Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 1. С. 3–27

УДК 519.63
MSC2020 35K05

© З. В. Бештокова[1]

Конечно-разностные методы решения нелокальной краевой задачи для многомерного параболического уравнения с граничными условиями интегрального вида

В статье рассматривается нелокальная краевая задача для многомерного параболического уравнения с граничными условиями интегрального вида. Для решения задачи получена априорная оценка в дифференциальной форме, откуда следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным на слое в L_2-норме. Для численного решения нелокальной краевой задачи строится локально-одномерная (экономичная) разностная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau)$, основная идея которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения локально-одномерной разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи в L_2-норме со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Построен алгоритм численного решения.

Ключевые слова: *параболическое уравнение, нелокальное условие, разностные схемы, локально-одномерная схема, априорная оценка, устойчивость, сходимость, многомерная задача.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202201

Введение

Последние годы интерес многих ученых вызывают задачи, названные нелокальными. Нелокальными задачами в литературе принято называть такие задачи, в которых вместо обычных точечных ("локальных") граничных условий задаются условия, связывающие значения искомого решения и (или) его производных в различных

[1] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360004, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а. Электронная почта: zarabaeva@yandex.ru

точках границы, либо же в точках границы и в каких-либо внутренних точках [1, с. 135]. К первым работам с неклассическими граничными условиями относятся, по-видимому, работы Carleman T. [2], Canon J. R. [3], Камынина Л. И. [4] и Чудновского А. Ф. [5]. Естественность постановки задач, когда краевые условия представляют собой соотношение между значениями неизвестной функции, вычисленной в различных точках границы, отмечалась ещё В. А. Стекловым [6].

Среди таких задач наиболее сложными с точки зрения численной реализации считаются многомерные (по пространственным переменным) задачи. Сложность заключается в значительном увеличении объёма вычислений, возникающем при переходе от одномерных задач к многомерным. В этой связи актуальна задача построения экономичных разностных схем, которые обладают возможностью достаточно эффективной стабилизации решений (устойчивостью) и требуют для перехода со слоя на слой затратить Q арифметических действий, пропорциональных числу узлов сетки, так что $Q=O\left(\frac{1}{h^p}\right)$, где $h=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant p} h_i$, p — размерность пространства, h_i — шаг сетки по направлению x_i.

Настоящая работа посвящена построению локально-одномерных (экономичных) разностных схем для численного решения нелокальной краевой задачи для многомерного параболического уравнения с граничными условиями интегрального вида, основная идея которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом каждая из вспомогательных задач может не аппроксимировать исходную задачу, но в совокупности и в специальных нормах такая аппроксимация имеет место. Эти методы были названы методами расщепления; они развиты в работах Douglas J., Peaceman D. W., Rachford H. H. [7, 8], Яненко Н. Н. [9], Самарского А. А. [10, 11], Марчука Г. И. [12], Дьяконова Е. Г. [13] и др.

Различные классы нелокальных краевых задач для одномерных дифференциальных уравнений в частных производных целочисленного и дробного порядков изучались в работах [14–21], в многомерном случае — в [22].

В [15] рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения третьего порядка
$$L_\nu(u) \equiv u_t - u_{xx} - \nu u_{xxt} + c(x,t)u = q(x,t),$$
с краевыми условиями
$$u(0,t) = \alpha(t)u(1,t) + \int\limits_0^t h(t,\tau)u(1,\tau)d\tau, \quad 0<t<T, \tag{$*$}$$
$$u_x(1,t) = 0, \quad 0<t<T,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0<x<1.$$

Исследуемая в данной работе нелокальная задача содержит нелокальные граничные условия интегрального вида (*).

В работе [22] исследуется нелокальная краевая задача для многомерного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с граничным условием интегрального вида. Построена локально-одномерная схема, получены априорные оценки, откуда следуют устойчивость и сходимость.

Настоящая работа является продолжением серии работ автора, посвященных краевым задачам для многомерных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа [23, 24].

1. Постановка нелокальной краевой задачи и априорная оценка в дифференциальной форме

В замкнутой области $\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0,T]$, основанием которой является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G}=\{x=(x_1,x_2,...,x_p):0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\alpha=1,2,...,p\}$ с границей Γ, $\overline{G}=G\cup\Gamma$, рассматривается нелокальная краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x_0^\alpha,t)u_{x_\alpha}(x_0^\alpha,t)=\beta_{+\alpha}(x_{l_\alpha}^\alpha,t)u(x_{l_\alpha}^\alpha,t)+\int\limits_0^t\rho_1(t,\tau)u(x_{l_\alpha}^\alpha,\tau)d\tau- \\ \qquad\qquad -\mu_{-\alpha}(x_0^\alpha,t),\ \alpha=1,2,...,p,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\ -k_\alpha(x_{l_\alpha}^\alpha,t)u_{x_\alpha}(x_{l_\alpha}^\alpha,t)=\beta_{-\alpha}(x_0^\alpha,t)u(x_0^\alpha,t)+\int\limits_0^t\rho_2(t,\tau)u(x_0^\alpha,\tau)d\tau- \\ \qquad\qquad -\mu_{+\alpha}(x_{l_\alpha}^\alpha,t),\ \alpha=1,2,...,p,\ 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu=\sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u,\quad L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-q_\alpha(x,t)u,$$

$$u(x,t)\in C^{4,2}\left(\overline{Q}_T\right),\quad k_\alpha(x,t)\in C^{3,1}\left(\overline{Q}_T\right),\quad r_\alpha(x,t),\ q_\alpha(x,t),\ f(x,t)\in C^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right),$$

$$0<c_0\leqslant k_\alpha(x,t)\leqslant c_1, \tag{4}$$

$$|r_\alpha(x,t)|,\ |k_{x_\alpha}(x,t)|,\ |r_{x_\alpha}(x,t)|,\ |q_\alpha(x,t)|,\ |\beta_{\pm\alpha}(x,t)|,\ |\rho_1(t,\tau)|,\ |\rho_2(t,\tau)|\leqslant c_2,$$

$$Q_T=G\times(0,T],\quad c_0,c_1,c_2 \text{ — положительные постоянные},\ \alpha=\overline{1,p},\quad 0\leqslant\tau\leqslant t,$$

$$x_0^\alpha=(x_1,x_2,...,x_{\alpha-1},0,x_{\alpha+1},...,x_p),\quad x_{l_\alpha}^\alpha=(x_1,x_2,...,x_{\alpha-1},l_\alpha,x_{\alpha+1},...,x_p),$$

$$\beta_{\pm\alpha}(x,t),\ \mu_{\pm\alpha}(x,t),\ u_0(x) \text{ — непрерывные функции},\ \rho_1(t,\tau),\ \rho_2(t,\tau)\in C^1[0,T].$$

Далее через M_i, $i=1,2,...$, обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных задачи (1)–(3).

Допуская существование регулярного решения задачи (1)–(3) в замкнутой области $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку для ее решения. Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1) скалярно на u и получим энергетическое тождество:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t},u\right)&=\left(\sum_{\alpha=1}^p\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),u\right)+\left(\sum_{\alpha=1}^p r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha},u\right)-\\ &-\left(\sum_{\alpha=1}^p q_\alpha(x,t)u,u\right)+\big(f(x,t),u\big).\end{aligned} \tag{5}$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$u_x^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} u_{x_\alpha}^2, \quad \|u\|^2_{L_2(0,l_\alpha)} = \int\limits_0^{l_\alpha} u^2(x,t)dx_\alpha, \quad (u,v) = \int\limits_G uvdx, \quad \|u\|_0^2 = \int\limits_G u^2dx.$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (5):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) = \int\limits_G u\frac{\partial u}{\partial t}dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2, \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), u\right) = \\ = \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'} k_\alpha(x,t)u\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha}dx' - \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2dx,\end{gathered} \tag{7}$$

где $G' = \{x' = (x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p) : \ 0 < x_k < l_k, \ k = 1, 2, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, p\}$, $dx' = dx_1dx_2\cdots dx_{\alpha-1}dx_{\alpha+1}\cdots dx_p$. Далее, для оценки слагаемых правой части, применим ε-неравенство Коши:

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, u\right) \leqslant \sum_{\alpha=1}^{p}\left(r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, u\right) \leqslant \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_1(\varepsilon)\|u\|_0^2, \tag{8}$$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)u, u\right) \leqslant c_2\|u\|_0^2, \tag{9}$$

$$\Big(f(x,t), u\Big) \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2. \tag{10}$$

Учитывая преобразования (6)–(10), из (5) получаем неравенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2dx \leqslant \\ \leqslant \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'} uk_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha}dx' + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_2(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2.\end{gathered} \tag{11}$$

Принимая во внимание (2) и $\int\limits_{\partial\Omega} v^2ds \leqslant \int\limits_{\Omega}\left(\varepsilon v_x^2 + c_\varepsilon v^2\right)dx$, $c(\varepsilon) = \frac{1}{l_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, первое слагаемое в правой части (11) оценим следующим образом:

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'} uk_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha}dx' = \\ = \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(k_\alpha(x^\alpha_{l_\alpha},t)u_{x_\alpha}(x^\alpha_{l_\alpha},t)u(x^\alpha_{l_\alpha},t) - k_\alpha(x^\alpha_0,t)u_{x_\alpha}(x^\alpha_0,t)u(x^\alpha_0,t)\Big)dx' =\end{gathered}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} \Big(\mu_{+\alpha}(x^\alpha_{l_\alpha}, t) u(x^\alpha_{l_\alpha}, t) - \beta_{-\alpha}(x^\alpha_0, t) u(x^\alpha_0, t) u(x^\alpha_{l_\alpha}, t) -$$

$$- u(x^\alpha_{l_\alpha}, t) \int_0^t \rho_2(t,\tau) u(x^\alpha_0, \tau) d\tau + \mu_{-\alpha}(x^\alpha_0, t) u(x^\alpha_0, t) - \beta_{+\alpha}(x^\alpha_{l_\alpha}, t) u(x^\alpha_{l_\alpha}, t) u(x^\alpha_0, t) -$$

$$- u(x^\alpha_0, t) \int_0^t \rho_1(t,\tau) u(x^\alpha_{l_\alpha}, \tau) d\tau \Big) dx' \leqslant \varepsilon M_3 \|u_x\|_0^2 + M_4(\varepsilon)\|u\|_0^2 +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + M_5(\varepsilon) \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} \Big(\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha} \Big) dx'. \tag{12}$$

Тогда из неравенства (11), с учетом (12), следует

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \int_G k_\alpha(x,t) \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx \leqslant \varepsilon M_6 \|u_x\|_0^2 + M_7(\varepsilon)\|u\|_0^2 +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + M_5(\varepsilon) \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} \Big(\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha} \Big) dx' + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{13}$$

Проинтегрировав (13) по τ от 0 до t, получим

$$\|u\|_0^2 + \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau \leqslant \varepsilon M_8 \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + \varepsilon M_9 \int_0^t\int_0^\tau \|u_x\|_0^2 d\tau_1 d\tau + M_{10}(\varepsilon) \int_0^t\int_0^\tau \|u\|_0^2 d\tau_1 d\tau +$$

$$+M_{11}(\varepsilon) \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{12} \left(\int_0^t \left(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} \Big(\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha} \Big) dx' \right) d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 \right). \tag{14}$$

Оценивая второе и третье слагаемые правой части неравенства (14)

$$\int_0^t \int_0^\tau \|u_x\|_0^2 d\tau_1 d\tau \leqslant T \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau, \quad \int_0^t \int_0^\tau \|u\|_0^2 d\tau_1 d\tau \leqslant T \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau,$$

из (14) получим неравенство

$$\|u\|_0^2 + \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau \leqslant \varepsilon M_{13} \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + M_{14}(\varepsilon) \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau +$$

$$+M_{12} \Big(\int_0^t \Big(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} \Big(\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha} \Big) dx' \Big) d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 \Big). \tag{15}$$

Выбирая $\varepsilon = \frac{1}{2M_{13}}$, из (15) следует

$$\|u\|_0^2 + \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau \leqslant$$

$$+M_{15}\int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{16}\left(\int\limits_0^t \left(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\left(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\right)dx'\right)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2\right).$$

На основании леммы Гронуолла [25, с. 152] из последнего получаем неравенство

$$\|u\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau \leqslant M(T)\left(\int\limits_0^t\left(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\left(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\right)dx'\right)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2\right), \quad (16)$$

где $M(T)$ зависит только от входных данных задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4), *тогда для решения задачи* (1)–(3) *справедлива априорная оценка* (16).

Из априорной оценки (16) следует единственность решения исходной дифференциальной задачи (1)–(3), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в L_2-норме.

2. Локально-одномерная схема

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p}\bar{\omega}_{h_\alpha},$$

$$\bar{\omega}_{h_\alpha} = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha \ : i_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha - 1, x_\alpha^{(0)} = 0, x_\alpha^{(N_\alpha)} = N_\alpha \frac{h_\alpha}{2}\right\}, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

На отрезке $[0, T]$ также введём равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \tau\frac{\alpha}{p}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$ полуинтервал, где $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\Re u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\Re_\alpha u = 0, \quad \Re_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

где $f_\alpha(x, t)$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$ — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x, t)$, удовлетворяющие условию нормировки $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$, и выполнено условие $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} q_\alpha = q$.

Если на промежутке $[t_{j-1}, t_j]$ задача решена, то для решения ее на промежутке $[t_j, t_{j+1}]$ будем последовательно решать задачи на каждом из полуинтервалов Δ_α, $\alpha = 1,2,...,p$

$$\Re_\alpha \vartheta_\alpha = \frac{1}{p}\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \tag{17}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x_0^\alpha, t)(\vartheta_{(\alpha)})_{x_\alpha}(x_0^\alpha, t) = \beta_{+\alpha}(x_{l_\alpha}^\alpha, t)\vartheta_{(\alpha)}(x_{l_\alpha}^\alpha, t) + \\ +\frac{1}{p}\sum\limits_{s=0}^{pj+\alpha-1}\int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \rho_1(t_{\frac{j}{p}}, \tau)\vartheta_{(\alpha)}(x_{l_\alpha}^\alpha, \tau)d\tau + \frac{1}{p}\int\limits_{t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}}^{t_{j+\frac{\alpha}{p}}} \rho_1(t_{\frac{j}{p}}, \tau)\vartheta_{(\alpha)}(x_{l_\alpha}^\alpha, \tau)d\tau - \mu_{-\alpha}(x_0^\alpha, t), \\ -k_\alpha(x_{l_\alpha}^\alpha, t)(\vartheta_{(\alpha)})_{x_\alpha}(x_{l_\alpha}^\alpha, t) = \beta_{-\alpha}(x_0^\alpha, t)\vartheta_{(\alpha)}(x_0^\alpha, t) + \\ +\frac{1}{p}\sum\limits_{s=0}^{pj+\alpha-1}\int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \rho_2(t_{\frac{j}{p}}, \tau)\vartheta_{(\alpha)}(x_0^\alpha, \tau)d\tau + \frac{1}{p}\int\limits_{t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}}^{t_{j+\frac{\alpha}{p}}} \rho_2(t_{\frac{j}{p}}, \tau)\vartheta_{(\alpha)}(x_0^\alpha, \tau)d\tau - \mu_{+\alpha}(x_{l_\alpha}^\alpha, t), \end{cases} \tag{18}$$

полагая при этом [26, стр. 522]

$$\vartheta_{(\alpha)}^j(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = \vartheta_{(\alpha-1)}^j(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad \alpha = 2,3,\ldots,p, \quad j = 1,2,\ldots,j_0,$$
$$\vartheta_{(1)}^j(x, t_j) = \vartheta_{(p)}^{j-1}(x, t_j), \quad j = 2,\ldots,j_0,$$
$$\vartheta_{(1)}^1(x,0) = u_0(x), \ \vartheta_{(\alpha)}^0(x,0) = u_0(x),$$

где интегралы по времени в (18) аппроксимируются по формуле прямоугольников с порядком точности $O(\tau)$ следующим образом:

$$\int\limits_0^{t_{j+\frac{\alpha}{p}}} \rho_1(t,\tau)\vartheta(x_{l_\alpha}^\alpha, \tau)d\tau = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_0^{t_{j+\frac{\alpha}{p}}} \rho_1(t,\tau)\vartheta_{(\alpha)}(x_{l_\alpha}^\alpha, \tau)d\tau =$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}\int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \rho_1(t_{\frac{j}{p}}, \tau)\vartheta_{(\alpha)}(x_{l_\alpha}^\alpha, \tau)d\tau = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha} \rho_1(t_{\frac{j}{p}}, t_{\frac{s}{p}})\vartheta_{(\alpha)}(x_{l_\alpha}^\alpha, t_{\frac{s}{p}})\tau + O(\tau) =$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}\, y^{\frac{s}{p}}(x_{N_\alpha}, t_{\frac{s}{p}})\tau,$$

$$\int\limits_0^{t_{j+\frac{\alpha}{p}}} \rho_2(t,\tau)\vartheta(x_0^\alpha, \tau)d\tau = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_0^{t_{j+\frac{\alpha}{p}}} \rho_2(t,\tau)\vartheta_{(\alpha)}(x_0^\alpha, \tau)d\tau =$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}\int\limits_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \rho_2(t_{\frac{j}{p}}, \tau)\vartheta_{(\alpha)}(x_0^\alpha, \tau)d\tau = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha} \rho_2(t_{\frac{j}{p}}, t_{\frac{s}{p}})\vartheta_{(\alpha)}(x_0^\alpha, t_{\frac{s}{p}})\tau + O(\tau) =$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{2,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}\, y^{\frac{s}{p}}(x_0, t_{\frac{s}{p}})\tau,$$

где $p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}=\rho_1(t_{\frac{j}{p}},t_{\frac{s}{p}}),\ p_{2,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}=\rho_2(t_{\frac{j}{p}},t_{\frac{s}{p}})$.

Аналогично [26, с. 401] получим для уравнения (17) номера α монотонную схему второго порядка аппроксимации по h_α. Для этого рассмотрим уравнение (17) номера α с возмущенным оператором $\widetilde{L}_\alpha$

$$\frac{1}{p}\frac{\partial\vartheta_{(\alpha)}}{\partial t}=\widetilde{L}_\alpha\vartheta_{(\alpha)}+f_\alpha,\quad t\in\Delta_\alpha, \tag{19}$$

где

$$\tilde{L}_\alpha\vartheta_{(\alpha)}=\varkappa_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial\vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha}\right)+r_\alpha(x,t)\frac{\partial\vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha}-q_\alpha(x,t)\vartheta_{(\alpha)},$$

$$\varkappa_\alpha=\frac{1}{1+R_\alpha},\quad R_\alpha=\frac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha}\text{ — разностное число Рейнольдса,}$$

$$r_\alpha=r_\alpha^++r_\alpha^-,\ r_\alpha^+=0.5(r_\alpha+|r_\alpha|)\geqslant 0,\ r_\alpha^-=0.5(r_\alpha-|r_\alpha|)\leqslant 0,\ b_\alpha^+=\frac{r_\alpha^+}{k_\alpha},\ b_\alpha^-=\frac{r_\alpha^-}{k_\alpha},$$

$$a_\alpha^{(1_\alpha)}=a_{\alpha,i_\alpha+1},\quad a_\alpha=k_\alpha\left(x^{(-0.5\alpha)},\bar{t}\right),$$

$$x^{(-0.5\alpha)}=(x_1,...,x_{\alpha-1},x_\alpha-0.5h_\alpha,x_{\alpha+1},\dots,x_p),$$

$$r_\alpha=r_\alpha(x,\bar{t}),\quad d_\alpha=q_\alpha(x,\bar{t}),\quad \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=f_\alpha(x,\bar{t}),\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_p),\quad \bar{t}=t_{j+\frac{1}{2}}.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (19) номера α неявной схемой на полуинтервале $\left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}},t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$, тогда получим цепочку из p одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}}-y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}=\tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}+\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{20}$$

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y=\varkappa_\alpha\Big(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)_{x_\alpha}+b^+{}_\alpha a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}+b^-{}_\alpha a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}.$$

К уравнению (20) надо присоединить граничные и начальное условия. Запишем разностный аналог для граничных условий (18):

$$\begin{cases}a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\beta_{+\alpha}\,y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{p}\sum\limits_{s=0}^{pj+\alpha}p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau-\mu_{-\alpha},\\ -a_\alpha^{(N_\alpha)}y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\beta_{-\alpha}\,y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{p}\sum\limits_{s=0}^{pj+\alpha}p_{2,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_0^{\frac{s}{p}}\tau-\mu_{+\alpha}.\end{cases} \tag{21}$$

Условия (21) имеют порядок аппроксимации $O(h_\alpha)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_\alpha^2)$ на решениях уравнения (17) при каком-либо α:

$$a_\alpha^{(1_\alpha)}\vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\beta_{+\alpha}\vartheta_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}\vartheta_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau-\mu_{-\alpha}+O(h_\alpha),$$

$$a_\alpha^{(1_\alpha)}=k_{1/2}^{(\alpha)}=k_0+k_0'\frac{h_\alpha}{2}+k_0''\frac{h_\alpha^2}{8}+O(h_\alpha^3),$$

$$\frac{\vartheta_{(\alpha)}^1-\vartheta_{(\alpha)}^0}{h_\alpha}=\vartheta_{(\alpha)x_\alpha,0}=\vartheta_{(\alpha)}'+\vartheta_{(\alpha)}''\frac{h_\alpha}{2}+O(h_\alpha^2),$$

$$a_\alpha^{(1_\alpha)}\vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}=k^{(\alpha)}\vartheta_{(\alpha),0}'+(k^{(\alpha)}\vartheta_{(\alpha)}')'\frac{h_\alpha}{2}+O(h_\alpha^2),$$

$$k^{(\alpha)}\vartheta'_{(\alpha),0} = a_\alpha^{(1_\alpha)}\vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha\Big(k^{(\alpha)}\vartheta'_{(\alpha)}\Big)' + O(h_\alpha^2) =$$

$$= a_\alpha^{(1_\alpha)}\vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha\Big(\frac{1}{p}\frac{\partial\vartheta^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial t} - r_\alpha\frac{\partial\vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} + q_\alpha\vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha\Big) + O(h_\alpha^2).$$

Итак,

$$\begin{gathered}a_\alpha^{(1_\alpha)}\vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha\Big(\frac{1}{p}\vartheta_{\bar t}^{j+\frac{\alpha}{p}} - r_\alpha\frac{\partial\vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} + q_\alpha\vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha\Big) = \\ = \beta_{+\alpha}\vartheta_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}\vartheta_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau - \mu_{-\alpha} + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha\tau).\end{gathered} \tag{22}$$

В (22) отбросим величины порядка малости $O(h_\alpha^2)$ и $O(h_\alpha\tau)$, заменим $\vartheta_{(\alpha)}$ на $y_{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$, тогда (22) перепишется:

$$\Big(a_\alpha^{(1_\alpha)} + 0.5h_\alpha r_\alpha^{(0)}\Big)y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} =$$

$$= 0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau - \mu_{-\alpha} - 0.5h_\alpha f_{\alpha,0}, \quad x_\alpha = 0,$$

или

$$0.5h_\alpha\frac{y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - y_0^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \varkappa_{-\alpha}a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} -$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau + \overline{\mu}_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0,$$

$$0.5h_\alpha\frac{y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = -\varkappa_{+\alpha}a_\alpha^{(N_\alpha)}y_{\bar x_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha d_\alpha^{(N_\alpha)}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} -$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{2,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_0^{\frac{s}{p}}\tau + \overline{\mu}_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha,$$

где

$$\overline{\mu}_{-\alpha} = \mu_{-\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0}, \quad \overline{\mu}_{+\alpha} = \mu_{+\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,N_\alpha}, \quad \mu_{\pm\alpha} = \mu_{\pm\alpha}(t_j),$$

$$\varkappa_{-\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{0.5h_\alpha|r_\alpha^{(0)}|}{k_\alpha^{(0.5)}}},\ r_\alpha^{(0)} \leqslant 0, \quad \varkappa_{+\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{0.5h_\alpha|r_\alpha^{(N_\alpha)}|}{k_\alpha^{(N_\alpha-0.5)}}},\ r_\alpha^{(N_\alpha)} \geqslant 0.$$

Таким образом получаем цепочку из p одномерных разностных схем

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \tilde\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \tag{23}$$

$$\begin{cases}0.5h_\alpha\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda^-{}_\alpha y^{(\alpha)} + \overline{\mu}_{-\alpha},\ x_\alpha = 0,\\ 0.5h_\alpha\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda^+{}_\alpha y^{(\alpha)} + \overline{\mu}_{+\alpha},\ x_\alpha = l_\alpha,\end{cases}$$

$$y(x, 0) = u_0(x),$$

где

$$\frac{1}{p}y_{\bar t}^{(\alpha)}=\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}}-y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau},$$

$$\tilde\Lambda_\alpha y=\varkappa_\alpha\Big(a_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)_{x_\alpha}+b^+{}_\alpha a_\alpha^{(1\alpha)}y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}+b^-{}_\alpha a_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}.$$

$$\Lambda^-{}_\alpha y^{(\alpha)}=\varkappa_{-\alpha}a_\alpha^{(1\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{(\alpha)}-0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau,\quad x_\alpha=0,$$

$$\Lambda^+{}_\alpha y^{(\alpha)}=-\varkappa_{+\alpha}a_\alpha^{(N_\alpha)}y_{\bar x_\alpha,N_\alpha}^{(\alpha)}-0.5h_\alpha d_\alpha^{(N_\alpha)}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\beta_{-\alpha}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{2,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_0^{\frac{s}{p}}\tau,\ x_\alpha=l_\alpha.$$

Задачу (23) перепишем в операторном виде

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}}-y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}=\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}+\Phi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},\ \alpha=1,2,...,p,\ x\in\overline{\omega}_{h_\alpha},\tag{24}$$

$$y(x,0)=u_0(x),$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}=\begin{cases}\tilde\Lambda_\alpha y^{(\alpha)},\ x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\Lambda^-{}_\alpha y^{(\alpha)},\ x_\alpha=0,\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\Lambda^+{}_\alpha y^{(\alpha)},\ x_\alpha=l_\alpha,\end{cases}\qquad \Phi_\alpha=\begin{cases}\varphi_\alpha,\ x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\overline{\mu}_{-\alpha},\ x_\alpha=0,\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\overline{\mu}_{+\alpha},\ x_\alpha=l_\alpha.\end{cases}$$

3. Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы

Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{j+\frac{\alpha}{p}}=y^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ – решение исходной задачи (1)–(3). Подставляя $y^{j+\frac{\alpha}{p}}=z^{j+\frac{\alpha}{p}}+u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в разностную задачу (23), получим задачу для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$

$$\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}}-z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}=\tilde\Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}}+\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},\tag{25}$$

где $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=\tilde\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}}+\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}$.

Обозначив через

$$\mathring{\psi}_\alpha=\left(L_\alpha u+f_\alpha-\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}$$

и замечая, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\mathring{\psi}_\alpha=0$, если $\sum\limits_{\alpha=1}^{p}f_\alpha=f$, представим погрешность в виде суммы $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=\mathring{\psi}_\alpha+\psi_\alpha^*$:

$$\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=\tilde\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}}+\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}+\mathring{\psi}_\alpha-\mathring{\psi}_\alpha=\left(\tilde\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}}-L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}}\right)+$$
$$+\left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}-f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}\right)+\mathring{\psi}_\alpha=\mathring{\psi}_\alpha+\psi_\alpha^*.$$

Очевидно, что

$$\psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad \mathring{\psi}_\alpha = O(1), \quad \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^* = O(|h|^2 + \tau).$$

Запишем граничное условие $x_\alpha = 0$ в виде

$$\begin{gathered} 0.5h_\alpha \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \\ - \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{1}{p} \sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}} y_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}} \tau + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}. \end{gathered} \tag{26}$$

Пусть $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где u — решение исходной дифференциальной задачи (1)–(3). Подставим $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в (26). Тогда получим

$$\begin{gathered} 0.5h_\alpha \frac{z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - z_0^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1_\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \\ - \frac{1}{p} \sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}} z_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}} \tau + \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1_\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{+\alpha} u_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \\ - \frac{1}{p} \sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}} u_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}} \tau - 0.5h_\alpha \frac{u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - u_0^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}. \end{gathered}$$

К правой части полученного выражения добавим и вычтем одно и тоже слагаемое

$$0.5h_\alpha \mathring{\psi}_\alpha = 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Big(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \Big) + r_\alpha(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x_\alpha = 0}^{j+1/2}.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \psi_{-\alpha} = 0.5h_\alpha \left(f_\alpha - \frac{u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - u_0^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} \right) + \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1_\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{+\alpha} u_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \\ - \frac{1}{p} \sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}} u_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}} \tau - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \mu_{-\alpha} - \\ - 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x_\alpha = 0}^{j+1/2} + 0.5h_\alpha \mathring{\psi}_\alpha = \\ = 0.5h_\alpha \left(f_\alpha - \frac{u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - u_0^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} \right) + a_\alpha^{(1_\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} + 0.5h_\alpha r_\alpha^{(0)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{+\alpha} u_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \\ - \frac{1}{p} \sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}} u_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}} \tau - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \mu_{-\alpha} - 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Big(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \Big) \right]^{j+\frac{1}{2}} - \end{gathered}$$

$$
-0.5h_\alpha\Big(f_{\alpha,0}-\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^{j+\frac{1}{2}}+0.5h_\alpha q_{\alpha,0}u_0^{j+\frac{1}{2}}-0.5h_\alpha r_\alpha^{(0)}u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{1}{2}}+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+O(h_\alpha\tau)=
$$

$$
=a_\alpha^{(1_\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\beta_{+\alpha}u_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}u_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau+\mu_{-\alpha}-
$$

$$
-0.5h_\alpha\Big[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)\Big]^{j+\frac{1}{2}}+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau)=
$$

$$
=k_\alpha\frac{\partial u^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial x_\alpha}+0.5h_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-\beta_{+\alpha}u_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}u_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau-
$$

$$
-0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)\right]^{j+\frac{1}{2}}+\mu_{-\alpha}+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau)=
$$

$$
=\left(k_\alpha\frac{\partial u^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial x_\alpha}-\beta_{+\alpha}u_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}u_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau+\mu_{-\alpha}\right)_{x_\alpha=0}+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau).
$$

В силу действия граничных условий (2) выражение, стоящее в скобках, есть ноль. Поэтому

$$
\psi_{-\alpha}=0.5h_\alpha\mathring{\psi}_{-\alpha}+\psi^*_{-\alpha},\quad \psi^*_{-\alpha}=O(h_\alpha^2+\tau)+O(h_\alpha\tau),
$$

и тогда

$$
\frac{0.5h_\alpha}{p}z_{t,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\varkappa_{-\alpha}a_\alpha^{(1_\alpha)}z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-\beta_{+\alpha}z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}z_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau+
$$

$$
+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_{-\alpha}+\psi^*_{-\alpha},
$$

$$
\frac{0.5h_\alpha}{p}z_{\bar{t},N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}=-\varkappa_{+\alpha}a_\alpha^{(N_\alpha)}z_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha d_\alpha^{(N_\alpha)}z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\beta_{-\alpha}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{2,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}z_0^{\frac{s}{p}}\tau+
$$

$$
+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_{+\alpha}+\psi^*_{+\alpha}.
$$

Итак, задачу для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ запишем в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}}-z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}=\tilde{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)}+\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},\\
0.5h_\alpha\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}}-z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}=\Lambda^-{}_\alpha z^{(\alpha)}+\psi_{-\alpha},\quad x_\alpha=0,\\
0.5h_\alpha\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}}-z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}=\Lambda^+{}_\alpha z^{(\alpha)}+\psi_{+\alpha},\quad x_\alpha=l_\alpha,\\
z(x,0)=0,
\end{gathered}
\tag{27}
$$

где

$$
\psi_\alpha=\mathring{\psi}_\alpha+\psi^*_\alpha,\quad \mathring{\psi}_\alpha=O(1),\quad \psi^*_\alpha=O(h_\alpha^2+\tau),\quad \psi_{-\alpha}=0.5h_\alpha\mathring{\psi}_{-\alpha}+\psi^*_{-\alpha},
$$

$$
\psi_{+\alpha}=0.5h_\alpha\mathring{\psi}_{+\alpha}+\psi^*_{+\alpha},\quad \psi_{\pm\alpha}=O(h_\alpha^2+\tau),\ \mathring{\psi}_{\pm\alpha}=O(1),\quad \sum_{\alpha=1}^{p}\mathring{\psi}_{\pm\alpha}=0.
$$

4. Устойчивость локально-одномерной схемы

Умножим уравнение (24) скалярно на $y^{(\alpha)}=y^{j+\frac{\alpha}{p}}$

$$\left[\frac{1}{p}y_{\bar t}^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]_\alpha-\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]_\alpha=\left[\Phi^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]_\alpha, \tag{28}$$

где

$$\left[u,v\right]=\sum_{x\in\bar\omega_h}uvH,\quad H=\prod_{\alpha=1}^{p}\hbar_\alpha,\quad \left[u,v\right]_\alpha=\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha}u_{i_\alpha}v_{i_\alpha}\hbar_\alpha,\quad \left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)}=\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha}y^2\hbar_\alpha,$$

$$\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}=\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)}H/\hbar_\alpha,\quad \hbar_\alpha=\begin{cases}h_\alpha,\ i_\alpha=1,2,...,N_\alpha-1,\\ \frac{h_\alpha}{2},\quad i_\alpha=0,N_\alpha,\end{cases}$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (28)

$$\left[\frac{1}{p}y_{\bar t}^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]_\alpha=\frac{1}{2p}\left(\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)}\right)_{\bar t}+\frac{\tau}{2p}\left\|y_{\bar t}\right\|^2_{L_2(\alpha)}, \tag{29}$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$ означает, что норма берется по переменной x_α при фиксированных значениях остальных переменных.

$$\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]_\alpha=\left(\tilde\Lambda_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right)_\alpha+\Lambda_\alpha^-y^{(\alpha)}y_0^{(\alpha)}+\Lambda_\alpha^+y^{(\alpha)}y_{N_\alpha}^{(\alpha)}=$$
$$=\left(\varkappa_\alpha\left(a_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\right)_{x_\alpha},y^{(\alpha)}\right)_\alpha+\left(b_\alpha^+a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha}^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right)_\alpha+\left(b_\alpha^-a_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right)_\alpha-\left(d_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right)_\alpha+$$
$$+\left(\varkappa_{-\alpha}a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{(\alpha)}-0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)}y_0^\alpha-\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^\alpha-\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau\right)y_0^{(\alpha)}-$$
$$-\left(\varkappa_{+\alpha}a_\alpha^{(N_\alpha)}y_{\bar x_\alpha,N_\alpha}^{(\alpha)}+0.5h_\alpha d_\alpha^{(N_\alpha)}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\beta_{-\alpha}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{2,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_0^{\frac{s}{p}}\tau\right)y_{N_\alpha}^{(\alpha)}. \tag{30}$$

Используя первую разностную формулу Грина [26, с. 99], выражение (30) перепишем в виде

$$\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]_\alpha=-\left(\varkappa^{-1}a_\alpha,y_{\bar x_\alpha}^2\right]_\alpha+\left(b_\alpha^+a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha}^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right)_\alpha+\left(b_\alpha^-a_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right)_\alpha-$$
$$-\left(d_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right)_\alpha-0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)}y_0^2-\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}y_0-y_0\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_{N_\alpha}^{\frac{s}{p}}\tau-$$
$$-\left(a_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{(\alpha)},\varkappa_{\bar x}y^{(\alpha)}\right]_\alpha-0.5h_\alpha d_\alpha^{(N_\alpha)}y_{N_\alpha}^2-\beta_{-\alpha}y_0y_{N_\alpha}-y_{N_\alpha}\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{pj+\alpha}p_{2,\frac{j}{p},\frac{s}{p}}y_0^{\frac{s}{p}}\tau, \tag{31}$$

$$\left[\Phi^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]_\alpha=\left(\varphi^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right)_\alpha+\overline{\mu}_{-\alpha}y_0^{(\alpha)}\hbar_\alpha+\overline{\mu}_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\hbar_\alpha=$$
$$=\left(\varphi^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right)_\alpha+\left(\mu_{-\alpha}+0.5h_\alpha f_{\alpha,0}\right)_\alpha y_0^{(\alpha)}\hbar_\alpha+\left(\mu_{+\alpha}+0.5h_\alpha f_{\alpha,N_\alpha}\right)y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\hbar_\alpha=$$
$$=\left[\varphi^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]_\alpha+\mu_{-\alpha}y_0^{(\alpha)}+\mu_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{(\alpha)}. \tag{32}$$

С помощью леммы 1 из [27] находим оценки для слагаемых, входящих в правую часть (31)

$$-\Big(\varkappa^{-1}a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\Big]_\alpha \leqslant - M_1 \, \| y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)},$$

$$-\Big(a_\alpha y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\alpha)}\Big]_\alpha + \Big(b^+_\alpha a^{(1_\alpha)}_\alpha y_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha + \Big(b^-_\alpha a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha \leqslant$$

$$\leqslant M_1\Big(\varepsilon \, \| y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon) \| y^{(\alpha)} \|^2_{L_2(\alpha)}\Big),$$

$$-\Big(d, (y^{(\alpha)})^2\Big)_\alpha \leqslant c_2 \| y^{(\alpha)} \|^2_{L_2(\alpha)},$$

$$-0.5 h_\alpha d^{(0)}_\alpha y_0^2 - \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha} y_0 - 0.5 h_\alpha d^{(N_\alpha)}_\alpha y^2_{N_\alpha} - \beta_{-\alpha} y_0 y_{N_\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant M_2\Big(y_0^2 + y_N^2\Big) \leqslant M_2\Big(\varepsilon \| y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon) \| y \|^2_{L_2(\alpha)}\Big),$$

$$-y_0 \frac{1}{p} \sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}} y^{\frac{s}{p}}_{N_\alpha} \tau - y_{N_\alpha} \frac{1}{p} \sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{2,\frac{j}{p},\frac{s}{p}} y^{\frac{s}{p}}_0 \tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(y_0^2 + y^2_{N_\alpha}\right) + \frac{1}{2p^2}\left(\sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{1,\frac{j}{p},\frac{s}{p}} y^{\frac{s}{p}}_{N_\alpha} \tau\right)^2 + \frac{1}{2p^2}\left(\sum_{s=0}^{pj+\alpha} p_{2,\frac{j}{p},\frac{s}{p}} y^{\frac{s}{p}}_0 \tau\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant M_3\Big(\varepsilon \, \| y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon) \| y \|^2_{L_2(\alpha)}\Big) + M_4 \sum_{s=0}^{pj+\alpha} \left(\varepsilon_2 \left\| y^{\frac{s}{p}}_{\bar{x}_\alpha} \right]\Big|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon_2) \left\| y^{\frac{s}{p}} \right\|^2_{L_2(\alpha)}\right)\tau,$$

$$\Big[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha \leqslant \frac{1}{2} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{1}{2} \left\| y^{(\alpha)} \right\|^2_{L_2(\alpha)},$$

$$\mu_{-\alpha} y^{(\alpha)}_0 + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}_{N_\alpha} \leqslant \frac{\mu^2_{-\alpha}}{2} + \frac{\mu^2_{+\alpha}}{2} + \frac{1}{2}\left[\Big(y^{(\alpha)}_0\Big)^2 + \Big(y^{(\alpha)}_{N_\alpha}\Big)^2\right] \leqslant \frac{1}{2}\Big(\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha}\Big) +$$

$$+\varepsilon \left\| y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha} \right]\Big|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon) \left\| y^{(\alpha)} \right\|^2_{L_2(\alpha)},$$

где $\varepsilon > 0,\ c(\varepsilon) = \frac{1}{l_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}$.

Подставляя полученные оценки после суммирования по $i_\beta \neq i_\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p$ в тождество (28), находим

$$\frac{1}{2p}\left(\left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)_{\bar{t}} + M_1 \left\| y_{\bar{x}_\alpha} \right]\Big|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \leqslant \varepsilon M_5 \left\| y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha} \right]\Big|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} +$$

$$+M_6(\varepsilon) \left\| y^{(\alpha)} \right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + M_4 \sum_{s=0}^{pj+\alpha} \left(\varepsilon_2 \left\| y^{\frac{s}{p}}_{\bar{x}_\alpha} \right]\Big|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + c(\varepsilon_2) \left\| y^{\frac{s}{p}} \right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)\tau + \tag{33}$$

$$+\frac{1}{2} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \frac{1}{2} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \Big(\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha}\Big) H / \hbar_\alpha.$$

Преобразуем третье слагаемое в правой части (3), тогда

$$\sum_{s=0}^{pj+\alpha} \left(\varepsilon_2 \left\| y^{\frac{s}{p}}_{\bar{x}_\alpha} \right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + c(\varepsilon_2) \left\| y^{\frac{s}{p}} \right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right) \tau \leqslant$$

$$\leqslant M_7 \left\|y^0\right\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)} + \sum_{s=0}^{j}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\varepsilon_2 \left\|y_{\bar x_\alpha}^{s+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + c(\varepsilon_2)\left\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau.$$

Учитывая последнее и выбирая $\varepsilon \leqslant \frac{M_1}{2M_5}$, из (33) получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2p}\left(\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)_{\bar t} + \frac{M_1}{2}\left\|y_{\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \leqslant \\ \leqslant M_8\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + M_4\sum_{s=0}^{j}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\varepsilon_2\left\|y_{\bar x_\alpha}^{s+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + c(\varepsilon_2)\left\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau + \\ + \frac{1}{2}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \frac{1}{2}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j) + \mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)\frac{H}{\hbar_\alpha} + M_7\left\|y^0\right\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}.\end{gathered}\tag{34}$$

Просуммируем (34) сначала по $\alpha=1,2,...,p$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2p}\left(\left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)_{\bar t} + \frac{M_1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \leqslant \\ \leqslant M_8\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \\ + pM_4\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j}\left(\varepsilon_2\left\|y_{\bar x_\alpha}^{s+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + c(\varepsilon_2)\left\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha + pM_7\left\|y^0\right\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)},\end{gathered}\tag{35}$$

а затем, умножая обе части (35) на 2τ и суммируя по j' от 0 до j, получаем

$$\begin{gathered}\left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant M_9\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \\ + M_{10}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\left(\varepsilon_2\left\|y_{\bar x_\alpha}^{s+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + c(\varepsilon_2)\left\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau + \\ + M_{11}\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \left\|y^0\right\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)} + \right. \\ \left. + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'}) + \mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\right)H/\hbar_\alpha\right).\end{gathered}\tag{36}$$

Оценим второе выражение в правой части (36), тогда получим

$$\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\left(\varepsilon_2\left\|y_{\bar x_\alpha}^{s+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + c(\varepsilon_2)\left\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_2 \sum_{j'=0}^{j} \sum_{s=0}^{j'} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{s+\frac{\alpha}{p}} \right]\!\Big|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \tau + c(\varepsilon_2) \sum_{j'=0}^{j} \sum_{s=0}^{j'} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| y^{s+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_2 T \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right]\!\Big|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c(\varepsilon_2) T \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| y^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2.$$

Выбирая $\varepsilon_2 = \frac{1}{2TM_{10}}$, из (36) получаем

$$\left\| y^{j+1} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right]\!\Big|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leqslant M_{12} \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| y^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + M_{13} F^j, \quad (37)$$

$$F^j = \left\| y^0 \right\|_{W_2^1(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| \varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \Big(\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j) \Big) H/\hbar_\alpha.$$

Покажем, что выполняется неравенство

$$\max_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leqslant \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} \left\| y^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \nu_2 F^j,$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

Перепишем неравенство (34) в виде

$$\begin{gathered} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + M_1 \tau \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} \right]\!\Big|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leqslant \left\| y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + 2M_8 \tau \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ + 2M_4 \tau \sum_{s=0}^{j} \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\varepsilon \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{s+\frac{\alpha}{p}} \right]\!\Big|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c(\varepsilon) \left\| y^{s+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right) \tau + \\ + M_{14} \left(\left\| \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} \tau + \tau \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \Big(\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j) \Big) \frac{H}{\hbar_\alpha} + \left\| y^0 \right\|_{W_2^1(\bar{\omega}_h)}^2 \right). \end{gathered} \quad (38)$$

Просуммируем (38) по α' от 1 до α, тогда получим

$$\begin{gathered} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + M_1 \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \tau \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha'}{p}} \right]\!\Big|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leqslant \left\| y^j \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + 2\tau M_8 \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \left\| y^{j+\frac{\alpha'}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ + 2pM_4 \tau \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \sum_{s=0}^{j} \left(\varepsilon_2 \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{s+\frac{\alpha'}{p}} \right]\!\Big|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c(\varepsilon_2) \left\| y^{s+\frac{\alpha'}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right) \tau + M_{14} \left(\tau \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \left\| \varphi^{j+\frac{\alpha'}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \right. \\ \left. + \tau \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \Big(\mu_{-\alpha'}^2(t_j) + \mu_{+\alpha'}^2(t_j) \Big) \frac{H}{\hbar_\alpha} + \left\| y^0 \right\|_{W_2^1(\bar{\omega}_h)}^2 \right) \leqslant \left\| y^j \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ + 2\tau M_8 \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + 2M_4 \sum_{j'=0}^{j} \left(\sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \tau \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha'}{p}} \right]\!\Big|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| y^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right) \tau + \end{gathered}$$

$$+M_{14}\left(\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)\frac{H}{\hbar_\alpha}+\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}\right). \quad (39)$$

Не нарушая общности, считаем, что

$$\max_{1\leqslant\alpha'\leqslant p}\left\|y^{j+\frac{\alpha'}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}=\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)},$$

в противном случае (38) будем суммировать до такого α, при котором $\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}$ достигает максимального значения при фиксированном j. Тогда (39) перепишем в виде

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+M_1\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\tau\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j+\frac{\alpha'}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant\|y^j\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+2p\tau M_8\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$
$$+2M_4\sum_{j'=0}^{j}\left(\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\tau\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha'}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau+ \quad (40)$$
$$+M_{14}\left(\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)\frac{H}{\hbar_\alpha}+\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}\right)$$

и преобразуем (40)

$$(1-2p\tau M_8)\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+M_1\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\tau\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j+\frac{\alpha'}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant\|y^j\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$
$$+2M_4\sum_{j'=0}^{j}\left(\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\tau\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha'}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau+ \quad (41)$$
$$+M_{14}\left(\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)\frac{H}{\hbar_\alpha}+\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}\right).$$

Выбирая $\tau\leqslant\tau_0=\frac{1}{4M_8}$, из (41) получаем неравенство

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\tau\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j+\frac{\alpha'}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant$$
$$\leqslant M_{15}\sum_{j'=0}^{j}\left(\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\tau\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha'}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau+M_{16}\bar F^j, \quad (42)$$

где

$$\bar{F}^j = \left\|y^j\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \left(\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta \neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)\frac{H}{\hbar_\alpha} + \left\|y^0\right\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_h)}\right).$$

На основании Леммы 4 [28, стр. 171] из (42) получаем априорную оценку

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \leqslant M_{17}\left\|y^j\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} +$$
$$+M_{18}\left(\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta \neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)\frac{H}{\hbar_\alpha} + \left\|y^0\right\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_h)}\right). \tag{43}$$

Так как из (37) следует, что

$$\left\|y^j\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \leqslant M_{19}\sum_{j'=0}^{j-1}\tau\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + M_{20}F^{j-1}, \tag{44}$$

то из (43) получаем

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \leqslant \nu_1\sum_{j'=0}^{j-1}\tau\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} + \nu_2 F^j.$$

Введя обозначение $\mathrm{g}_{j+1} = \max\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}$, последнее соотношение можно переписать в виде

$$\mathrm{g}_{j+1} \leqslant \nu_1\sum_{k=1}^{j}\tau \mathrm{g}_k + \nu_2 F^j, \tag{45}$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

Применяя к (45) Лемму 4 [28, стр. 171], из (37) получаем априорную оценку

$$\left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha}\right]\Bigg|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \leqslant M\left[\left\|y^0\right\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} +\right.$$
$$\left.+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta \neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(0,x',t_{j'}) + \mu^2_{+\alpha}(l_\alpha,x',t_{j'})\right)H/\hbar_\alpha\right]. \tag{46}$$

где $M = const > 0$ — не зависит от h_α и τ, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p)$.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4), *тогда локально-одномерная схема* (23) *устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения схемы* (23) *при* $\tau \leqslant \tau_0$ *справедлива оценка* (46).

5. Сходимость локально-одномерной схемы

По аналогии с [26, с. 528] представим решение задачи (27) в виде суммы $z_{(\alpha)} = \upsilon_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \mathring{\psi}_\alpha, \quad x \in \omega_{h_\alpha} + \gamma_{h,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$
$$\eta(x,0) = 0, \quad \mathring{\psi}_\alpha = \begin{cases} \mathring{\psi}_\alpha, \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \mathring{\psi}_{-\alpha}, \ x_\alpha = 0, \\ \mathring{\psi}_{+\alpha}, \ x_\alpha = l_\alpha. \end{cases} \tag{47}$$

Из (47) следует $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau\left(\mathring{\psi}_1 + \mathring{\psi}_2 + \ldots + \mathring{\psi}_p\right) = \eta^j = \ldots = \eta^0 = 0$, так как $\eta^0 = 0$. Для $\eta_{(\alpha)}$ имеем $\eta_{(\alpha)} = \tau\left(\mathring{\psi}_1 + \mathring{\psi}_2 + \ldots + \mathring{\psi}_\alpha\right) = -\tau\left(\mathring{\psi}_{\alpha+1} + \ldots + \mathring{\psi}_p\right) = O(\tau)$.

Функция $\upsilon_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha \upsilon_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_\alpha, \ \tilde{\psi}_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha \eta_{(\alpha)} + \psi^*_\alpha, \quad x \in \omega_{h_\alpha}, \tag{48}$$

$$0.5h_\alpha \frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda^-_\alpha \upsilon_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_{-\alpha}, \ \tilde{\psi}_{-\alpha} = \Lambda^-_\alpha \eta_{(\alpha)} + \psi^*_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \tag{49}$$

$$0.5h_\alpha \frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda^+_\alpha \upsilon_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_{+\alpha}, \ \tilde{\psi}_{+\alpha} = \Lambda^+_\alpha \eta_{(\alpha)} + \psi^*_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \tag{50}$$

$$\upsilon(x,0) = 0. \tag{51}$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^3 k_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^2 k_\alpha}{\partial x_\alpha \partial t}, \frac{\partial^2 r_\alpha}{\partial x_\beta^2}, \frac{\partial r_\alpha}{\partial t}, \frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial x_\beta^2}, \frac{\partial q_\alpha}{\partial t}, \frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2}, \frac{\partial f}{\partial t},$$

$s = 1,2,\ 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p,\ \alpha \neq \beta$, то

$$\Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\tau \Lambda_\alpha \left(\mathring{\psi}_{\alpha+1} + \ldots + \mathring{\psi}_p\right) = O(\tau), \ \Lambda^\pm_\alpha \eta_{(\alpha)} = O(\tau).$$

Решение задачи (48)–(51) оценим с помощью Теоремы 1:

$$\left\|\upsilon^{j+1}\right\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\|\upsilon_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant M\left[\sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\|\tilde{\psi}_\alpha^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\tilde{\psi}^2_{-\alpha}(0, x', t_{j'}) + \tilde{\psi}^2_{+\alpha}(l_\alpha, x', t_{j'})\right) H/\hbar_\alpha\right]. \tag{52}$$

Так как $\eta^j = 0$, $\eta_{(\alpha)} = O(\tau)$, $\|z^j\| \leqslant \|\upsilon^j\|$, то из оценки (52) следует теорема.

Теорема 3. *Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^3 k_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^2 k_\alpha}{\partial x_\alpha \partial t}, \frac{\partial^2 r_\alpha}{\partial x_\beta^2}, \frac{\partial r_\alpha}{\partial t}, \frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial x_\beta^2}, \frac{\partial q_\alpha}{\partial t}, \frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2}, \frac{\partial f}{\partial t},$$

$s=1,2,\ 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant p\,,\ \alpha\neq\beta$, и выполнены условия (4), тогда локально-одномерная схема (23) сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью $O(|h|^2+\tau)$, так что при достаточно малом τ имеет место оценка

$$\left\|y^{j+1}-u^{j+1}\right\|_1\leqslant M\Big(|h|^2+\tau\Big),\quad 0<\tau\leqslant\tau_0,$$

где

$$\left\|z^{j+1}\right\|_1=\left(\left\|z^{j+1}\right\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\sum_{j\,'\,=\,0}^{j}\tau\sum_{\alpha\,=\,1}^{p}\left\|z_{\bar{x}_\alpha}^{j\,'+\frac{\alpha}{p}}\right]\Bigg|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\right)^{1/2},\quad |h|^2=h_1^2+h_2^2+...+h_p^2\,.$$

6. Алгоритм численного решения нелокальной краевой задачи

Перепишем нелокальную краевую задачу (1)–(3) при $0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\ \alpha=1,2,\ p=2$, тогда получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+r_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\\+r_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}-q_1(x_1,x_2,t)u-q_2(x_1,x_2,t)u+f(x_1,x_2,t),\end{gathered}\tag{53}$$

$$k_\alpha(x_0^\alpha,t)u_{x_\alpha}(x_0^\alpha,t)=\beta_{+\alpha}(x_{l_\alpha}^\alpha,t)u(x_{l_\alpha}^\alpha,t)+\int_0^t\rho_1(t,\tau)u(x_{l_\alpha}^\alpha,\tau)d\tau-\mu_{-\alpha}(x_0^\alpha,t),\tag{54}$$

$$-k_\alpha(x_{l_\alpha}^\alpha,t)u_{x_\alpha}(x_{l_\alpha}^\alpha,t)=\beta_{-\alpha}(x_0^\alpha,t)u(x_0^\alpha,t)+\int_0^t\rho_2(t,\tau)u(x_0^\alpha,\tau)d\tau-\mu_{+\alpha}(x_{l_\alpha}^\alpha,t),\tag{55}$$

$$u(x_1,x_2,0)=u_0(x_1,x_2).\tag{56}$$

Рассмотрим сетку $x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\alpha=1,2,t_j=j\tau$, где $i_\alpha=0,1,\ldots,N_\alpha,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha$, $j=0,1,\dot{;}m,\ \tau=T/m$. Вводится один дробный шаг $t_{j+\frac{1}{2}}=t_j+0.5\tau$. Обозначим через $y_{i_1,i_2}^{j+\frac{k}{2}}=y^{j+\frac{k}{2}}=y(i_1h_1,i_2h_2,(j+0.5k)\tau),\ k=0,1,\ \ j=0,1,2,\ldots,j_0$ сеточную функцию.

Напишем локально-одномерную схему

$$\begin{cases}\frac{y^{j+\frac{1}{2}}-y^j}{\tau}=\tilde{\Lambda}_1y^{j+\frac{1}{2}}+\varphi_1,\\ \frac{y^{j+1}-y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}=\tilde{\Lambda}_2y^{j+1}+\varphi_2,\end{cases}\tag{57}$$

$$\begin{cases}y_{0,i_2}^{j+\frac{1}{2}}=\varkappa_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}})y_{1,i_2}^{j+\frac{1}{2}}+\widetilde{\varkappa}_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}})y_{N_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}}+\mu_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}}),\\ y_{N_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}}=\varkappa_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}})y_{N_1-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}}+\widetilde{\varkappa}_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}})y_{0,i_2}^{j+\frac{1}{2}}+\mu_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac{1}{2}}),\\ y_{i_1,0}^{j+1}=\varkappa_{21}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,1}^{j+1}+\widetilde{\varkappa}_{21}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,N_2}^{j+1}+\mu_{21}(i_1h_1,t_{j+1}),\\ y_{i_1,N_2}^{j+1}=\varkappa_{22}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,N_2-1}^{j+1}+\widetilde{\varkappa}_{22}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,0}^{j+1}+\mu_{22}(i_1h_1,t_{j+1}),\end{cases}\tag{58}$$

$$y_{i_1,i_2}^0=u_0(i_1h_1,i_2h_2),\tag{59}$$

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}=\varkappa_\alpha\Big(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)_{x_\alpha}+b_\alpha^+a_\alpha^{(+1)}y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}+b_\alpha^-a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}},\ \alpha=1,2,$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2} f(x_1, x_2, t_{j+0.5\alpha}) \quad \text{или} \quad \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = f(x_1, x_2, t_{j+1}).$$

Приведём расчётные формулы для решения задачи (57)–(59).

На первом этапе находим решение $y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1,i_2}$. Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N_2 - 1}$ решается задача

$$A_{1(i_1,i_2)} y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1-1,i_2} - C_{1(i_1,i_2)} y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1,i_2} + B_{1(i_1,i_2)} y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1+1,i_2} = -F^{j+\frac{1}{2}}_{1(i_1,i_2)}, \quad 0 < i_1 < N_1, \tag{60}$$
$$y^{j+\frac{1}{2}}_{0,i_2} = \varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) y^{j+\frac{1}{2}}_{1,i_2} + \widetilde{\varkappa}_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) y^{j+\frac{1}{2}}_{N_1,i_2} + \mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}),$$
$$y^{j+\frac{1}{2}}_{N_1,i_2} = \varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) y^{j+\frac{1}{2}}_{N_1-1,i_2} + \widetilde{\varkappa}_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) y^{j+\frac{1}{2}}_{0,i_2} + \mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}),$$

где

$$A_{1(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_1)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1^2} - \frac{(b_1^-)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1},$$
$$B_{1(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_1)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1^2} + \frac{(b_1^+)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1},$$
$$C_{1(i_1,i_2)} = A_{1(i_1,i_2)} + B_{1(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}(d_1)_{i_1,i_2}, \quad F^{j+\frac{1}{2}}_{1(i_1,i_2)} = \frac{1}{\tau} y^j_{i_1,i_2} + (\varphi_1)_{i_1,i_2},$$
$$\varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{(\varkappa_{-1}a_1)_{1,i_2}}{h_1}}{\frac{(\varkappa_{-1}a_1)_{1,i_2}}{h_1} + 0.5hd_{1,i_2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$
$$\widetilde{\varkappa}_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\beta_{+1,i_2} + \frac{\tau}{2} p_{1,j,j}}{\frac{(\varkappa_{-1}a_1)_{1,i_2}}{h_1} + 0.5hd_{1,i_2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$
$$\mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\bar{\mu}_{-1}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{0.5h_1}{\tau} y^j_0 + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{j-1} p_{1,j,s} y^{s+\frac{1}{2}}_{N_1,i_2}\tau}{\frac{(\varkappa_{-1}a_1)_{1,i_2}}{h_1} + 0.5hd_{1,i_2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$
$$\varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{(\varkappa_{+1}a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}}{\frac{(\varkappa_{+1}a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + 0.5hd_{1,i_2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$
$$\widetilde{\varkappa}_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\beta_{-1,i_2} + \frac{\tau}{2} p_{2,j,j}}{\frac{(\varkappa_{+1}a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + 0.5hd_{1,i_2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$
$$\mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\bar{\mu}_{+1}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{0.5h_1}{\tau} y^j_{N_1} + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{j-1} p_{2,j,s} y^{s+\frac{1}{2}}_{0,i_2}\tau}{\frac{(\varkappa_{+1}a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + 0.5hd_{1,i_2} + \frac{0.5h_1}{\tau}}.$$

На втором этапе находим решение $y^{j+1}_{i_1,i_2}$. Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1 = \overline{1, N_1 - 1}$ решается задача

$$A_{2(i_1,i_2)} y^{j+1}_{i_1,i_2-1} - C_{2(i_1,i_2)} y^{j+1}_{i_1,i_2} + B_{2(i_1,i_2)} y^{j+1}_{i_1,i_2+1} = -F^{j+1}_{2(i_1,i_2)}, \quad 0 < i_2 < N_2, \tag{61}$$
$$y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1,0} = \varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) y^{j+1}_{i_1,1} + \widetilde{\varkappa}_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) y^{j+1}_{i_1,N_2} + \mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}),$$

$$y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \widetilde{\varkappa}_{22}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,0}^{j+1} + \mu_{22}(i_1h_1,t_{j+1}),$$

$$A_{2(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_2)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2^2} - \frac{(b_2^-)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2},$$

$$B_{2(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_2)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2^2} + \frac{(b_2^+)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2},$$

$$C_{2(i_1,i_2)} = A_{2(i_1,i_2)} + B_{2(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}(d_2)_{i_1,i_2}, \quad F_{2(i_1,i_2)}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau}y_{i_1,i_2}^{j} + (\varphi_1)_{i_1,i_2},$$

$$\varkappa_{21}(i_1h_1,t_{j+1}) = \frac{\frac{(\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_2}}{\frac{(\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_1} + 0.5hd_{i_1,2} + \frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\widetilde{\varkappa}_{21}(i_1h_1,t_{j+1}) = \frac{\beta_{i_1,+2} + \frac{\tau}{2}p_{1,j,j}}{\frac{\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_1} + 0.5hd_{i_1,2} + \frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\mu_{21}(i_1h_1,t_{j+1}) = \frac{\bar{\mu}_{-2}(i_1h_1,t_{j+1}) + \frac{0.5h_2}{\tau}y_0^j + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{j-1} p_{1,j,s}y_{i_1,N_2}^{s+1}\tau}{\frac{(\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_2} + 0.5hd_{i_1,2} + \frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\varkappa_{22}(i_1h_1,t_{j+1}) = \frac{\frac{(\varkappa_{+2}a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}}{\frac{(\varkappa_{+2}a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} + 0.5hd_{i_1,2} + \frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\widetilde{\varkappa}_{22}(i_1h_1,t_{j+1}) = \frac{\beta_{i_1,-2} + \frac{\tau}{2}p_{2,j,j}}{\frac{(\varkappa_{+2}a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} + 0.5hd_{i_1,2} + \frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\mu_{22}(i_1h_1,t_{j+1}) = \frac{\bar{\mu}_{+2}(i_1h_1,t_{j+1}) + \frac{0.5h_2}{\tau}y_{N_2}^j + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{j-1} p_{2,j,s}y_{i_1,0}^{s+1}\tau}{\frac{(\varkappa_{+2}a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} + 0.5hd_{i_1,2} + \frac{0.5h_2}{\tau}}.$$

Для решения задач (60), (61) применяется метод окаймления ([29, стр. 187]). С помощью этого метода решение каждой задачи (60), (61) сводится к решению двух систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов, решение каждой из которых находится известным методом прогонки.

Список литературы

[1] А. М. Нахушев, “Уравнения математической биологии”, *М.: Высшая школа*, 1995.

[2] T. Carleman, “Sur la theorie des equations integrates et ses applications”, *Verh. Internat. Math. Kongr.*, **1** (1932), 138–151.

[3] J. R. Canon, “The solution of the heat equation subject to the specification of energy”, *Quart. Appl. Math.*, **21**:2 (1963), 155–160.

[4] Л. А. Камынин, “Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **4**:6 (1964), 1006–1024.

[5] А. Ф. Чудновский, “Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве”, *Сб. трудов АФИ*, **23** (1969), 41–54.

[6] В. А. Стеклов, “Основные задачи математической физики”, *М.: Наука*, 1983.

[7] J. Douglas, H. H. Rachford, “On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**:2 (1956), 421–439.

[8] D. W. Peaceman, H. H. Rachford, “The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations”, *J. Industr. Math. Soc.*, **3**:1 (1955), 28–41.

[9] Н. Н. Яненко, “Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики”, *Новосибирск: Наука*, Сиб. отд-ние, 1967.

[10] А. А. Самарский, “Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **2**:5 (1962), 787–811.

[11] А. А. Самарский, “Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **3**:2 (1963), 266–298.

[12] Г. И. Марчук, “Методы расщепления”, *М.: Наука*, 1988.

[13] Е. Г. Дьяконов, “Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **2**:4 (1962), 549–568.

[14] Н. И. Ионкин, “Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями”, *Дифференц. ур-ния.*, **13**:2 (1977), 294–304.

[15] А. И. Кожанов, “Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера”, *Дифференц. ур-ния.*, **40**:6 (2004), 763–774.

[16] Л. С. Пулькина, “О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения”, *Дифференц. ур-ния.*, **36**:2 (2000), 279–280.

[17] А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина, “О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений”, *Дифференц. ур-ния.*, **426**:9 (2006), 1166–1179.

[18] О. Ю. Данилкина, “Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, **1**:14 (2007), 5–9.

[19] В. А. Водахова, З. Х. Гучаева, “Нелокальная задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Усп. Соврем. Естеств.*, **7** (2014), 90–92.

[20] M. KH. Beshtokov, V. A. Vodakhova, “Nonlocal boundary value problems for a fractional order convection–diffusion equation”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 459–482.

[21] M. KH. Beshtokov, M.Z. Khudalov, “Difference methods of the solution of local and nonlocal boundary value problems for loaded equation of thermal conductivity of fractional order”, *Stability, Control and Differential Games*, Springer Nature, 2020.

[22] А. К. Баззаев, Д. К. Гутнова, М. Х. Шхануков-Лафишев, “Локально-одномерная схема для параболического уравнения с нелокальным условием”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:6 (2012), 1048-1057.

[23] З. В. Бештокова, М. М. Лафишева, М. Х. Шхануков-Лафишев, “Локально-одномерные разностные схемы для параболических уравнений в средах, обладающих памятью”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:9 (2018), 1531–1542.

[24] З. В. Бештокова, “Локально-одномерная разностная схема для решения одной нелокальной краевой задачи для параболического уравнения в многомерной области”, *Дифференц. ур-ния.*, **56**:3 (2020), 366–379.

[25] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

[26] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, М., 1983.

[27] В. Б. Андреев, “О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **8**:6 (1968), 1218-1231.

[28] А. А. Самарский, А. В. Гулин, *Устойчивость разностных схем*, Наука, М., 1973.

[29] Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева, *Вычислительные методы линейной алгебры.*, Физматгиз, М., 1960.

Поступила в редакцию
17 мая 2021 г.

Beshtokova Z. V. Finite-difference methods for solving a nonlocal boundary value problem for a multidimensional parabolic equation with boundary conditions of integral form. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2022. V. 22. No 1. P. 3–27.

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia

ABSTRACT

The article considers a non-local boundary value problem for a multidimensional parabolic equation with integral boundary conditions. To solve the problem, we obtain an a priori estimate in differential form, which implies the uniqueness and stability of the solution with respect to the right-hand side and initial data on the layer in the L_2-norm. For the numerical solution of a nonlocal boundary value problem, a locally one-dimensional (economical) difference scheme by A.A. Samarskii with the order of approximation $O(h^2 + \tau)$, the main idea of which is to reduce the transition from layer to layer to the sequential solution of a number of one-dimensional problems in each of the coordinate directions. Using the method of energy inequalities, a priori estimates are obtained, which imply uniqueness, stability, and convergence of the solution of the locally one-dimensional difference scheme to the solution of the original differential problem in the L_2-norm at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme. An algorithm for the numerical solution is constructed.

Key words: *parabolic equation, nonlocal condition, difference schemes, locally one-dimensional scheme, a priori estimate, stability, convergence, multidimensional problem.*

References

[1] A. M. Nakhushev, “Uravneniia matematicheskoi biologii”, *M.: Vysshaia shkola*, 1995.

[2] T. Carleman, “Sur la theorie des equations integrates et ses applications”, *Verh. Internat. Math. Kongr.*, **1** (1932), 138–151.

[3] J. R. Canon, “The solution of the heat equation subject to the specification of energy”, *Quart. Appl. Math.*, **21**:2 (1963), 155–160.

[4] L. A. Kamynin, “Ob odnoi kraevoi zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviiami”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **4**:6 (1964), 1006–1024.

[5] A. F. Chudnovskii, “Nekotorye korrektivy v postanovke i reshenii zadach teplo- i vlagoperenosa v pochve”, *Sb. trudov AFI*, **23** (1969), 41–54.

[6] V. A. Steklov, “Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki”, *M.: Nauka*, 1983.

[7] J. Douglas, H. H. Rachford, “On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**:2 (1956), 421–439.

[8] D. W. Peaceman, H. H. Rachford, “The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations”, *J. Industr. Math. Soc.*, **3**:1 (1955), 28–41.

[9] N. N. Ianenko, “Metod drobnykh shagov resheniia mnogomernykh zadach matematicheskoi fiziki”, *Novosibirsk: Nauka*, Sib. otd-nie, 1967.

[10] A. A. Samarskii, “Ob odnom ekonomichnom raznostnom metode resheniia mnogomernogo parabolicheskogo uravneniia v proizvol’noi oblasti”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **2**:5 (1962), 787–811.

[11] A. A. Samarskii, “Odnorodnye raznostnye skhemy na neravnomernykh setkakh dlia uravnenii parabolicheskogo tipa”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **3**:2 (1963), 266–298.

[12] G. I. Marchuk, “Metody rasshchepleniia”, *M.: Nauka*, 1988.

[13] E. G. D’iakonov, “Raznostnye skhemy s rasshchepliaiushchimsia operatorom dlia mnogomernykh nestatsionarnykh zadach”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **2**:4 (1962), 549–568.

[14] N. I. Ionkin, “Reshenie odnoi kraevoi zadachi v teorii teploprovodnosti s nelokal’nymi kraevymi usloviiami”, *Differents. ur-niia.*, **13**:2 (1977), 294–304.

[15] A. I. Kozhanov, “Ob odnoi nelokal’noi kraevoi zadache s peremennymi koeffitsientami dlia uravnenii teploprovodnosti i Allera”, *Differents. ur-niia.*, **40**:6 (2004), 763–774.

[16] L. S. Pul’kina, “O razreshimosti v L_2 nelokal’noi zadachi s integral’nymi usloviiami dlia giperbolicheskogo uravneniia”, *Differents. ur-niia.*, **36**:2 (2000), 279–280.

[17] A. I. Kozhanov, L. S. Pul’kina, “O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal’nym granichnym usloviem integral’nogo vida dlia mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii”, *Differents. ur-niia.*, **426**:9 (2006), 1166–1179.

[18] O. Iu. Danilkina, “Ob odnoi nelokal’noi zadache dlia uravneniia teploprovodnosti s integral’nym usloviem”, *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki.*, **1**:14 (2007), 5–9.

[19] V. A. Vodakhova, Z. Kh. Guchaeva, “Nelokal’naia zadacha dlia nagruzhennogo uravneniia tret’ego poriadka s kratnymi kharakteristikami”, *Usp. Sovrem. Estestv.*, **7** (2014), 90–92.

[20] M. KH. Beshtokov, V. A. Vodakhova, “Nonlocal boundary value problems for a fractional order convection–diffusion equation”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 459–482.

[21] M. KH. Beshtokov, M.Z. Khudalov, “Difference methods of the solution of local and nonlocal boundary value problems for loaded equation of thermal conductivity of fractional order”, *Stability, Control and Differential Games*, Springer Nature, 2020.

[22] A. K. Bazzaev, D. K. Gutnova, M. Kh. Shkhanukov-Lafishev, “Lokal’no-odnomernaia skhema dlia parabolicheskogo uravneniia s nelokal’nym usloviem”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **52**:6 (2012), 1048-1057.

[23] Z. V. Beshtokova, M. M. Lafisheva, M. Kh. Shkhanukov-Lafishev, “Lokal’no-odnomernye raznostnye skhemy dlia parabolicheskikh uravnenii v sredakh, obladaiushchikh pamiat’iu”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **58**:9 (2018), 1531–1542.

[24] Z. V. Beshtokova, “Lokal’no-odnomernaia raznostnaia skhema dlia resheniia odnoi nelokal’noi kraevoi zadachi dlia parabolicheskogo uravneniia v mnogomernoi oblasti”, *Differents. ur-niia.*, **56**:3 (2020), 366–379.

[25] O. A. Ladyzhenskaia, *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki*, Nauka, M., 1973.

[26] A. A. Samarskii, *Teoriia raznostnykh skhem*, Nauka, M., 1983.

[27] V. B. Andreev, “O skhodimosti raznostnykh skhem, approksimiruiushchikh vtoruiu i tret’iu kraevye zadachi dlia ellipticheskikh uravnenii”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **8**:6 (1968), 1218-1231.

[28] A. A. Samarskii, A. V. Gulin, *Ustoichivost’ raznostnykh skhem*, Nauka, M., 1973.

[29] D. K. Fadeev, V. N. Fadeeva, *Vychislitel’nye metody lineinoi algebry.*, Fizmatgiz, M., 1960.