$

следует $W(a)(z_1)\cdot W(b)(z_2) = W(\{z_2\to a^{(k)}(z_1)\cdot b(z_2)\}_{k=0}^{m-1})$. □

Обозначим через $P_k(\Omega)$ множество всех $z_k (k=1,2)$ таких, что точки (z_1,z_2) принадлежат области Ω. Введем обозначения дифференциальных операторов

$$L_1^m[u](z_1) := \sum_{k=0}^m p_k(z_1)\frac{d^k u}{dz_1^k}, \quad L_2^m[u](z_2) := \sum_{k=0}^m q_k(z_2)\frac{d^k u}{dz_2^k},$$

где $p_k(z_1), q_k(z_2)$ — некоторые голоморфные функции, $p_m(z_1)\neq 0, q_m(z_2)\neq 0$.

Теорема 1. *Для представления голоморфной функции $f(z_1,z_2)$ в области $\Omega\subset\mathbb{C}^2$ в виде*

$$f(z_1,z_2) = a_1(z_1)\cdot b_1(z_2)+\ldots+a_m(z_1)\cdot b_m(z_2), \quad W(a)(z_1)\cdot W(b)(z_2)\neq 0,$$

необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из условий:

1) функция $z_1\to f(z_1,z_2)$ для любого $z_2\in P_2(\Omega)$ — решение некоторого уравнения $L_1^m[u](z_1)=0$, $W(\{z_1\to D_{0,k}f(z_1,z_2)\}_{k=0}^{m-1})\neq 0$, $(z_1,z_2)\in\Omega$;

2) функция $z_2\to f(z_1,z_2)$ для любого $z_1\in P_1(\Omega)$ — решение некоторого уравнения $L_2^m[u](z_2)=0$, $W(\{z_2\to D_{k,0}f(z_1,z_2)\}_{k=0}^{m-1})\neq 0$, $(z_1,z_2)\in\Omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость*. Пусть

$$f(z_1, z_2) = \sum_{s=1}^{m} a_s(z_1) \cdot b_s(z_2), \qquad W(a)(z_1) \cdot W(b)(z_2) \neq 0. \tag{1}$$

Доказываем условие 1) теоремы. Так как $W(a)(z_1) \neq 0, z_1 \in P_1(\Omega)$, то система функций $\{a_s\}_{s=1}^{m}$ будет фундаментальной для некоторого однородного дифференциального уравнения m-го порядка (см., например, [13])

$$L_1^m[u](z_1) = \sum_{k=0}^{m} p_k(z_1) \frac{d^k u}{dz_1^k} = 0, \quad z_1 \in P_1(\Omega).$$

Поэтому из (1) для любых $(z_1, z_2) \in \Omega$ следует

$$L_1^m[f(\cdot, z_2)](z_1) = \sum_{s=1}^{m} L_1^m[a_s](z_1) \cdot b_s(z_2) = 0,$$

а из леммы получим

$$W(\{z_1 \to D_{0,k} f(z_1, z_2)\}_{k=0}^{m-1}) \neq 0, \quad (z_1, z_2) \in \Omega.$$

Достаточность. Пусть, например, выполнено условие 1). Тогда

$$f(z_1, z_2) = a_1(z_1) \cdot b_1(z_2) + \ldots + a_m(z_1) \cdot b_m(z_2),$$

где $\{a_s(z_1)\}_{s=1}^{m}$ — фундаментальная система решений уравнения $L_1^m[u](z_1) = 0$, поэтому $W(a) \neq 0$. Для системы функций $\{b_s(z_1)\}_{s=1}^{m}$ также $W(b) \neq 0$. В самом деле, так как $W(a) \neq 0$, то из системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{m} a_s^{(k)}(z_1) \cdot b_s(z_2) = D_{k,0} f(z_1, z_2), \quad k = \overline{0, m-1}$$

следует голоморфность функций $b_s(z_2)$, а из леммы — условие $W(b) \neq 0$. □

Теорема 2. *Для представления голоморфной функции $f(z_1, z_2)$ в области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ в виде*

$$f(z_1, z_2) = a_1(z_1) \cdot b_1(z_2) + \ldots + a_m(z_1) \cdot b_m(z_2), \quad W(a)(z_1) \cdot W(b)(z_2) \neq 0$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$\det(D_{i,j} f)_{m \times m} \neq 0 \text{ в } \Omega, \quad \Gamma(z_2 \to D_{0,0} f(z_1, z_2), \ldots, z_2 \to D_{m,0} f(z_1, z_2))_{P_2(B)} = 0,$$

где B — окрестность некоторой точки из Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость*. Из теоремы 1следует, что в Ω

$$\det(D_{i,j} f)_{m \times m} \neq 0.$$

Фиксируем точку (z_1^0, z_2^0) из Ω и некоторую ее окрестность $B \subset \Omega$. Согласно теореме 1 функция $z_1 \to f(z_1, z_2)$ — решение уравнения $L_1^m[u](z_1) = 0$, поэтому для каждого $z_1 \in P_1(\Omega)$ система функций $\{z_2 \to D_{k,0}f(z_1, z_2)\}_{k=0}^m$ линейно зависима в $P_2(B)$, но тогда $\Gamma(z_2 \to D_{0,0}f(z_1, z_2), \ldots, z_2 \to D_{m,0}f(z_1, z_2))_{P_2(B)} = 0, \quad z_1 \in P_1(\Omega)$.

Достаточность. Из равенства $\Gamma(z_2 \to D_{0,0}f(z_1, z_2), \ldots, z_2 \to D_{m,0}f(z_1, z_2))_{P_2(B)} = 0$, $B \subset \Omega$ следует для каждого $z_1 \in P_1(\Omega)$ линейная зависимость в $P_2(B)$ системы функций $\{z_2 \to D_{k,0}f(z_1, z_2)\}_{k=0}^m$:

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(z_1) \cdot D_{k,0}f(z_1, z_2) = 0, \quad z_1 \in P_1(\Omega), z_2 \in P_2(B). \tag{2}$$

Покажем, что $p_m(z_1) \neq 0$ для каждого $z_1 \in P_1(\Omega)$. Пусть существует такое z_1, что $p_m(z_1) = 0$. Тогда из (2) получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k(z_1) \cdot D_{k,0}f(z_1, z_2) = 0,$$

а так как из условия $W(\{z_2 \to D_{k,0}f(z_1, z_2)\}_{k=0}^{m-1}) = \det(D_{i,j}f(z_1, z_2))_{m\times m} \neq 0$ следует линейная независимость системы функций $\{z_2 \to D_{k,0}f(z_1, z_2)\}_{k=0}^{m-1}$, то $p_k(z_1) = 0, k = \overline{1, m-1}$, что противоречит линейной зависимости системы $\{z_2 \to D_{k,0}f(z_1, z_2)\}_{k=0}^m$. Таким образом, получим $p_m(z_1) \neq 0$ для всех $z_1 \in P_1(\Omega)$.

Разделив (2) на $p_m(z_1)$ и переобозначив $\frac{p_k(z_1)}{p_m(z_1)}$ на $p_k(z_1)$, $k = \overline{1, m-1}$, получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k(z_1) \cdot D_{k,0}f(z_1, z_2) = -D_{m,0}f(z_1, z_2), \quad z_1 \in P_1(\Omega), z_2 \in P_2(B).$$

Так как $\det(D_{i,j}f(z_1, z_2))_{m\times m} \neq 0$, то из системы

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k(z_1) \cdot D_{k,s}f(z_1, z_2) = -D_{m,s}f(z_1, z_2), \quad z_1 \in P_1(\Omega), z_2 \in P_2(B), s = \overline{0, m-1},$$

следует голоморфность функций $p_k(z_1), k = \overline{1, m-1}$. Но тогда голоморфная функция

$$(z_1, z_2) \to D_{m,0}f(z_1, z_2) + \sum_{k=0}^{m-1} p_k(z_1) \cdot D_{k,0}f(z_1, z_2)$$

тождественно равна нулю в B, поэтому из теоремы единственности [14] следует, что во всей области Ω

$$D_{m,0}f(z_1, z_2) + \sum_{k=0}^{m-1} p_k(z_1) \cdot D_{k,0}f(z_1, z_2) = 0,$$

то есть функция $z_1 \to f(z_1, z_2)$ для любого $z_2 \in P_2(\Omega)$ является решением уравнения

$$\frac{d^m u}{dz_1^m} + \sum_{k=0}^{m-1} p_k(z_1) \frac{d^k u}{dz_1^k} = 0, \quad z_1 \in P_1(\Omega),$$

а так как $W(\{z_1 \to D_{0,k}f(z_1,z_2)\}_{k=0}^{m-1}) \neq 0$, то по теореме 1 для функции $f(z_1,z_2)$ в области Ω справедливо представление

$$f(z_1,z_2) = a_1(z_1)\cdot b_1(z_2) + \ldots + a_m(z_1)\cdot b_m(z_2), \quad W(a)(z_1)\cdot W(b)(z_2) \neq 0.$$

□

Замечание. При выполнении условий

$$\det(D_{i,j}f)_{m\times m} \neq 0 \text{ в } \Omega, \quad \Gamma(D_{0,0}f,\ldots,D_{m,0}f)_B = 0,$$

где B — окрестность некоторой точки из Ω, функция $z_1 \to f(z_1,z_2)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^m u}{dz_1^m} + p_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dz_1^{m-1}} + \ldots + p_0 u = 0,$$

где $p_{m-1},\ldots,p_0$ — константы. В самом деле, из условия

$$\Gamma(D_{0,0}f,\ldots,D_{m,0}f)_B = 0$$

следует существование таких констант $p_k, k = \overline{0,m}$, что $|p_0| + \ldots + |p_m| \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{m} p_k \cdot D_{k,0}f(z_1,z_2) = 0, \quad (z_1,z_2) \in B.$$

Далее проводим рассуждения такие же, как в доказательстве теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z_1,z_2)$ голоморфна в области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, точка $(z_1^0,z_2^0) \in \Omega$. Для представления $f(z_1,z_2)$ в виде*

$$f(z_1,z_2) = a_1(z_1)\cdot b_1(z_2) + \ldots + a_m(z_1)\cdot b_m(z_2), \quad W(a)(z_1)\cdot W(b)(z_2) \neq 0,$$

необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $\det(D_{i,j}f)_{m\times m} \neq 0$ в Ω;

2) $f(z_1,z_2) = \sum\limits_{j=1}^{m} D_{0,j-1}f(z_1,z_2^0)\cdot c_j(z_2)$, *где голоморфные функции $c_j(z_2)$ образуют единственное решение системы*

$$\sum_{j=1}^{m} D_{i-1,j-1}f(z_1^0,z_2^0)\cdot c_j(z_2) = D_{i-1,0}f(z_1^0,z_2), \quad i = \overline{1,m}.$$

Доказательство. *Необходимость.* Согласно теореме 2 функция $z_1 \to f(z_1,z_2)$ для любого $z_2 \in P_2(\Omega)$ является решением некоторого уравнения

$$\sum_{i=0}^{m} p_i(z_1)\frac{d^i u}{dz_1^i} = 0, \quad p_m(z_1) \neq 0, \quad \det(D_{i,j}f)_{m\times m} \neq 0 \text{ в } \Omega,$$

поэтому для любых $(z_1,z_2) \in \Omega$

$$\sum_{i=0}^{m} p_i(z_1) D_{i,0}f(z_1,z_2) = 0,$$

но тогда

$$\sum_{i=0}^{m} p_i(z_1) D_{i,j} f(z_1, z_2) = 0, \quad j = \overline{0, m}.$$

Полагая здесь $z_2 = z_2^0$, получим

$$\sum_{i=0}^{m} p_i(z_1) D_{i,j} f(z_1, z_2^0) = 0, \quad j = \overline{0, m}.$$

Так как $W(\{z_1 \to D_{0,j} f(z_1, z_2^0)\}_{j=0}^{m-1}) \neq 0$, то $\{z_1 \to D_{0,j} f(z_1, z_2^0)\}_{j=0}^{m-1}$ — фундаментальная система решений уравнения

$$\sum_{i=0}^{m} p_i(z_1) \frac{d^i u}{dz_1^i} = 0, \quad p_m(z_1) \neq 0.$$

Поэтому

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{m} D_{0,j-1} f(z_1, z_2^0) \cdot c_j(z_2),$$

откуда получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} D_{i-1,j-1} f(z_1^0, z_2^0) \cdot c_j(z_2) = D_{i-1,0} f(z_1^0, z_2), \quad i = \overline{1, m}.$$

Из этой системы голоморфные функции $c_j(z_2)$ определяются однозначно, так как $\det(D_{i,j} f(z_1^0, z_2^0))_{m\times m} \neq 0$.

Достаточность. Из представления

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{m} D_{0,j-1} f(z_1, z_2^0) \cdot c_j(z_2)$$

следует, что $a_j(z_1) := D_{0,j-1} f(z_1, z_2^0), \quad b_j(z_2) := c_j(z_2)$. Ясно, что $W(a)(z_1) \neq 0$, так как $\det(D_{i,j} f(z_1, z_2))_{m\times m} \neq 0$. Согласно лемме

$$\det(D_{i,j} f(z_1, z_2))_{m\times m} = \det(D_{i,j} f(z_1, z_2^0))_{m\times m} \cdot \det(b_i^{(j)}(z_2))_{m\times m},$$

поэтому условие $W(b)(z_2) \neq 0$ также выполнено. □

Список литературы

[1] А. А. Илларионов, “Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями”, *Аналитическая теория чисел, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАМ*, **299**, (2017), 105–117.

[2] В. А. Быковский, “Гиперквазимногочлены и их приложения”, *Функц. анализ и его приложения*, **50**:3, (2016), 34–46.

[3] R. Rochberg, L. Rubel, “A Functional Ecquation”, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**:2, (1992), 363–376.

[4] А. А. Илларионов, “Решение функционального уравнения, связанного с трилинейными дифференциальными операторами”, *Дальневост. мат. журн.*, **13**:2, (2016), 169–180.

[5] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Трилинейные функциональные уравнения”, *УМН*, **60**:2(362), (2005), 151–152.

[6] В. А. Быковский, “О ранге нечетных гиперквазимногочленов”, *Докл. РАН*, **470**:3, (2016), 255–256.

[7] А. А. Илларионов, “Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:4, (2016), 43–54.

[8] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, “Гиперэллиптические системы последовательностей и функций”, *Дальневост. матем. журн.*, **16**:2, (2016), 115–122.

[9] А. А. Илларионов, “О произведении двух сигма-функций Вейерштрасса”, *Исследования по линейным операторам и теории функций. 46*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **467**, ПОМИ, СПб., 2018, 73–84.

[10] А. А. Илларионов, М. А. Романов, “Гиперквазимногочлены для тэта-функции”, *Функц. анализ и его прил.*, **52**:3, (2018), 84–87.

[11] А. А. Илларионов, “Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями. II”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16**, (2019), 481–492.

[12] А. А. Илларионов, “Гиперэллиптические системы последовательностей ранга 4”, *Матем. сб.*, **210**:9, (2019), 59–88.

[13] А. И. Егоров, *Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями*, Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 2005, 384 с.

[14] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, ч. II, изд. 2-е, Наука, Москва, 1976, 400 с.

Поступила в редакцию
24 октября 2019 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 1801-00638.)

Prudnikov V. J. The problem of separation of variables. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 2. P. 227–233.

ABSTRACT

The paper presents a criterion for the admissibility of the separation of variables for a holomorphic function of two variables.

Key words: *separation of variables, holomorphic function.*