Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 1. С. 113–121

УДК 517.95
MSC2020 35J61, 35Q79

© А. Ю. Чеботарев[1]

Оптимальное управление уравнениями радиационного теплообмена для многокомпонентных сред

Представлен анализ задач оптимального управления нелинейными эллиптическими уравнениями, моделирующими сложный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Получены условия разрешимости экстремальных задач и невырожденности системы оптимальности. Для задачи управления с граничным наблюдением установлено свойство «bang-bang».

Ключевые слова: *стационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, задачи оптимального управления.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202010

1. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим ограниченную липшицеву область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, содержащую конечное число липшицевых подобластей $\Omega_j,\ j=1,\dots,m$, замыкания которых не пересекаются. Пусть

$$\Omega_0=\Omega\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{m}\bar{\Omega}_j\right),$$

$\Gamma=\partial\Omega\subset\Gamma_0=\partial\Omega_0,\ \Gamma_j=\partial\Omega_j\subset\Gamma_0,\ j=1,\dots,m.$

Процесс радиационного теплообмена описывается температурой θ и усредненной по направлениям интенсивностью теплового излучения φ, которые в каждой из областей $\Omega_j,\ j=0,\dots,m$, удовлетворяют уравнениям

$$-a\Delta\theta+b(\theta^3|\theta|-\varphi)=f,\ \ -\alpha\Delta\varphi+\beta(\varphi-\theta^3|\theta|)=\mathrm{g}. \tag{1}$$

Положительные физические параметры a, b, α и β, описывающие свойства среды, определены в [1]. Эти параметры и коэффициент преломления $n>0$ принимают

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690043, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `cheb@iam.dvo.ru`

постоянные значения в областях Ω_j, $j=0,\ldots,m$, и при этом, что важно, $b=\sigma\beta n^2$, $\sigma==Const>0$. Функции f и g описывают тепловые источники и источники излучения.

Краевые условия на внешней границе $\Gamma=\partial\Omega$ и полученные в [1] условия сопряжения для температуры $\theta_j=\theta|_{\Omega_j}$ и интенсивности излучения $\varphi_j=\varphi|_{\Omega_j}$ на внутренних границах $\Gamma_j=\partial\Omega_j$, $j=1,\ldots,m$, имеют вид

$$\{a\partial_\nu\theta+c(\theta-\theta_b)\}|_\Gamma=0,\ \ \{\alpha\partial_\nu\varphi+\gamma(\varphi-\theta_b^4)\}|_\Gamma=0, \tag{2}$$

$$\theta_0=\theta_j,\quad a_0\partial_\nu\theta_0=a_j\partial_\nu\theta_j, \tag{3}$$

$$n_0^2\alpha_0\partial_\nu\varphi_0=n_j^2\alpha_j\partial_\nu\varphi_j,\quad h_j(\varphi_j-\varphi_0)=\alpha_0\partial_\nu\varphi_0. \tag{4}$$

Здесь θ_b — заданная температура, c — коэффициент теплопередачи, $0<\gamma\leqslant 1/2$, $\{a_j,\alpha_j,n_j\}=\{a,\alpha,n\}|_{\Omega_j}$, $h_j>0$ — параметры, зависящие от коэффициентов отражения на соответствующих границах. Через ∂_ν обозначаем производную в направлении внешней нормали ν к границе.

Пусть $U_{ad}\subset L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ — множество допустимых управлений. Задача оптимального управления заключается в минимизации некоторого целевого функционала J, зависящего от состояния $y=\{\theta,\varphi\}$ и управления $u=\{f,\mathrm{g}\}\in U_{ad}$, на решениях краевой задачи (1)–(4).

Краевые задачи для уравнений радиационного теплообмена, где рассматривается диффузионное приближение уравнения переноса излучения, но не учитываются эффекты отражения и преломления на границах разрыва коэффициента преломления, изучены достаточно полно. Отметим статьи [2–18], посвященные краевым, экстремальным и обратным задачам для диффузионных уравнений радиационного теплообмена. Краевые и обратные задачи для многокомпонентных сред изучены в [1, 19, 20]. Различные краевые задачи, учитывающие радиационный теплообмен, рассмотрены в [21–23].

В данной заметке анонсируются результаты анализа задачи оптимального управления системой (1)–(4), приводятся результаты о разрешимости задачи и невырожденности условий оптимальности. Для задачи управления с граничным наблюдением установлено свойство релейности оптимального управления.

2. Разрешимость задачи управления

Рассмотрим функциональные пространства $H=L^2(\Omega)$, $V=H^1(\Omega)$,

$$W=\{w\in H\ :\ w_j=w|_{\Omega_j}\in H^1(\Omega_j),\ j=0,\ldots,m\}\subset L^6(\Omega).$$

Здесь и далее через L^s, $1\leqslant s\leqslant\infty$, обозначаем пространства Лебега, через $H^s=W_2^s$ — пространства Соболева. Заметим, что $V\subset W\subset H=H'\subset W'\subset V'$. Здесь W',V' — пространства, сопряженные с W и V соответственно. Через (f,v) будем обозначать значение функционала $f\in V'$ на элементе $v\in V$ и скалярное произведение в H, если $f,v\in H$ и, кроме того,

$$\|v\|^2=(v,v),\ (v,w)_j=(v,w)_{L^2(\Omega_j)},\ \|v\|_j^2=(v,v)_j,\ (v,w)_W=\sum_{j=0}^{m}(v,w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Предполагается, что исходные данные удовлетворяют условиям:

(i) $c,\gamma\in L^\infty(\Gamma)$, $c\geqslant c_0>0$, $\gamma\geqslant\gamma_0>0$, $c_0,\gamma_0=\mathrm{const}$;

(ii) $\{a,b,\alpha,\beta,n\}|_{\Omega_j}=\{a_j,b_j,\alpha_j,\beta_j,n_j\}$, $b=\sigma\beta n^2$, $\sigma=Const>0$;

(iii) $0\leqslant\theta_b\in L^\infty(\Gamma)$; $f\in H$, $\mathrm{g}:=\sigma n^2\mathrm{g}\in H$.

Для записи слабой формулировки краевой задачи (1)–(4) определим отображения $A_1\colon V\to V'$, $A_2\colon W\to W'$, $f_b\in V'$, $\mathrm{g}_b\in W'$, используя равенства [19, 20]

$$(A_1\theta,\eta)=(a\nabla\theta,\nabla\eta)+\int\limits_\Gamma c\theta\eta d\Gamma,$$

$$(A_2\varphi,w)=\sigma\sum_{j=0}^m\alpha_j n_j^2(\nabla\varphi,\nabla w)_j+\sigma n_0^2\int\limits_\Gamma\gamma\varphi w d\Gamma+\sigma n_0^2\sum_{j=1}^m h_j\int\limits_{\Gamma_j}(\varphi_0-\varphi_j)(w_0-w_j)d\Gamma,$$

$$(f_b,\eta)=\int\limits_\Gamma c\theta_b\eta d\Gamma,\quad (\mathrm{g}_b,w)=\sigma n_0^2\int\limits_\Gamma\gamma\theta_b^4 w d\Gamma,$$

справедливые для всех $\theta,\eta\in V$ and $\varphi,w\in W$. Здесь $\{\varphi_j,w_j\}=\{\varphi,w\}|_{\Omega_j}$.

Пара $\{\theta,\varphi\}\in V\times W$ называется слабым решением задачи (1)–(4), если

$$A_1\theta+b([\theta]^4-\varphi)=f_b+f,\quad A_2\varphi+b(\varphi-[\theta]^4)=\mathrm{g}_b+\mathrm{g}. \tag{5}$$

Здесь $[\theta]^4=|\theta|^4\mathrm{sign}\,\theta$.

При выполнении условий (i)–(iii) задача (5) однозначно разрешима [19].

Рассмотрим пространство управлений $U=H\times H$, множество допустимых управлений U_{ad}, пространство состояний $Y=V\times W$ и целевой функционал $J:Y\times U_{ad}\to\mathbb{R}$ такие, что

(j) $U_{ad}\subset U$ непустое, выпуклое и замкнутое множество;

(jj) J слабо полунепрерывен снизу;

(jjj) $U_{ad}\subset U$ ограничено или $\forall r>0$ множество $\{u\in U_{ad}: J(y,u)\leqslant r, y\in Y\}$ ограничено в U.

Пусть $F:Y\times U\to V'\times W'$, $y=\{\theta,\varphi\}, u=\{f,\mathrm{g}\}$,

$$F(y,u)=\{A_1\theta+b([\theta]^4-\varphi)-f_b-f,\, A_2\varphi+b(\varphi-[\theta]^4)-\mathrm{g}_b-\mathrm{g}\}.$$

Сформулируем задачу оптимального управления.

Задача (CP). Найти $\hat y=\{\hat\theta,\hat\varphi\}\in Y$, $\hat u=\{\hat f,\hat{\mathrm{g}}\}\in U_{ad}$ такие, что $F(\hat y,\hat u)=0$,

$$J(\hat y,\hat u)=\inf\{J(y,u):\, u\in U_{ad},\, F(y,u)=0\}. \tag{6}$$

Заметим, что из условия (jjj) и оценок решения задачи (5), полученных в [19], следует ограниченность минимизирующей функционал J последовательности в $U\times V\times W$. Поэтому, с учетом компактности вложения $V\subset L^3(\Omega)$ и условия (jj), получаем разрешимость задачи (CP).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(iii), (j)–(jjj). Тогда существует решение задачи (CP).*

3. Необходимые условия оптимальности

При получении невырожденных условий оптимальности важное значение имеет тот факт, что образ производной оператора ограничений $\mathtt{Im}\,F'_y(\hat{y},\hat{u})$, где $\hat{y},\hat{u}$ — решение задачи (CP), совпадает с пространством $V'\times W'$.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия (i)–(iii). Для любой пары $y\in Y, u\in U$ справедливо равенство*

$$\mathtt{Im}\,F'_y(y,u) = V'\times W'.$$

Утверждение леммы следует из разрешимости линейной системы

$$A_1\xi + b(4|\theta|^3\xi - \zeta) = \eta_1,\ \ A_2\zeta + b(\zeta - 4|\theta|^3\xi) = \eta_2 \tag{7}$$

для всех $\eta_1\in V', \eta_2\in W'$. Задача (7) эквивалентна системе

$$\xi + B\xi = \eta_3,\ \ \zeta = (A_2+bI)^{-1}(4b|\theta|^3\xi + \eta_2). \tag{8}$$

Здесь $B\xi = A_1^{-1}A_2(A_2+bI)^{-1}(4b|\theta|^3\xi)$, $\eta_3 = A_1^{-1}(\eta_1+\eta_2 - A_2(A_2+bI)^{-1}\eta_2)\in V$. Нетрудно проверить, что оператор $B: V\to V$ является компактным. Используя свойство единственности продолжения для эллиптических уравнений, можно показать, что ядро фредгольмовского оператора $I+B$ нулевое. Поэтому первое уравнение в (8) однозначно разрешимо для любой правой части, что означает разрешимость задачи (7) и справедливость утверждения леммы.

Используя лемму 1, для получения системы оптимальности удобно использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [24, гл.2, теорема 1.5]. Функция Лагранжа задачи (CP) определяется равенством

$$L(y,u,p) = J(y,u) + (A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b - f, p_1) + (A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) - \mathrm{g}_b - \mathrm{g}, p_2),$$

где $y=\{\theta,\varphi\}\in Y$, $u=\{f,\mathrm{g}\}\in U$, $p=\{p_1,p_2\}\in Y$. В соответствии с принципом Лагранжа равенства $L'_\theta(\hat{y},\hat{u},p)=0$, $L'_\varphi(\hat{y},\hat{u},p)=0$ дают сопряженную систему, которая дополняется вариационным неравенством $(L'_u(\hat{y},\hat{u},p), u-\hat{u})_U \geqslant 0\ \forall u\in U_{ad}$. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i)–(iii), $\{\hat{y},\hat{u}\}$ — решение задачи (OC) и при этом $\forall u\in U_{ad}$ отображение $y\to J(y,u)$ непрерывно дифференцируемо в окрестности $\hat{y}$, $\forall y$ в окрестности $\hat{y}$ функция $u\to J(y,u)$ выпукла, J дифференцируема по Гато по u в точке $\{\hat{y},\hat{u}\}$. Тогда существует сопряженное состояние $p=\{p_1,p_2\}\in Y$, удовлетворяющее системе уравнений*

$$A_1p_1 + 4b|\hat{\theta}|^3(p_1-p_2) = -J'_\theta(\hat{y},\hat{u}),\ \ A_2p_2 + b(p_2-p_1) = -J'_\varphi(\hat{y},\hat{u}), \tag{9}$$

такое, что $\forall u=\{v,w\}\in U_{ad}$

$$(J'_f(\hat{y},\hat{u}) - p_1, v-\hat{f}) \geqslant 0,\ \ (J'_{\mathrm{g}}(\hat{y},\hat{u}) - p_2, w-\hat{\mathrm{g}}) \geqslant 0. \tag{10}$$

Здесь $\hat{y}=\{\hat{\theta},\hat{\varphi}\}$ — оптимальное состояние, $\hat{u}=\{\hat{f},\hat{\mathrm{g}}\}$ — оптимальное управление.

4. Граничное наблюдение. Свойство bang-bang

В качестве приложения изучим следующую задачу оптимального управления радиационным теплообменом в области Ω с одним включением $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$.

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma}(\theta-\theta_d)^2 d\Gamma \ \to \inf, \tag{11}$$

$$A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = \mathrm{g}_b, \tag{12}$$

$$f \in \{v \in H : \ \mathsf{s}upp\, v \subset \bar{\Omega}_1, \ 0 \leqslant f_1(x) \leqslant v(x) \leqslant f_2(x), \ x \in \Omega_1\}. \tag{13}$$

Здесь $\theta_d \in L^2(\Gamma)$, $f_1, f_2 \in L^2(\Omega_1)$ — заданные функции.

В силу теорем 1,2 справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует решение $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{f}\}$ задачи* (11)–(13) *и соответствующее сопряженное состояние $\{p_1, p_2\}$ такие, что*

$$A_1\hat{\theta} + b([\hat{\theta}]^4 - \hat{\varphi}) = f_b + \hat{f}, \quad A_2\hat{\varphi} + b(\hat{\varphi} - [\hat{\theta}]^4) = \mathrm{g}_b, \tag{14}$$

$$A_1 p_1 + 4b|\hat{\theta}|^3(p_1 - p_2) = \mathrm{g}_d, \ \ A_2 p_2 + b(p_2 - p_1) = 0, \tag{15}$$

$$\int_{\Omega_1} p_1(v - \hat{f})dx \leqslant 0 \ \ \forall v \in L^2(\Omega_1), \ 0 \leqslant f_1 \leqslant v \leqslant f_2. \tag{16}$$

Здесь $\mathrm{g}_d \in V'$ задается выражением $(\mathrm{g}_d, \eta) = -\int_{\Gamma}(\hat{\theta} - \theta_d)\eta d\Gamma \ \forall \eta \in V$.

Условия (14)–(16) позволяют обосновать релейность оптимального управления (свойство bang-bang).

Лемма 2. *Пусть выполняются условия (i)–(iii), тройка $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{f}\}$ — решение задачи* (11)–(13), *$\{p_1, p_2\}$ — сопряженное состояние и при этом $\theta_b \geqslant \mu = Const > 0$. Тогда либо $p_1(x) \neq 0$ почти всюду на Ω_1, либо $p_1 = p_2 = 0$ в Ω.*

Отметим сразу, и это важно, что из условия $\theta_b \geqslant \mu = Const > 0$ следует неравенство $\hat{\theta} \geqslant \mu > 0$ в Ω, означающее положительность температуры. Это позволяет, опираясь на свойство единственности продолжения для эллиптических уравнений, доказать лемму 2.

Заметим, что если $p_1 \equiv 0$, то можно найти такое управление $\hat{f}$, что $\hat{\theta} - \theta_d = 0$ на внешней границе Γ. В случае положительности минимального значения целевого функционала из леммы 2 следует, что $p_1 \neq 0$ почти всюду в Ω_1. Тогда из вариационного неравенства (16) получаем

$$p_1(x)(s - \hat{f}(x)) \leqslant 0 \ \ \forall s \in [f_1(x), f_2(x)] \ \text{ для почти всех } x \in \Omega_1.$$

Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (i)–(iii) и при этом* $\theta_b \geqslant \mu = Const > 0$. *Если точная нижняя грань целевого функционала в задаче* (11)–(13) *положительна, то* $p_1 \neq 0$ *почти всюду в* Ω_1 *и оптимальное управление является релейным,*

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } p_1(x) < 0; \\ f_2(x), & \text{если } p_1(x) > 0. \end{cases}$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной математики ДВО РАН (номер темы: 075-01095-20-00).

Список литературы

[1] Alexander Yu. Chebotarev and Gleb V. Grenkin and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin and Karl-Heinz Hoffmann, "Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **57** (2018), 290–298.

[2] R. Pinnau, "Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the SP_1-System", *Comm. Math. Sci.*, **5**:4 (2007), 951–969.

[3] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem", *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2 (2014), 808–815.

[4] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, "Стационарная задача сложного теплообмена", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:4 (2014), 711–719.

[5] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, "Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом", *Дифференциальные уравнения*, **50**:12 (2014), 1590–1597.

[6] Kovtanyuk Andrey E., Chebotarev Alexander Yu., Botkin Nikolai D., and Hoffmann Karl-Heinz, "Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive convective radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.*, **412** (2014), 520—528.

[7] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, and Hoffman Karl-Heinz, "Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model,", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **20** (2015), 776—784.

[8] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, "Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена", *Сибирские электронные математические известия*, **12**:11 (2015), 562–576.

[9] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, "Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом", *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:2 (2016), 275–282.

[10] A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, G. Grenkin, N. Botkin, and K.-H. Hoffman, "Boundary optimal control problem of complex heat transfer model", *J. Math. Anal. Appl.*, **433**:2 (2016), 1243–1260.

[11] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects", *J. Math. Anal. Appl.*, **439** (2016), 678–689.

[12] Alexander Yu. Chebotarev, Andrey E. Kovtanyuk, Gleb V. Grenkin, Nikolai D. Botkin, and Karl Heinz Hoffmann, "Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model", *Applied Mathematics and Computation*, **289**:10 (2016), 371–380.

[13] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, "Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer", *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**:6 (2017), 2511–2519.

[14] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "In-

verse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange”, *J. Math. Anal. Appl.*, **460**:2 (2018), 737–744.

[15] A. Yu. Chebotarev, R. Pinnau, “An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **472**:1 (2019), 737–744.

[16] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Обратная задача для уравнений сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:8 (2019), 1420–1430.

[17] Alexander Yu. Chebotarev and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin, “Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **75** (2019), 262–269.

[18] А. Г. Колобов, Т. В. Пак, А. Ю. Чеботарев, “Стационарная задача радиационного теплообмена с граничными условиями типа Коши”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:7 (2019), 1258–1263.

[19] А. Ю. Чеботарев, “Неоднородная краевая задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:12 (2020), 1660–1665.

[20] А. Ю. Чеботарев, “Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **61**:2 (2021), 303–311.

[21] A. A. Amosov, “Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative–conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency”, *Journal of Mathematical Sciences*, **164** (2010), 309–344.

[22] A. A. Amosov, “Unique Solvability of Stationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies”, *Journal of Mathematical Sciences*, **224**:5 (2017), 618–646.

[23] A. A. Amosov, N. E. Krymov, “On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **244**:3 (2020), 357–377.

[24] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения.*, Научная книга, 1999.

Поступила в редакцию
27 апреля 2021 г.

Работа выполнена при поддержке
РФФИ (проект 20-01-00113).

Chebotarev A. Yu.[1] Optimal control of the radiation heat exchange equations for multi-component media. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 1. P. 113–121.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

An analysis of optimal control problems for nonlinear elliptic equations modeling complex heat transfer with Fresnel conjugation conditions on the discontinuity surfaces of the refractive index is presented. Conditions for the solvability of extremal problems and the nondegeneracy of the optimality system are obtained. For the control problem with boundary observation, the bang-bang property is set.

Key words: *stationary equations of radiative heat transfer, Fresnel conjugation conditions, optimal control problems.*

References

[1] Alexander Yu. Chebotarev and Gleb V. Grenkin and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin and Karl-Heinz Hoffmann, "Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **57** (2018), 290–298.

[2] R. Pinnau, "Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the SP_1-System", *Comm. Math. Sci.*, **5**:4 (2007), 951–969.

[3] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem", *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2 (2014), 808–815.

[4] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, "Steady-state problem of complex heat transfer", *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:4 (2014), 719–726.

[5] A. E. Kovtaniuk, A. Iu. Chebotarev, "Statsionarnaia zadacha svobodnoi konvektsii s radiatsionnym teploobmenom", *Differentsial'nye uravneniia*, **50**:12 (2014), 1590–1597.

[6] Kovtanyuk Andrey E., Chebotarev Alexander Yu., Botkin Nikolai D., and Hoffmann Karl-Heinz, "Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive convective radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.*, **412** (2014), 520—528.

[7] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, and Hoffman Karl-Heinz, "Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model,", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **20** (2015), 776—784.

[8] G. V. Grenkin, A. Iu. Chebotarev, "Neodnorodnaia nestatsionarnaia zadacha slozhnogo teploobmena", *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiia*, **12**:11 (2015), 562–576.

[9] G. V. Grenkin, A. Iu. Chebotarev, "Nestatsionarnaia zadacha svobodnoi konvektsii s radiatsionnym teploobmenom", *Zh. vychisl. matem. fiz.*, **56**:2 (2016), 275–282.

[10] A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, G. Grenkin, N. Botkin, and K.-H. Hoffman, "Boundary optimal control problem of complex heat transfer model", *J. Math. Anal. Appl.*, **433**:2 (2016), 1243–1260.

[11] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects", *J. Math. Anal. Appl.*, **439** (2016), 678–689.

[12] Alexander Yu. Chebotarev, Andrey E. Kovtanyuk, Gleb V. Grenkin, Nikolai D. Botkin, and Karl Heinz Hoffmann, "Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model", *Applied Mathematics and Computation*, **289**:10 (2016), 371–380.

[13] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, "Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer", *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**:6 (2017), 2511–2519.

[14] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange", *J. Math. Anal. Appl.*, **460**:2 (2018), 737–744.

[15] A. Yu. Chebotarev, R. Pinnau, "An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.*, **472**:1 (2019), 737–744.

[16] G. V. Grenkin, A. Iu. Chebotarev, "Obratnaia zadacha dlia uravnenii slozhnogo teploobmena", *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **59**:8 (2019), 1420–1430.

[17] Alexander Yu. Chebotarev and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin, "Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **75** (2019), 262–269.

[18] A. G. Kolobov, T. V. Pak, A. Iu. Chebotarev, "Statsionarnaia zadacha radiatsionnogo teploobmena s granichnymi usloviiami tipa Koshi", *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **59**:7 (2019), 1258–1263.

[19] A. Iu. Chebotarev, "Neodnorodnaia kraevaia zadacha dlia uravnenii slozhnogo teploobmena s frenelevskimi usloviiami sopriazheniia", *Differentsial'nye uravneniia*, **56**:12 (2020), 1660–1665.

[20] A. Iu. Chebotarev, "Obratnaia zadacha dlia uravnenii slozhnogo teploobmena s frenelevskimi usloviiami sopriazheniia", *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **61**:2 (2021), 303–311.

[21] A. A. Amosov, "Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative–conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency", *Journal of Mathematical Sciences*, **164** (2010), 309–344.

[22] A. A. Amosov, "Unique Solvability of Stationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies", *Journal of Mathematical Sciences*, **224**:5 (2017), 618–646.

[23] A. A. Amosov, N. E. Krymov, "On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems", *Journal of Mathematical Sciences*, **244**:3 (2020), 357–377.

[24] A. V. Fursikov, *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriia i prilozheniia*, Nauchnaia kniga, 1999.