Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 1. С. 71–88

УДК 517.51
MSC2020 46E30 + 47B38

© Е. Н. Ломакина[1], М. Г. Насырова[1], В. В. Насыров[2]

О некоторых числах оператора Харди в пространствах Лоренца

В статье доказан критерий компактности оператора $Tf(x) = \int_0^x u(\tau)f(\tau)v(\tau)\,d\tau$, $x > 0$, действующего в весовых пространствах Лоренца $T : L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ в области $1 < \max(r, s) \leqslant q < \infty$, $1 < p < \infty$. Для компактного оператора получены двухсторонние оценки аппроксимативных чисел, чисел Гельфанда, Колмогорова, Бернштейна, Митягина и энтропийных чисел.

Ключевые слова: *интегральный оператор Харди, компактный оператор, пространства Лоренца, аппроксимативные числа, числа Гельфанда, числа Колмогорова, числа Бернштейна, числа Митягина, энтропийные числа.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202107

Введение

Пусть (X,μ) — измеримое пространство с положительной σ-аддитивной мерой μ. Функция распределения измеримой функции f относительно меры μ определяется формулой

$$f_*(\tau) = \mu\{x \in X : |f(x)| > \tau\} = \int\limits_{\{x\in X:|f(x)|>\tau\}} d\mu, \qquad \tau > 0.$$

Невозрастающей перестановкой f^* функции f отностительно меры μ называется

$$f^*(t) = \inf\{\tau > 0\colon f_*(\tau) \leqslant t\}.$$

Положим $X=(0,\infty)$, $d\mu(x)=\omega(x)dx$, где $\omega(x)$ — измеримая положительная функция, конечная почти всюду на $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$.

[1] Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.
[2] ФГБОУ ВО Тихоокеанский государственный университет, 680042, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136
Электронная почта: enlomakina@mail.ru (Е. Н. Ломакина), nassm@mail.ru (М. Г. Насырова).

Для $1 \leqslant p, q < \infty$ весовое пространство Лоренца $L^{p,q}_{\omega} \equiv L^{p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^+)$ состоит из всех μ-измеримых функций f, для которых

$$\|f\|_{L^{p,q}_{\omega}} = \left(\int\limits_0^{\infty} \frac{q}{p}\Big(t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q\Big)\, dt\right)^{1/q} < \infty. \tag{1}$$

Пространство Лоренца в случае $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ является банаховым функциональным пространством с нормой (1), в случае же $1 < p < q < \infty$ функционал (1) есть только квазинорма, но $L^{p,q}_{\omega}$ является банаховым функциональным пространством с другой нормой, эквивалентной квазинорме $\|f\|_{L^{p,q}_{\omega}}$ (см. [1, гл. 4, стр. 219]).

Пространства Лоренца, являясь банаховыми функциональными пространствами, обладают свойством *монотонности (квази)нормы* (см. [1, Chapter 1, Theorem 1.7]):

$$\text{если } |\mathrm{g}| \leqslant |f| \ \ \mu\text{-п. в.} \ \text{ и } \ f \in L^{p,q}_{\omega}, \text{ тогда } \mathrm{g} \in L^{p,q}_{\omega} \ \text{ и } \ \|\mathrm{g}\|_{L^{p,q}_{\omega}} \leqslant \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}}; \tag{2}$$

а также свойством *абсолютной непрерывности нормы* (см. [1, Chapter 1, §3]):

$$\forall f \in L^{p,q}_{\omega} \ \text{ и } \ \forall \{E_n\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ такой, что } \chi_{E_n}(x) \to 0, \text{ выполнено } \|f\chi_{E_n}\|_{L^{p,q}_{\omega}} \to 0.$$

Неравенство треугольника в пространствах Лоренца имеет вид [3, стр. 5572]

$$\Big\|\sum_{k=1}^{N} f_k\Big\|_{p,q} \leqslant c_{pq} \sum_{k=1}^{N} \big\|f_k\big\|_{p,q}, \tag{3}$$

где наилучшая константа

$$c_{pq} = \begin{cases} 1, & 1 < q \leqslant p < \infty, \\ \left(\dfrac{p}{q}\right)^{1/q} \left(\dfrac{p'}{q'}\right)^{1/q'}, & 1 < p < q < \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Если функции $f \in L^{p,q}_{\omega}$, $\mathrm{g} \in L^{p',q'}_{\omega}$ при $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, то выполняется неравенство Гёльдера

$$\left| \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)\, dx \right| \leqslant \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}} \|\mathrm{g}\|_{L^{p',q'}_{\omega}}, \tag{5}$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$ (см. [1, стр. 220]).

Для $L^{p,q}_{\omega}$ двойственное пространство определяется формулой

$$L^{p',q'}_{\omega} = \left\{\mathrm{g} : \Big|\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)dx\Big| < \infty, \text{ для всех } f \in L^{p,q}_{\omega}\right\}$$

с нормой

$$\|\mathrm{g}\|_{L^{p',q'}_{\omega}} = \sup_{\|f\|_{L^{p,q}_{\omega}} \leqslant 1} \Big|\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)dx\Big|. \tag{6}$$

Заметим также, что $\|f\|_{L^{p,q}_{\omega}} = \Big(\int\limits_0^{\infty} q f_*(t)^{\frac{q}{p}} t^{q-1}\, dt\Big)^{\frac{1}{q}}$ и $\|\chi_{(0,t)}\|_{L^{p,q}_{\omega}} = \Big(\int\limits_0^{t} \omega(\tau)\, d\tau\Big)^{\frac{1}{p}}$.

В пространствах Лоренца при условии, что $1<\max(r,s)\leqslant q<\infty$ и $1<p<\infty$, рассмотрим оператор $T\colon L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+)\to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ вида

$$Tf(x)=\int\limits_0^x u(\tau)f(\tau)v(\tau)\,d\tau,\quad x>0, \tag{7}$$

с весовыми функциями $u\in L_v^{r',s'}(0,x)$, $v\in L^1(0,x)$ для любого $x>0$.

Принцип двойственности. [1] Если оператор $T:L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+)\to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ является ограниченным линейным оператором таким, что неравенство $\|Tf\|_{L_\omega^{p,q}}\leqslant C\|f\|_{L_v^{r,s}}$ выполняется для всех $f\in L_v^{r,s}$ с положительной константой C, то $\|T'\mathrm{g}\|_{L_v^{r',s'}}\leqslant C\|\mathrm{g}\|_{L_\omega^{p',q'}}$ для всех $\mathrm{g}\in L_\omega^{p',q'}$, где двойственный оператор $T':L_\omega^{p',q'}(\mathbb{R}^+)\to L_v^{r',s'}(\mathbb{R}^+)$ имеет вид

$$T'\mathrm{g}(x)=u(x)\int\limits_x^\infty \mathrm{g}(\tau)\omega(\tau)\,d\tau,\quad x>0, \tag{8}$$

причем

$$\int\limits_0^\infty (Tf)\mathrm{g}=\int\limits_0^\infty f(T'\mathrm{g}).$$

Обозначим $\mathscr{B}(E,F)$ — класс всех линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства E в банахово пространство F. Для каждого оператора $T\in\mathscr{B}(E,F)$ его n-е *аппроксимативное число* определяется формулой

$$a_n(T)=\inf_{L\in\mathscr{B}(E,F)}\{\|T-L\|_{E\to F}:\quad \operatorname{rank}L\leqslant n-1\},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{9}$$

где $\operatorname{rank}L=\dim\mathscr{R}(L)$ (см. монографию [2, §12]).

Основы теории s-чисел (аппроксимативных чисел, чисел Колмогорова, Гельфанда и других) заложены в монографиях [2,4–6]. Исследования поведения различных типов s-чисел операторов Харди, действующих в пространствах Лебега $L^p\to L^q$ с параметрами $1\leqslant p,q\leqslant\infty$, представлены в статьях [7–11]. Поведение аппроксимативных чисел оператора Харди в пространствах Лоренца $L^{r,s}\to L^{p,q}$ в области $1<\max(r,s)\leqslant\min(p,q)<\infty$ изучалось в статье [12]. Полученные в [12] результаты были обобщены в работе [13] на случай банаховых функциональных пространств X, Y с дополнительным ℓ-условием Бережного, т.е. $T\colon X\to Y$ и существует банахово секвенциальное пространство ℓ такое, что X является ℓ-вогнутым, а Y — ℓ-выпуклым. Выполнение этого условия соответствует соотношению параметров $p\leqslant q$ для Лебеговых пространств $L^p\to L^q$ и $\max(r,s)\leqslant\min(p,q)$ в случае пространств Лоренца $L^{r,s}\to L^{p,q}$ (см. [13, с. 169]). Данное исследование обобщает полученные ранее результаты [12] при $k(x,y)=1$ в одновесовом случае для a-чисел, дополняя их новым соотношением параметров $1<p\leqslant\max(r,s)$ пространств Лоренца.

Статья состоит из введения и двух частей. В первой части приведен критерий ограниченности и доказан критерий компактности интегрального оператора (7). Во второй части получены двухсторонние оценки аппроксимативных чисел оператора. Используя связь аппроксимативных чисел с числами Гельфанда, Колмогорова и энтропийными числами, мы также получили двухсторонние оценки характеристических величин для рассматриваемого оператора Харди в пространствах Лоренца при $1<\max(r,s)\leqslant q<\infty$, $1<p<\infty$.

В статье под соотношениями $A\ll B$ подразумеваются неравенства $A\leqslant cB$, выполненные с некоторой константой $c>0$, зависящей только от параметров r,s,p,q. Будем писать $A\approx B$ вместо $A\ll B\ll A$.

1. Ограниченность и компактность

В дальнейших исследованиях важную роль будет играть следующая лемма.

Лемма 1. [14,15] *Пусть $((0,\infty),\mu)$ — пространство с положительной σ-аддитивной мерой, $1<p,q<\infty$ и $(0,\infty)=\bigcup_k E_k$, где $\{E_k\}$ — последовательность измеримых, попарно непересекающихся интервалов. Тогда*

1) *если* $\max\{p,q\}\leqslant\alpha<\infty$, *то* $\sum\limits_k\|\chi_{E_k}f\|^\alpha_{L^{p,q}_\mu}\leqslant\|f\|^\alpha_{L^{p,q}_\mu}$;

2) *если* $1<\alpha\leqslant\min\{p,q\}$, *то* $\|f\|^\alpha_{L^{p,q}_\mu}\leqslant\sum\limits_k\|\chi_{E_k}f\|^\alpha_{L^{p,q}_\mu}$. (10)

Приведем критерий ограниченности оператора (7). Доказательство достаточности повторяет рассуждения Э. Сойера в статье [15], а необходимость получена другим методом.

Теорема 1. *Пусть $1<\max(r,s)\leqslant q<\infty$, $1<p<\infty$. Тогда для оператора (7) выполняется неравенство*

$$\|Tf\|_{L^{p,q}_\omega}\leqslant C\|f\|_{L^{r,s}_v}\quad\text{для всех } f\geqslant 0$$

с константой C, не зависящей от f, в том и только в том случае, если

$$A=\sup_{t>0}A(t)=\sup_{t>0}\|\chi_{(0,t)}u\|_{L^{r',s'}_v}\|\chi_{(t,\infty)}\|_{L^{p,q}_\omega}<\infty. \tag{11}$$

Более того, $A\leqslant\|T\|\leqslant 4A$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть оператор $T:L^{r,s}_v(\mathbb{R}^+)\to L^{p,q}_\omega(\mathbb{R}^+)$ ограничен, тогда существует константа $C>0$ такая, что

$$\|Tf\|_{L^{p,q}_\omega}\leqslant C\|f\|_{L^{r,s}_v}\quad\text{для всех } f\geqslant 0.$$

Для некоторого фиксированного $t>0$ и функции $f\in L^{r,s}_v$ с нормой $\|f\|_{L^{r,s}_v}\leqslant 1$, используя свойство (2), получаем

$$C\geqslant C\|f\|_{L^{r,s}_v}\geqslant\|Tf\|_{L^{p,q}_\omega}\geqslant\|\chi_{(t,\infty)}Tf\|_{L^{p,q}_\omega}=\|\chi_{(t,\infty)}\|_{L^{p,q}_\omega}\int\limits_0^\infty\chi_{(0,t)}(y)u(y)f(y)v(y)dy.$$

В результате

$$\|\chi_{(t,\infty)}\|_{L^{p,q}_\omega}\int\limits_0^\infty\chi_{(0,t)}(y)u(y)f(y)v(y)dy\leqslant C.$$

В силу формулы (6) имеем

$$\sup_{\|f\|_{L_v^{r,s}}\leqslant 1}\int_0^\infty \chi_{(0,t)}(y)u(y)f(y)v(y)dy = \|\chi_{(0,t)}u\|_{L_v^{r',s'}}.$$

Тогда

$$A(t)=\|\chi_{(t,\infty)}\|_{L_\omega^{p,q}}\|\chi_{(0,t)}u\|_{L_v^{r',s'}}\leqslant \|T\|_{L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}},$$

и

$$A=\sup_{t>0}A(t)=\sup_{t>0}\|\chi_{(t,\infty)}\|_{L_\omega^{p,q}}\|\chi_{(0,t)}u\|_{L_v^{r',s'}}\leqslant \|T\|_{L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}}.$$

Следовательно,

$$A\leqslant \|T\|_{L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}}.$$

Достаточность. Пусть $f\in L_v^{r,s}$, $u\in L_v^{r',s'}$; предположим, что $u(y)f(y)v(y)\neq 0$ на множестве положительной меры. Выберем последовательность $\{x_k\}$, $k\in\mathbb{Z}$, так, чтобы выполнялись условия:

$$\int_0^{x_k} u(y)f(y)v(y)dy = 2^k < \int_0^\infty u(y)f(y)v(y)dy.$$

Тогда, используя монотонность функции распределения, а затем применяя неравенство Гельдера (5), условие (11) и лемму 1 с параметрами $\max(r,s)\leqslant q$, находим, что

$$\|Tf\|_{L_\omega^{p,q}}^q=\int_0^\infty q\tau^{q-1}\big((Tf)_*(\tau)\big)^{q/p}d\tau=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^k}^{2^{k+1}} q\tau^{q-1}\big((Tf)_*(\tau)\big)^{q/p}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big((Tf)_*\left(2^k\right)\big)^{q/p}\int_{2^k}^{2^{k+1}} q\tau^{q-1}d\tau=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^+:\ |Tf(x)|>2^k\}}\omega(x)dx\right)^{q/p}\int_{2^k}^{2^{k+1}} q\tau^{q-1}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 4^q\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{(k-1)q}\left(\int_{x_k}^\infty\omega(x)dx\right)^{q/p}=4^q\sum_k\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}u(y)f(y)v(y)dy\right)^q\left(\int_{x_k}^\infty\omega(x)dx\right)^{q/p}\leqslant$$

$$\leqslant 4^q\sum_k\|\chi_{(x_{k-1},x_k)}f\|_{L_v^{r,s}}^q\|\chi_{(x_{k-1},x_k)}u\|_{L_v^{r',s'}}^q\left(\int_{x_k}^\infty\omega(x)dx\right)^{q/p}\leqslant$$

$$\leqslant 4^q\sum_k\|\chi_{(x_{k-1},x_k)}f\|_{L_v^{r,s}}^q\|\chi_{(0,x_k)}u\|_{L_v^{r',s'}}^q\|\chi_{(x_k,\infty)}\|_{L_\omega^{p,q}}^q\leqslant 4^qA^q\|f\|_{L_v^{r,s}}^q.$$

Следовательно,

$$\|T\|_{L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}}\leqslant 4A.$$

□

Замечание 1. Результаты теоремы 1 об ограниченности оператора T сохраняются при сужении на конечный интервал $I=(a,b)$, при этом

$$A(I)=\sup_{a<t<b}A(I,t)=\sup_{a<t<b}\|\chi_{(a,t)}u\|_{L_v^{r',s'}}\|\chi_{(t,b)}\|_{L_\omega^{p,q}}.$$

Для доказательства компактности оператора (7) необходима следующая лемма.

Лемма 2. [12, стр. 375, Лемма 4], [13, стр. 181, Лемма 4] *Пусть* $1<r,p<$ $<\infty$, $1<s,q<\infty$, $T: L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+)\to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ *– интегральный оператор вида* $Tf(\alpha)=$ $=\int\limits_0^\infty t(\alpha,\beta)f(\beta)\,d\beta$. *Тогда оператор* T *компактен, если* $A_T=\left\|\|t(\alpha,\cdot)\|_{L_v^{r',s'}}\right\|_{L_\omega^{p,q}}<\infty$.

Теорема 2. Пусть $1<\max(r,s)\leqslant q<\infty$, $1<p<\infty$. Оператор $T: L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+)\to$ $L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$, заданный формулой (7), компактен тогда и только тогда, когда

$$A<\infty \quad \textit{и} \lim_{t\to 0+}A(t)=\lim_{t\to+\infty}A(t)=0. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* $A<\infty$ следует из ограниченности оператора T. Пусть $f\in L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+)$, $f(y)u(y)v(y)\geqslant 0$. Тогда для любого $t>0$ находим

$$\infty>4A\|f\|_{L_v^{r,s}}\geqslant\|Tf\|_{L_\omega^{p,q}}\geqslant\|\chi_{[t,\infty)}Tf\|_{L_\omega^{p,q}}=\|\chi_{[t,\infty)}\|_{L_\omega^{p,q}}\int\limits_0^t u(y)f(y)v(y)dy. \tag{13}$$

В силу формулы (6) для любого $t>0$ и фиксированного $\gamma\in(0,1)$ функция $f_t\in L_v^{r,s}$ с условиями $\operatorname{supp}f_t\subseteq[0,t]$, $u(y)f_t(y)v(y)\geqslant 0$ и нормой $\|f_t\|_{L_v^{r,s}}=1$ может быть выбрана так, что выполнено неравенство

$$\int\limits_0^t u(y)f_t(y)v(y)\,dy\geqslant\gamma\|\chi_{[0,t]}u\|_{L_v^{r',s'}}.$$

Тогда при подстановке f_t в (13) получаем оценку

$$\left\|Tf_t\right\|_{L_\omega^{p,q}}\geqslant\gamma\left\|\chi_{[t,\infty)}\right\|_{L_\omega^{p,q}}\left\|\chi_{[0,t]}u\right\|_{L_v^{r',s'}}=\gamma A(t). \tag{14}$$

Выберем функцию $\mathrm{g}\in L_v^{r',s'}$. Применяя неравенство Гельдера (5) и учитывая абсолютную непрерывность нормы пространства $L_v^{r',s'}$, имеем

$$\left|\int\limits_0^\infty f_t(y)\mathrm{g}(y)v(y)dy\right|\leqslant\left\|\chi_{[0,t]}\mathrm{g}\right\|_{L_v^{r',s'}}\to 0 \ \text{ при } t\to 0.$$

Следовательно, семейство $\{f_t\}$ слабо сходится к 0 при $t\to 0$. В силу компактности оператора $T: L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+)\to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ образ $\{Tf_t\}$ сильно сходится к 0 при $t\to 0$, т.е. $\left\|Tf_t\right\|_{L_\omega^{p,q}}\to 0$. Поэтому формула (14) влечет $\lim\limits_{t\to 0}A(t)=0$.

Доказательство (12) при $t\to\infty$ проводится аналогичными рассуждениями.

Достаточность. Пусть $0<a<b<\infty$, определим

$$P_a f = \chi_{[0,a]} f, \quad Q_b f = \chi_{[b,\infty)} f, \quad P_{ab} f = \chi_{[a,b]} f.$$

Тогда

$$Tf = (P_a + P_{ab} + Q_b)T(P_a + P_{ab} + Q_b) =$$
$$= P_a T P_a f + P_{ab} T P_a f + Q_b T Q_b f + P_{ab} T P_{ab} f + Q_b T P_{ab} f + Q_b T P_a f.$$

По теореме 1, суженной на интервал $[0,a]$ или $[b,\infty)$,

$$\big\|P_a T P_a\big\| \leqslant 4 \sup_{0<t<a} A(t) \to 0, \ a \to 0,$$

$$\big\|Q_b T Q_b\big\| \leqslant 4 \sup_{t>b} A(t) \to 0, \ b \to \infty.$$

Заметим, что $Q_b T P_{ab} f + Q_b T P_a f = Q_b T P_b f$, где $P_b f = \chi_{[0,b]} f$. Из леммы 2 следует, что операторы $Q_b T P_b$, $P_{ab} T P_{ab}$ и $P_{ab} T P_a$ компактны. Действительно,

$$\big\|Q_b T P_b\big\| \leqslant \Big\|\big\|\chi_{[0,b]} u\big\|_{L_v^{r',s'}} \chi_{[b,\infty)}\Big\|_{L_\omega^{p,q}} = \big\|\chi_{[b,\infty)}\big\|_{L_\omega^{p,q}} \big\|\chi_{[0,b]} u\big\|_{L_v^{r',s'}} = A(b) < A < \infty,$$

$$\big\|P_{ab} T P_{ab}\big\| \leqslant \Big\|\big\|\chi_{[a,b]} u\big\|_{L_v^{r',s'}} \chi_{[a,b]}\Big\|_{L_\omega^{p,q}} = \big\|\chi_{[a,b]}\big\|_{L_\omega^{p,q}} \big\|\chi_{[a,b]} u\big\|_{L_v^{r',s'}} < \infty,$$

$$\big\|P_{ab} T P_a\big\| \leqslant \Big\|\big\|\chi_{[0,a]} u\big\|_{L_v^{r',s'}} \chi_{[a,b]}(x)\Big\|_{L_\omega^{p,q}} \leqslant \big\|\chi_{[a,\infty)}\big\|_{L_\omega^{p,q}} \big\|\chi_{[0,a]} u\big\|_{L_v^{r',s'}} = A(a) < A < \infty,$$

Таким образом, T компактен как предел компактных операторов при $a \to 0$, $b \to \infty$. □

2. Оценки аппроксимативных чисел

Далее всюду предполагаем, что оператор $T : L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ вида

$$Tf(x) = \int_0^x u(\tau) f(\tau) v(\tau)\, d\tau, \quad x > 0,$$

при условии, что $1 < \max(r,s) \leqslant q < \infty$ и $1 < p < \infty$, компактен.

Зададим произвольное малое число ε такое, что $0<\varepsilon<\|T\| := \|T\|_{L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)}$. Согласно теореме 2 можем выбрать точки c_1 и c_N

$$0 = c_0 < c_1 < c_N < c_{N+1} = \infty,$$

(величину $N = N(\varepsilon)$ определим далее) с условиями

$$A((0,c_1)) = A((c_N, c_{N+1})) = \frac{\varepsilon}{4}, \tag{15}$$

где

$$A((0,c_1)) = \sup_{0<t<c_1} \|\chi_{(0,t)} u\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(t,c_1)}\|_{L_\omega^{p,q}},$$

$$A((c_N,\infty)) = \sup_{c_N<t<\infty} \|\chi_{(c_N,t)}u\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(t,\infty)}\|_{L_\omega^{p,q}}.$$

Для определения $N=N(\varepsilon)$ и выбора последовательности точек c_i, $i=2..N-1$,

$$0=c_0<c_1<c_2<\ldots<c_{N-1}<c_N<c_{N+1}=\infty$$

введем дополнительные обозначения. Пусть $0<a<b<\infty$, на интервале $I=[a,b]$ положим

$$F(x)=\int_a^x u(y)f(y)v(y)\,dy, \quad x\in I; \quad F_I=\frac{1}{\mu(I)}\int_I F(x)d\mu(x),$$

где мера μ имеет специальный вид

$$\mu(I)=\int_I d\mu=\int_I \mathrm{g}(x)\omega(x)\,dx.$$

Функцию $\mathrm{g}(x)$ на I определим из условия

$$\int_I \mathrm{g}(x)\omega(x)\,dx \geqslant (1-\delta)\|\chi_{[a,b]}\|_{L_\omega^{p,q}}\|\chi_{[a,b]}\mathrm{g}\|_{L_\omega^{p',q'}}, \tag{16}$$

что возможно в силу формулы (6) с некоторым $0<\delta<1$.

Теорема 3. *Пусть* $1<\max\{r,s\}\leqslant q<\infty$, $1<p<\infty$. *Тогда для оператора* $\mathcal{T}_I f(x): L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}$, *заданного формулой*

$$\mathcal{T}_I f(x)=\chi_I(x)(F(x)-F_I), \tag{17}$$

найдется точка $c\in I$ *такая, что* $\|\mathcal{T}_I\|_{L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}}\approx\max(A_0(I),A_1(I))$, *где*

$$A_0(I)=\sup_{a<x<c}\|\chi_{[x,c]}u\|_{L_v^{r',s'}}\|\chi_{[a,x]}\|_{L_\omega^{p,q}},$$

$$A_1(I)=\sup_{c<x<b}\|\chi_{[c,x]}u\|_{L_v^{r',s'}}\|\chi_{[x,b]}\|_{L_\omega^{p,q}}.$$

Доказательство. Зададим $f\in L_v^{r,s}$ и точку $c\in(a,b)$. Определим функцию

$$\Psi_c(x)=\begin{cases} -\int_x^c u(y)f(y)v(y)\,dy, & a\leqslant x<c,\\ \int_c^x u(y)f(y)v(y)\,dy, & c\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

и

$$\Psi_{c,I}=\frac{1}{\mu(I)}\int_I \Psi_c\,d\mu. \tag{18}$$

Тогда

$$F(x)-F_I=\Psi_c(x)-\Psi_{c,I}. \tag{19}$$

Действительно, для $x\in I$

$$F(x)-F_I=\int\limits_a^x u(y)f(y)v(y)\,dy-\frac{1}{\mu(I)}\int\limits_I\int\limits_a^x u(y)f(y)v(y)\,dy\,d\mu(x)=$$

$$=F(x)-\frac{1}{\mu(I)}\int\limits_a^b\left(\int\limits_a^c u(y)f(y)v(y)\,dy+\int\limits_c^x u(y)f(y)v(y)\,dy\right)d\mu(x)=$$

$$=\int\limits_a^x u(y)f(y)v(y)\,dy-\int\limits_a^c u(y)f(y)v(y)\,dy-\frac{1}{\mu(I)}\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^x u(y)f(y)v(y)\,dy\right)d\mu(x)=$$

$$=\begin{cases}-\int\limits_x^c u(y)f(y)v(y)\,dy-\frac{1}{\mu(I)}\int\limits_a^b\left(-\int\limits_x^c u(y)f(y)v(y)\,dy\right)d\mu(x), & a\leqslant x<c\\ \int\limits_c^x u(y)f(y)v(y)\,dy-\frac{1}{\mu(I)}\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^x u(y)f(y)v(y)\,dy\right)d\mu(x), & c\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

$$=\Psi_c(x)-\Psi_{c,I}.$$

Необходимость. Предположим, что неравенство $\|\mathcal{T}_I f(x)\|_{L^{p,q}_\omega}\leqslant C\left\|\chi_{[a,b]}f\right\|_{L^{r,s}_v}$ выполняется для всех $f\in L^{r,s}_v(I)$ с константой C, не зависящей от f. Получим оценку для функции $f\in L^{r,s}_v(I)$ с носителем $\operatorname{supp} f\subseteq[a,c]$. Применяя равенство (19) и неравенство треугольника (3) с константой (4), получаем

$$C\left\|\chi_{[a,c]}f\right\|_{L^{r,s}_v}\geqslant\left\|\chi_{[a,c]}(F(x)-F_I)\right\|_{L^{p,q}_\omega}=\left\|\chi_{[a,c]}\Big(\Psi_c-\Psi_{c,I}\Big)\right\|_{L^{p,q}_\omega}\geqslant$$

$$\geqslant c_{pq}^{-1}\left\|\chi_{[a,c]}\Psi_c\right\|_{L^{p,q}_\omega}-\left|\Psi_{c,I}\right|\left\|\chi_{[a,c]}\right\|_{L^{p,q}_\omega}.$$

Следуя определению (18) заключаем, что

$$C\left\|\chi_{[a,c]}f\right\|_{L^{r,s}_v}\geqslant c_{pq}^{-1}\left\|\chi_{[a,c]}\Psi_c\right\|_{L^{p,q}_\omega}-\frac{1}{\mu(I)}\int\limits_I\left|\Psi_c\right|d\mu\left\|\chi_{[a,c]}\right\|_{L^{p,q}_\omega}.$$

Используя специальный вид выбранной меры μ, выводим

$$C\left\|\chi_{[a,c]}f\right\|_{L^{r,s}_v}\geqslant c_{pq}^{-1}\left\|\chi_{[a,c]}\Psi_c\right\|_{L^{p,q}_\omega}-\frac{1}{\mu(I)}\int\limits_I\left|\Psi_c\right|\mathrm{g}(x)\omega(x)\,dx\left\|\chi_{[a,c]}\right\|_{L^{p,q}_\omega}.$$

Применяем неравенство Гельдера (5)

$$C\left\|\chi_{[a,c]}f\right\|_{L^{r,s}_v}\geqslant c_{pq}^{-1}\left\|\chi_{[a,c]}\Psi_c\right\|_{L^{p,q}_\omega}-\frac{1}{\mu(I)}\left\|\chi_{[a,c]}\Psi_c\right\|_{L^{p,q}_\omega}\left\|\chi_{[a,c]}\mathrm{g}\right\|_{L^{p',q'}_\omega}\left\|\chi_{[a,c]}\right\|_{L^{p,q}_\omega}\equiv$$

$$\equiv c_{pq}^{-1}\left(1-\frac{H(a,c)}{\mu(I)}\right)\left\|\chi_{[a,c]}\Psi_c\right\|_{L^{p,q}_\omega},$$

где $H(a,c)=c_{pq}\left\|\chi_{[a,c]}\right\|_{L^{p,q}_\omega}\left\|\chi_{[a,c]}\mathrm{g}\right\|_{L^{p',q'}_\omega}$. В силу монотонности норм в пространствах $L^{p,q}_\omega$ и $L^{p',q'}_\omega$ для любого $\beta\in(0,1-\delta)$ найдется точка $c\in(a,b)$ такая, что будет выполняться равенство $H(a,c)=\beta\mu(I)$. Используя Замечание 1 на интервале $[a,c]$, получаем

оценку
$$C \geqslant (1-\beta)c_{pq}^{-1}A_0,$$
что при $\beta \to 0$ влечет
$$C \gg A_0. \tag{20}$$

Применение подобных рассуждений к функции f с $\operatorname{supp} f \subseteq [c,b]$ дает оценку
$$C\left\|\chi_{[c,b]}f\right\|_{L_v^{r,s}} \geqslant c_{pq}^{-1}\left(1-\frac{Q(c,b)}{\mu(I)}\right)\left\|\chi_{[c,b]}\Psi_c\right\|_{L_\omega^{p,q}},$$
где $Q(c,b)=c_{pq}\left\|\chi_{[c,b]}\right\|_{L_\omega^{p,q}}\left\|\chi_{[c,b]}\mathrm{g}\right\|_{L_\omega^{p',q'}}$.

Откуда по теореме 1 получаем $C \gg A_1$, что вместе с формулой (20) дает
$$C \gg \max(A_0,A_1).$$
Оценка снизу доказана.

Достаточность. Используя формулу (18) и неравенство треугольника (3), получаем
$$\left\|\mathcal{T}_{[a,b]}f\right\|_{L_\omega^{p,q}} = \left\|\chi_{[a,b]}(F-F_I)\right\|_{L_\omega^{p,q}} = \left\|\chi_{[a,b]}\left(\Psi_c-\Psi_{c,I}\right)\right\|_{L_\omega^{p,q}} \leqslant$$
$$\leqslant c_{pq}\left(\left\|\chi_{[a,b]}\Psi_c\right\|_{L_\omega^{p,q}} + \left|\Psi_{c,I}\right|\left\|\chi_{[a,b]}\right\|_{L_\omega^{p,q}}\right).$$
Применение неравенства Гельдера (5) с учетом (16) влечет
$$\left\|\mathcal{T}_{[a,b]}f\right\|_{L_\omega^{p,q}} \leqslant c_{pq}\left(\left\|\chi_{[a,b]}\Psi_c\right\|_{L_\omega^{p,q}} + \frac{1}{\mu(I)}\left\|\chi_{[a,b]}\Psi_c\right\|_{L_\omega^{p,q}}\left\|\chi_{[a,b]}\mathrm{g}\right\|_{L_\omega^{p',q'}}\left\|\chi_{[a,b]}\right\|_{L_\omega^{p,q}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2c_{pq}}{(1-\delta)}\left\|\chi_{[a,b]}\Psi_c\right\|_{L_\omega^{p,q}}.$$
Используя формулу (10) леммы 1 с параметром $\alpha=\min(p,q)$ для двух слагаемых и неравенство Йенсена, приходим к неравенству
$$\left\|\mathcal{T}_{[a,b]}f\right\|_{L_\omega^{p,q}} \leqslant \frac{2c_{pq}}{(1-\delta)}\left(\left\|\chi_{[a,c]}\Psi_c\right\|_{L_\omega^{p,q}} + \left\|\chi_{[c,b]}\Psi_c\right\|_{L_\omega^{p,q}}\right).$$
В силу замечания 1 на конечных интервалах $[a,c]$, $[c,b]$ и свойства монотонности нормы заключаем, что
$$\left\|\mathcal{T}_{[a,b]}f\right\|_{L_\omega^{p,q}} \leqslant \frac{8c_{pq}}{1-\delta}\max(A_1,A_2)\left(\left\|\chi_{[a,c]}f\right\|_{L_v^{r,s}} + \left\|\chi_{[c,b]}f\right\|_{L_v^{r,s}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{16c_{pq}}{1-\delta}\max(A_1,A_2)\left\|\chi_{[a,b]}f\right\|_{L_v^{r,s}}.$$
Следовательно,
$$\|\mathcal{T}_I\|_{L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}} \leqslant 16c_{pq}\max(A_0,A_1),$$
что заканчивает доказательство теоремы. □

Согласно теореме 3 норма оператора $\mathcal{T}_I$ вида (17) непрерывно зависит от интервала I, поэтому выбираем интервалы $I_k=[c_k,c_{k+1}]$, $k=1,\dots,N-1$, так, что

$$\|\mathcal{T}_{I_k}\| = \varepsilon,\ k = 1,\dots,N-2,\quad \|\mathcal{T}_{I_{N-1}}\| \leqslant \varepsilon. \tag{21}$$

Число таких интервалов также зависит от ε, т.е. $N=N(\varepsilon)$.

Верхняя и нижняя оценки поведения последовательности аппроксимативных чисел оператора T содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 4. *Пусть* $1 < \max(r,s) \leqslant q < \infty$, $1 < p < \infty$. *Предположим, что оператор* $T : L_v^{r,s} \to L_\omega^{p,q}$, *определенный формулой* (7), *компактен. Для заданного* $0 < \varepsilon < \|T\|$ *и целого числа* $N > 2$ *пусть интервалы* $I_k = [c_k, c_{k+1}], k = 0,1,\dots,N$, *выбраны так, что выполнены соотношения* (15) *и* (21). *Тогда*

$$a_{N(\varepsilon)}(T) \leqslant \varepsilon, \tag{22}$$

если $1<r\leqslant s\leqslant p\leqslant q<\infty$, $1<s<r\leqslant p\leqslant q<\infty$, $1<r\leqslant s\leqslant q<p<\infty$, $1<s<r\leqslant q<p<\infty$, *и*

$$\Big(N(\varepsilon)+1\Big)^{\frac{1}{\max(r,s)}-\frac{1}{\min(p,q)}} a_{N(\varepsilon)}(T) \leqslant \varepsilon, \tag{23}$$

если $1<p\leqslant r<s\leqslant q<\infty$, $1<r<p<s\leqslant q<\infty$, $1<p\leqslant s<r\leqslant q<\infty$, $1<s<p<r\leqslant q<\infty$.

Доказательство. Для $k = 1,2,\dots,N-1$ положим

$$F_k(x) = \int\limits_{c_k}^{x} u(\tau)f_k(\tau)v(\tau)\,d\tau,\quad x\in I_k,\quad F_{k,I_k} = \frac{1}{\mu(I_k)}\int\limits_{I_k} F_k(x)d\mu(x), \tag{24}$$

где функции $f_k\in L_v^{r,s}$ такие, что $\mathrm{supp} f_k\subset I_k$. Определим на каждом интервале I_k операторы

$$P_k f(x) = \chi_{I_k}(x)\left\{Tf(x) - (F_k(x) - F_{k,I_k})\right\}.$$

Тогда $P=\sum\limits_{k=1}^{N-1} P_k$ является линейным ограниченным оператором, который действует из $L_v^{r,s}$ в $L_\omega^{p,q}$ и имеет $\mathrm{rank} P\leqslant N-1$.

Для доказательства (22) используем лемму 1 с параметром γ в диапазоне $\max(r,s)\leqslant\gamma\leqslant\min(p,q)$, теорему 1, условия (15) и (21)

$$\begin{aligned}\|Tf-Pf\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}} &\leqslant \big\|\chi_{[0,c_1]}Tf\big\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}} + \sum_{k=1}^{N-1}\big\|\chi_{I_k}(Tf-P_kf)\big\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}} + \big\|\chi_{[c_N,\infty)}Tf\big\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}} \leqslant \\ &\leqslant 4^\gamma A(I_0)^\gamma\big\|\chi_{[0,c_1]}f\big\|^\gamma_{L_v^{r,s}} + \sum_{k=1}^{N-1}\big\|\mathcal{T}_{I_k}f\big\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}} + 4^\gamma A(I_N)^\gamma\big\|\chi_{[c_N,\infty)}f\big\|^\gamma_{L_v^{r,s}} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon^\gamma\sum_{k=0}^{N}\big\|\chi_{I_k}f\big\|^\gamma_{L_v^{r,s}} \leqslant \varepsilon^\gamma\|f\|^\gamma_{L_v^{r,s}}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\|T-P\|\leqslant\varepsilon$. По определению (9) получаем, что

$$a_N(T) = \inf\{\|T-P\| \ :\ \mathrm{rank}P\leqslant N-1\}\leqslant\varepsilon.$$

Докажем оценку (23). Применение леммы 1 с параметрами $\kappa = \min(p,q)$, $\rho = \max(r,s)$, теоремы 1, условий (15) и (21) дает

$$\|Tf - Pf\|^{\kappa}_{L^{p,q}_{\omega}} \leqslant \big\|\chi_{[0,c_1]}Tf\big\|^{\kappa}_{L^{p,q}_{\omega}} + \sum_{k=1}^{N-1} \big\|\chi_{I_k}(Tf - P_kf)\big\|^{\kappa}_{L^{p,q}_{\omega}} + \big\|\chi_{[c_N,\infty)}Tf\big\|^{\kappa}_{L^{p,q}_{\omega}} \leqslant$$

$$\leqslant 4^{\kappa}A(I_0)^{\kappa}\big\|\chi_{[0,c_1]}f\big\|^{\kappa}_{L^{r,s}_{v}} + \sum_{k=1}^{N-1} \big\|\mathcal{T}_{I_k}f\big\|^{\kappa}_{L^{p,q}_{\omega}} + 4^{\kappa}A(I_N)^{\kappa}\big\|\chi_{[c_N,\infty)}f\big\|^{\kappa}_{L^{r,s}_{v}}.$$

Используя неравенство Гельдера с показателями $\frac{\rho}{\kappa}$ и $\frac{\rho}{\rho-\kappa}$, оцениваем

$$\|Tf - Pf\|^{\kappa}_{L^{p,q}_{\omega}} \leqslant \varepsilon^{\kappa} \sum_{k=0}^{N} \big\|\chi_{I_k}f\big\|^{\kappa}_{L^{r,s}_{v}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{\kappa}\left(\sum_{k=0}^{N} \big\|\chi_{I_k}f\big\|^{\rho}_{L^{r,s}_{v}}\right)^{\frac{\kappa}{\rho}} \Big(N+1\Big)^{1-\frac{\kappa}{\rho}} \leqslant \varepsilon^{\kappa}\Big(N+1\Big)^{1-\frac{\kappa}{\rho}}\|f\|^{\kappa}_{L^{r,s}_{v}}.$$

По определению (9) заключаем, что

$$\Big(N+1\Big)^{\frac{1}{\max(r,s)}-\frac{1}{\min(p,q)}} a_N(T) \leqslant \varepsilon.$$

□

Теорема 5. *Пусть* $1 < \max(r,s) \leqslant q < \infty$, $1 < p < \infty$. *Предположим, что оператор* $T : L^{r,s}_{v} \to L^{p,q}_{\omega}$, *определенный формулой* (7), *компактен. Для заданного* $0 < \varepsilon < \|T\|$ *и целого числа* $N = N(\varepsilon) > 2$ *пусть интервалы* $I_k = [c_k, c_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,N$, *выбраны так, что выполнены соотношения* (15) *и* (21). *Тогда*

$$\frac{1}{2c_{pq}}\varepsilon N(\varepsilon)^{\frac{1}{\max(p,q)}-\frac{1}{\min(r,s)}} \leqslant a_{N(\varepsilon)}(T), \tag{25}$$

где константа c_{pq} *определена формулой* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим $\lambda \in (0,1)$. Выберем последовательность функций $\{f_k\} \in L^{r,s}_{v}$ такую, что $\operatorname{supp} f_k \subset I_k$ и выполняются неравенства

$$\frac{\Big\|\chi_{I_i}F_i\Big\|_{L^{p,q}_{\omega}}}{\Big\|f_i\Big\|_{L^{r,s}_{v}}} \geqslant \frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}, \quad \text{для} \quad i = 0, N, \tag{26}$$

и

$$\frac{\Big\|\chi_{I_k}\big(F_k - F_{k,I_k}\big)\Big\|_{L^{p,q}_{\omega}}}{\big\|f_k\big\|_{L^{r,s}_{\vartheta}}} \geqslant \lambda\varepsilon, \quad \text{для} \quad k = 1,2,...,N-1, \tag{27}$$

где $F_k(x)$ и F_{k,I_k} определены формулами (24).

Пусть $\widetilde{P} : L^{r,s}_{v} \to L^{p,q}_{\omega}$ будет ограниченным линейным оператором и $\operatorname{rank}\widetilde{P} \leqslant N$. Выберем константы $\nu_0, \nu_1, \nu_2, ..., \nu_N$ так, чтобы

$$\widetilde{P}\left(\sum_{k=0}^{N} \nu_k f_k\right) = 0.$$

Положим $f=\sum\limits_{k=0}^{N}\nu_k f_k$ и $F(x)=\int\limits_0^x u(\tau)f(\tau)v(\tau)\,d\tau$, $x>0$. Для всех $x\in I_k$

$$F(x)=\nu_k F_k(x)+\mu_k,\quad k=1,...,N-1, \tag{28}$$

с некоторой константой μ_k.

Для любой константы $c\in\mathbb{R}$ справедливо неравенство (см. [14, стр. 199])

$$\left\|\chi_I\left(F-F_I\right)\right\|_{L^{p,q}_\omega}\leqslant 2c_{pq}\inf_{c\in\mathbb{R}}\left\|\chi_I\left(F-c\right)\right\|_{L^{p,q}_\omega}, \tag{29}$$

где константа c_{pq} определена формулой (4).

Применяя лемму 1 с параметром $\alpha=\max(p,q)$, $\theta=\min(r,s)$ и принимая во внимание формулы (26) и (28), получаем

$$\begin{aligned}\left\|Tf-\widetilde{P}f\right\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega}&=\left\|Tf\right\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega}\geqslant\left\|\chi_{I_0}F_0\right\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega}+\sum_{k=1}^{N-1}\left\|\chi_{I_k}F\right\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega}+\left\|\chi_{I_N}F_N\right\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega}=\\&=\left(\frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}\right)^\alpha\left\|\nu_0 f_0\right\|^\alpha_{L^{r,s}_v}+\sum_{k=1}^{N-1}\left\|\chi_{I_k}\left(\nu_k F_k+\mu_k\right)\right\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega}+\left(\frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}\right)^\alpha\left\|\nu_N f_N\right\|^\alpha_{L^{r,s}_v}.\end{aligned} \tag{30}$$

Для каждого слагаемого промежуточной суммы используем неравенства (29) и (27)

$$\begin{aligned}&\left\|\chi_{I_k}\left(\nu_k F_k+\mu_k\right)\right\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega}\geqslant(2c_{pq})^{-\alpha}\left\|\chi_{I_k}\left(\nu_k F_k-(\nu_k F_k)_{I_k}\right)\right\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega}=\\&=\left(\frac{1}{2c_{pq}}\right)^\alpha\left(|\nu_k|\left\|\chi_{I_k}\left(F_k-F_{k,I_k}\right)\right\|_{L^{p,q}}\right)^\alpha\geqslant\left(\frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}\right)^\alpha\left\|\nu_k f_k\right\|^\alpha_{L^{r,s}_v}.\end{aligned}$$

Продолжая рассуждение (30) с учетом полученной оценки и применяя лемму 1 с параметром $\theta=\min(r,s)$, находим

$$\begin{aligned}&\left\|Tf-\widetilde{P}f\right\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega}\geqslant\left(\frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{N}\left\|\nu_k f_k\right\|^\alpha_{L^{r,s}_v}\geqslant\\&\geqslant\left(\frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}\right)^\alpha\left(\sum_{k=0}^{N}\left\|\nu_k f_k\right\|^\theta_{L^{r,s}_v}\right)^{\alpha/\theta}(N+1)^{1-\alpha/\theta}\geqslant\left(\frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}\right)^\alpha(N+1)^{1-\alpha/\theta}\left\|f\right\|^\alpha_{L^{r,s}_v}.\end{aligned}$$

Тогда по определению (9)

$$a_{N+1}(T)\geqslant\frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}(N+1)^{1/\alpha-1/\theta},$$

и, полагая $\lambda\to 1$, получаем требуемую оценку (25). □

3. Числа Колмогорова, Гельфанда и энтропийные числа

Апроксимативные числа тесно связаны с другими характеристическими числами линейных ограниченных операторов. Следуя статье [16] и монографии [2, §12], для оператора $T\in\mathscr{B}(E,F)$ приведем следующие определения:

n-е число Гельфанда оператора T

$$c_n(T) = \inf\{ \|TJ_M^E\| \ : \ M\subseteq E, \ \ \operatorname{codim}(M)<n\},$$

где J_M^E означает каноническую инъекцию подпространства M в банахово пространство E, т.е. $M \xrightarrow{J_M^E} E \xrightarrow{T} F$;

n-е число Колмогорова

$$d_n(T) = \inf\{ \|Q_N^F T\| \ : \ N\subseteq F, \ \ \dim(N)<n\},$$

где Q_N^F есть каноническая сюръекция банахова пространства F на фактор-пространство F/N, т.е. $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{Q_N^F} F/N$.

Модуль инъективности оператора T определяется как

$$j(T) = \sup\{\rho\geqslant 0\colon \|Tx\|_F\leqslant \rho\|x\|_E \ \ \text{для всех } x\in E\}.$$

Модуль сюръективности оператора T есть

$$q(T) = \sup\{\rho\geqslant 0\colon T(B_E)\supset \rho B_F\},$$

где B_E и B_F – единичные шары в пространствах E и F соответственно.

n-е число Бернштейна оператора $T\in\mathscr{B}(E,F)$

$$b_n(T) = \sup\{ j(TJ_M^E) \ : \ M\subseteq E, \ \ \dim(M)\geqslant n\},$$

где J_M^E — каноническая инъекция подпространства M в банахово пространство E, а $j(T)$ — модуль инъективности оператора T.

n-е число Митягина оператора $T\in\mathscr{B}(E,F)$

$$m_n(T) = \sup\{ q(Q_N^F T) \ : \ N\subseteq F, \ \ \operatorname{codim}(N)\geqslant n\},$$

где Q_N^F — каноническая сюръекция из банахова пространства F на фактор-пространство F/N, а $q(T)$ — модуль сюръективности оператора T.

Еще одним важным примером характеристических величин являются *энтропийные числа* $e_n(T)$, $n\in\mathbb{N}$, оператора $T\in\mathscr{B}(E,F)$, определяемые как

$$e_n(T)= \inf\Big\{\varepsilon>0 : \exists y_1,\ldots,y_m\in F, m\leqslant 2^{n-1} : T(B_E)\subset \bigcup_{j=1}^{m}\{y_j+\varepsilon B_F\}\Big\},$$

где $B_E=\{x\in E\colon \|x\|_E\leqslant 1\}$ – единичный шар в E, а B_F – единичный шар в F.

Соотношения между определенными выше числами оператора $T\in\mathscr{B}(E,F)$ можно объединить в следующей теореме.

Теорема 6. [2, стр. 184, 196], [16] *Пусть* $T \in \mathscr{B}(E,F)$ *и* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*
(i) $m_n(T) \leqslant c_n(T) \leqslant a_n(T), \quad b_n(T) \leqslant d_n(T) \leqslant a_n(T)$,
(ii) $a_n(T) \leqslant 2n^{1/2}c_n(T) \leqslant 2n^{5/2}m_n(T), \quad a_n(T) \leqslant 2n^{1/2}d_n(T) \leqslant 2n^{5/2}b_n(T)$,
(iii) $c_n(T) \leqslant ne_n(T), \quad d_n(T) \leqslant ne_n(T)$.

Таким образом, получив оценки для аппроксимативных чисел, мы имеем возможность получить оценки и для других чисел оператора (7) в пространствах Лоренца.

Теорема 7. *Пусть* $1 < \max(r,s) \leqslant q < \infty$, $1 < p < \infty$. *Предположим, что оператор* $T : L_v^{r,s} \to L_\omega^{p,q}$, *определенный формулой* (7), *компактен. Для заданного* $0 < \varepsilon < \|T\|$ *и целого числа* $N > 2$ *пусть интервалы* $I_k = [c_k, c_{k+1}], k = 0, 1, ...N$, *выбраны так, что выполнены соотношения* (15) *и* (21). *Тогда выполнены следующие оценки:*
1) при $1 < r \leqslant s \leqslant p \leqslant q < \infty$, $1 < s < r \leqslant p \leqslant q < \infty$, $1 < r \leqslant s \leqslant q < p < \infty$, $1 < s < r \leqslant q < p < \infty$

$$c_{N(\varepsilon)}(T) \leqslant \varepsilon, \quad d_{N(\varepsilon)}(T) \leqslant \varepsilon,$$

$$m_{N(\varepsilon)}(T) \leqslant \varepsilon, \quad b_{N(\varepsilon)}(T) \leqslant \varepsilon;$$

2) при $1<p\leqslant r<s\leqslant q<\infty$, $1<r<p<s\leqslant q<\infty$, $1<p\leqslant s<r\leqslant q<\infty$, $1<s<p<r\leqslant q<\infty$.

$$\Big(N(\varepsilon)+1\Big)^{\frac{1}{\max(r,s)}-\frac{1}{\min(p,q)}} c_{N(\varepsilon)}(T) \leqslant \varepsilon, \qquad \Big(N(\varepsilon)+1\Big)^{\frac{1}{\max(r,s)}-\frac{1}{\min(p,q)}} d_{N(\varepsilon)}(T) \leqslant \varepsilon,$$

$$\Big(N(\varepsilon)+1\Big)^{\frac{1}{\max(r,s)}-\frac{1}{\min(p,q)}} m_{N(\varepsilon)}(T) \leqslant \varepsilon, \qquad \Big(N(\varepsilon)+1\Big)^{\frac{1}{\max(r,s)}-\frac{1}{\min(p,q)}} b_{N(\varepsilon)}(T) \leqslant \varepsilon;$$

3) при $1<\max(r,s)\leqslant q<\infty$, $1<p<\infty$

$$\frac{\varepsilon}{4c_{pq}} N(\varepsilon)^{\frac{1}{\max(p,q)}-\frac{1}{\min(r,s)}-\frac{1}{2}} \leqslant c_{N(\varepsilon)}(T), \qquad \frac{\varepsilon}{4c_{pq}} N(\varepsilon)^{\frac{1}{\max(p,q)}-\frac{1}{\min(r,s)}-\frac{1}{2}} \leqslant d_{N(\varepsilon)}(T),$$

$$\frac{\varepsilon}{4c_{pq}} N(\varepsilon)^{\frac{1}{\max(p,q)}-\frac{1}{\min(r,s)}-\frac{5}{2}} \leqslant m_{N(\varepsilon)}(T), \qquad \frac{\varepsilon}{4c_{pq}} N(\varepsilon)^{\frac{1}{\max(p,q)}-\frac{1}{\min(r,s)}-\frac{5}{2}} \leqslant b_{N(\varepsilon)}(T),$$

$$\frac{\varepsilon}{4c_{pq}} N(\varepsilon)^{\frac{1}{\max(p,q)}-\frac{1}{\min(r,s)}-\frac{3}{2}} \leqslant e_{N(\varepsilon)}(T).$$

Замечание 2. Пусть оператор (7) компактен, тогда для двойственного оператора (8) результаты теорем 4 и 5 остаются справедливыми, поскольку [2, стр. 168]

$$a_n(T) = a_n(T').$$

Авторы выражают благодарность рецензенту за рекомендации и замечания, позволившие улучшить текст статьи.

Список литературы

[1] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*. V. 129, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, Boston, 1988.

[2] А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982.

[3] S. Barza, V. Kolyada V., J. Soria, “Sharp constants related to the triangle inequality in Lorentz spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**:10 (2009), 5555–5574.

[4] H. König, *Eigenvalue distribution of compact operators.* V. 16, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[5] D. E. Edmunds, W. D. Evans, *Spectral theory and differential operators*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 1987.

[6] B. Carl, I. Stephani, *Entropy, compactness and the approximation of operators*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1990.

[7] D. E. Edmunds, W. D. Evans, D. J. Harris, "Approximation numbers of certain Volterra integral operators", *London Math. Soc.* (2), **38** (1988), 471–489.

[8] D. E. Edmunds, V. Stepanov, "On singular numbers of certain Volterra integral operators", *J. Funct. Anal.*, **134** (1995), 222–246.

[9] D. E. Edmunds, W. D. Evans, D. J. Harris, "Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra integral operators", *Studia Math.* (1), **124** (1997), 59–80.

[10] E. Lomakina, V. Stepanov, "On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten von Neumann norms of the Hardy–type integral operators", *Function spaces and application*, 2000, 153–187.

[11] M. A. Lifshits, W. Linde, "Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion", *Mem. Am. Math. Soc.*, **745** (2002.), 1–87.

[12] E. Lomakina, V. Stepanov, "On the compactness and approximation numbers of Hardy type integral operators in Lorentz spases", *J. London Math. Soc.* (2), **53** (1996), 369–382.

[13] E. Lomakina, V. Stepanov, "On the Hardy-type integral operators in Banach function spases", *Publicacions Matematiques*, **42** (1998), 165–194.

[14] Е. Н. Ломакина, "Об оценках норм оператора Харди, действующего в пространствах Лоренца", *Дальневосточ. матем. журн.*, **20**:2 (2020), 191–211.

[15] E. T. Sawyer, "Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **281** (1984), 329–337.

[16] A. Pietsch, "s-Numbers of operators in Banach spaces", *Studia Math.*, **51** (1974), 201–223.

Поступила в редакцию
10 марта 2021 г.

Lomakina E. N.[1], *Nasyrova M. G.*[1], *Nasyrov V. V.*[2] The estimates of the approximation numbers of the Hardy operator acting in the Lorenz spaces in the case $\max(r, s) \leqslant q$. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 1. P. 71–88.

[1] Computer Centre of Far Eastern Branch RAS, Russia
[2] Pacific National University, Russia

ABSTRACT

In the paper conditions are found under which the compact operator $Tf(x) = \varphi(x) \int\limits_0^x f(\tau)v(\tau)\, d\tau,\ \ x > 0,$ acting in weighted Lorentz spaces $T : L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ in the domain $1 < \max(r, s) \leqslant \min(p, q) < \infty$, belongs to operator ideals $\mathfrak{S}_\alpha^{(a)}$ and $\mathfrak{E}_\alpha$, $0 < \alpha < \infty$. And estimates are also obtained for the quasinorms of operator ideals in terms of integral expressions which depend on operator weight functions.

Key words: *Hardy operator, compact operator, Lorentz spaces, approximation numbers, entropy numbers.*

References

[1] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators.* V. 129, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, Boston, 1988.

[2] A. Pich, *Operatornye idealy*, Mir, M., 1982.

[3] S. Barza, V. Kolyada V., J. Soria, “Sharp constants related to the triangle inequality in Lorentz spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**:10 (2009), 5555–5574.

[4] H. König, *Eigenvalue distribution of compact operators.* V. 16, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[5] D. E. Edmunds, W. D. Evans, *Spectral theory and differential operators*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 1987.

[6] B. Carl, I. Stephani, *Entropy, compactness and the approximation of operators*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1990.

[7] D. E. Edmunds, W. D. Evans, D. J. Harris, “Approximation numbers of certain Volterra integral operators”, *London Math. Soc.* (2), **38** (1988), 471–489.

[8] D. E. Edmunds, V. Stepanov, “On singular numbers of certain Volterra integral operators”, *J. Funct. Anal.*, **134** (1995), 222–246.

[9] D. E. Edmunds, W. D. Evans, D. J. Harris, “Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra integral operators”, *Studia Math.* (1), **124** (1997), 59–80.

[10] E. Lomakina, V. Stepanov, “On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten von Neumann norms of the Hardy–type integral operators”, *Function spaces and application*, 2000, 153–187.

[11] M. A. Lifshits, W. Linde, “Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion”, *Mem. Am. Math. Soc.*, **745** (2002.), 1–87.

[12] E. Lomakina, V. Stepanov, “On the compactness and approximation numbers of Hardy type integral operators in Lorentz spases”, *J. London Math. Soc.* (2), **53** (1996), 369–382.

[13] E. Lomakina, V. Stepanov, “On the Hardy-type integral operators in Banach function spases”, *Publicacions Matematiques*, **42** (1998), 165–194.

[14] E. N. Lomakina, “Ob otsenkakh norm operatora Khardi, deistvuiushchego v prostranstvakh Lorentsa”, *Dal’nevostoch. matem. zhurn.*, **20**:2 (2020), 191–211.

[15] E. T. Sawyer, “Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **281** (1984), 329–337.

[16] A. Pietsch, “s-Numbers of operators in Banach spaces”, *Studia Math.*, **51** (1974), 201–223.