

УДК 517.957, 532.5  
MSC2020 35Q79, 76D05

© Д. А. Терешко<sup>1</sup>, А. П. Кудряшов<sup>1</sup>

## Математическое моделирование переноса тепла в биологических жидкостях при лазерной термотерапии кист

В работе предлагается математическая модель переноса тепла струей горячей жидкости, возникающей при лазерной термотерапии кист. Эта модель является полуэмпирической, так как горячая струя задается при помощи источников, полученных на основе анализа экспериментальных данных. С помощью указанной модели проведена серия вычислительных экспериментов, отвечающих различной мощности лазера.

**Ключевые слова:** *уравнения в частных производных, численное моделирование, теплоперенос в жидкости, приложения в медицине.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202311>

При лазерной термокоагуляции кист, биологические жидкости в которых по своим свойствам близки к воде, главную роль играет перенос тепла струей горячей жидкости, образующейся при кипении на торце оптоволокну (см. [1]). При этом конец оптического световода зачерняется сажей либо напылением металла, и оптоволокну является не источником излучения, а нагревателем жидкости. В процессе кипения на торце оптоволокну происходит схлопывание пузырьков и формируются микроструи, которые собираются в одну большую горячую струю, распространяющуюся в холодной окружающей жидкости (см., например, [2]). Именно эта струя отвечает за быстрый перенос тепла от торца световода к границе и нагрев внутренней поверхности кисты до температуры денатурации коллагена (около 60°C).

Для лучшего понимания процесса распространения горячей струи и оценки скорости нагрева границы была построена простая математическая модель для однофазной среды и проведены вычислительные эксперименты. Следует отметить, что перед проведением операции жидкость из кисты частично откачивается, и киста сжимается в узкую область, которую мы моделируем диском (низким цилиндром) с двумя плоскими стенками. Так как толщина диска  $H$  существенно меньше его

---

<sup>1</sup> Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.  
Электронная почта: [ter@iam.dvo.ru](mailto:ter@iam.dvo.ru) (Д. А. Терешко), [alkud1981@mail.ru](mailto:alkud1981@mail.ru) (А. П. Кудряшов).

диаметра, то течение жидкости в такой области для простоты предполагается плоскопараллельным. Двумерные уравнения модели были получены усреднением по толщине трехмерных уравнений Навье–Стокса и уравнения теплопереноса в жидкости. Главная цель исследования заключалась в изучении крупномасштабных течений во всей области без моделирования сложных процессов кипения и коллапса пузырьков на торце оптоволокна, поэтому затопленная струя горячей жидкости в модели задается источниками  $\mathbf{f}_v$  и  $f_T$ , входящими в правые части уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{v} - \beta \mathbf{G}(T - T_0) - \frac{12\nu}{H^2} \mathbf{v} + \mathbf{f}_v, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \frac{\lambda}{\rho c_p} \Delta T - \frac{2\alpha}{\rho c_p H} (T - T_0) + f_T. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $T$  и  $p$  — усредненные по толщине двумерный вектор скорости, температура и давление,  $\rho$  — постоянная плотность,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $\mathbf{G}$  — вектор ускорения свободного падения,  $T_0$  — температура внешней среды,  $H$  — толщина области,  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи на границе. Появившиеся после усреднения по толщине слагаемые  $12\nu\mathbf{v}/H^2$  и  $2\alpha(T - T_0)/(\rho c_p H)$  отвечают за вязкое трение и теплообмен на плоских стенках. Уравнения (1), (2) рассматриваются вместе в начальными условиями  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $T = T_0$  и граничными условиями  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $\lambda \partial T / \partial n = -\alpha(T - T_0)$ .

Так как кипение на торце оптоволокна не моделируется и струя горячей жидкости задается функциями  $\mathbf{f}_v$  и  $f_T$ , то модель (1), (2) можно считать полуэмпирической. Локально распределенные источники  $\mathbf{f}_v$  и  $f_T$  были подобраны таким образом, чтобы получающиеся в результате численного моделирования струи горячей жидкости по форме и средней скорости были близки к экспериментальным данным из работы [3], полученным при кипении воды на лазерных нагревателях разной мощности в тонкой кювете.

Функции  $\mathbf{f}_v$  и  $f_T$  отличны от нуля только в малой окрестности торца оптоволокна. Как показано в работе [3], при разной мощности лазера характеристики течения значительно отличаются, поэтому в каждом случае функции  $\mathbf{f}_v$  и  $f_T$  имеют свой вид. В реальном физическом процессе пузырьки схлопываются и возникают микроструи, приводящие в движение небольшие объемы жидкости. Эти микроструи собираются в одну большую горячую струю, для исследования которой и была создана рассматриваемая модель. В нашей упрощенной однофазной модели нет пузырьков. Для задания микроструй мы выделяем в окрестности торца оптоволокна небольшие объемы жидкости и придаем им импульсные ускорения в течение небольшого интервала времени. Поэтому вектор-функция  $\mathbf{f}_v$  является объемной и входит в правую часть уравнений. Процесс образования и схлопывания пузырьков носит хаотичный характер. Одновременно может схлопываться несколько пузырьков в разных местах на торце оптоволокна, и сила возникающих микроструй различна. Поэтому вектор-функция  $\mathbf{f}_v$  является суммой нескольких слагаемых. У каждого слагаемого свое значение, своя периодичность импульсов и своя малая область, в которой оно отлично от нуля. Чтобы придать хаотичный характер процессу образования микроструй,

для задания этих слагаемых используются равномерно распределенные случайные величины. Число слагаемых и интервалы возможных значений параметров зависят от мощности лазера и подбираются на основе анализа экспериментальных данных. Так, в частности, с ростом мощности лазера частота образования пузырьков увеличивается, а их размер уменьшается. При этом возрастает количество одновременно образующихся микроструй, но уменьшается их сила.

Источник тепла  $f_T$  отличен от нуля в небольшом полукруге, который своим диаметром примыкает к торцу оптоволокна. Радиус этого полукруга совпадает с радиусом оптоволокна. Так как после включения мощность лазера не меняется, то функция  $f_T$  не зависит от времени. Из-за малого размера области нагрева мы пренебрегаем возможной неоднородностью источника тепла по пространственным переменным. Таким образом,  $f_T(x, y)$  — это кусочно-постоянная функция, которая равна некоторой константе  $C$  в указанном выше полукруге и нулю вне этого полукруга. Величина этой константы была подобрана на основе анализа данных физического эксперимента для мощности лазера 0.5 Вт. При малой мощности лазера кипение не наблюдается, поэтому пузырьки и микроструи отсутствуют. Локально нагретая жидкость под действием силы плавучести просто поднимается вверх в виде струи с большей температурой и меньшей плотностью. Константа  $C$  была подобрана таким образом, чтобы форма этой струи и ее средняя скорость, полученные в расчетах, соответствовали экспериментальным данным. Для мощности лазера 0.5 Вт было выбрано значение  $C = 500$  К/с. Исходя из этого, для мощности лазера 1.5 Вт мы использовали значение  $C = 1500$  К/с, для мощности лазера 3 Вт константа  $C$  была выбрана равной 3000 К/с и т.д. Площадь области нагрева была примерно в 3800 раз меньше площади всей расчетной области.

Основной целью создания представленной математической модели было проведение вычислительных экспериментов для изучения процесса распространения горячей струи при лазерной термокоагуляции кист. Главной задачей рассматриваемой медицинской операции является нагрев внутренней поверхности кисты до температуры денатурации коллагена (около  $60^\circ\text{C}$ ), поэтому при численном моделировании большое внимание было уделено нагреву границы области при взаимодействии с горячей струей. Важным вопросом являлась зависимость скорости нагрева от мощности лазера. Основные вычислительные эксперименты были проведены для течений в круге при мощности лазера 0.5 Вт, 1.5 Вт, 3 Вт, 5 Вт и 7 Вт. Торцевое оптоволокно располагалось в центре области. Для всех рассмотренных вариантов были получены зависящие от времени профили температуры на границе. Анализ численных результатов показал, что после достижения границы горячая струя начинает распространяться вдоль границы, обеспечивая тем самым нагрев участков, удаленных от места падения струи. При длительном нагреве без изменения положения оптоволокна на части границы возникает участок локального перегрева, что может приводить к образованию внутренних ожогов. Поэтому на практике направление лазерного световода изменяется через определенные промежутки времени, чем обеспечивается равномерный нагрев границы. Отдельно был рассмотрен вопрос о влиянии формы границы и места расположения источника тепла на процесс распространения горячей струи. В дополнительной серии вычислительных экспериментов использовались

эллиптические области со смещением из центра к границе местоположением торца оптоволокну при разных углах наклона. Для областей в форме узких эллипсов наблюдается формирование застойных зон в виде горячих вихрей малого размера, что приводит к локальному перегреву без существенного нагрева других участков границы. Подробное описание результатов вычислительных экспериментов будет представлено в других публикациях авторов.

## Список литературы

- [1] V. M. Chudnovskii, A. Y. Maior, V. I. Yusupov, S. A. Zhukov, “Laser-induced boiling of biological fluids”, *High Temp.*, **57**:4 (2019), 531–538.
- [2] R. V. Fursenko, V. M. Chudnovskii, S. S. Minaev, J. Okajima, “Mechanism of high velocity jet formation after a gas bubble collapse near the micro fiber immersed in a liquid”, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **163** (2020), 120420.
- [3] A. V. Kulik, S. N. Mokrin, A. M. Kraevskii, S. S. Minaev, M. A. Guzev, V. M. Chudnovskii, “Features of dynamics of a jet flow generated on a laser heater by surface boiling of liquid”, *Tech. Phys. Lett.*, **48**:1 (2022), 60–63.

Поступила в редакцию  
12 сентября 2022 г.

Исследование выполнено при финансовой  
поддержке РФФ (проект № 22-19-00189).

---

*Tereshko D. A.*<sup>1</sup>, *Kudryashov A. P.*<sup>1</sup> Mathematical modeling of heat transfer in biological fluids during laser thermotherapy of cysts. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2023. V. 23. No 1. P. 134–137.

<sup>1</sup> Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Russia

## ABSTRACT

The paper proposes a mathematical model of heat transfer by a jet of hot liquid that occurs during laser thermotherapy of cysts. This model is semiempirical, since the hot jet is set using sources obtained from the analysis of experimental data. Based on this model, a series of computational experiments were carried out for different laser powers.

Key words: *partial differential equations, numerical simulation, heat and mass transfer in liquids, applications in medicine.*