Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 2. С. 280–285

УДК 517.95
MSC2020 35J61, 35Q79

© А. Ю. Чеботарев[1]

Обратная задача с интегральным переопределением для полулинейного параболического уравнения

Представлен анализ обратной задачи для нелинейного параболического уравнения с интегральным переопределением. Получены нелокальные оценки решения обратной задачи, доказана ее разрешимость в целом по времени и выведены условия единственности решения.

Ключевые слова: *полулинейное параболическое уравнение, обратная коэффициентная задача, интегральное переопределение, нелокальная однозначная разрешимость.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202425

1. Введение. Постановка обратной задачи

Обратные задачи для нелинейных уравнений реакции–диффузии представляют интерес как с теоретической точки зрения, так и для приложений в технике и медицине. В настоящей работе рассматривается теоретический анализ обратной задачи для полулинейного параболического уравнения, моделирующего, например, динамику коллективного поведения сообщества бактерий, обладающего «quorum-sensing» – чувством кворума – способностью коллективно действовать на внешние возбудители. Прикладная значимость анализа таких задач связана с важной терапевтической концепцией, направленной на управление кворумом бактерий, поскольку именно чувство кворума отвечает за регулирование различных факторов вирулентности при бактериальных инфекциях [1,2]. Анализ нелинейных обратных задач для различных моделей реакции-диффузии представлен в [3–7].

Задача заключается в отыскании неизвестного коэффициента параболического уравнения, зависящего только от времени, а также соответствующего решения начально-краевой задачи по интегральному переопределению, описывающему динамику среднего значения решения. Начально-краевая задача записывается в виде задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами, и для нее ставится

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `chebotarev.ayu@dvfu.ru`

обратная задача. Представлено преобразование задачи к эквививалентной постановке задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, выводятся априорные оценки решения задачи Коши, и на их основе доказывается разрешимость задачи и теорема единственности решения.

В ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ рассматривается начально-краевая задача

$$\partial/\partial t - \operatorname{div}(a\nabla y) = f(x)h(y) - u(t)y, \quad (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$\partial_n y \,\Big|_{\Sigma=\Gamma\times(0,T)} = 0, \quad y\,\Big|_{t=0} = y_0. \tag{2}$$

Здесь $y = y(x,t)$ — состояние системы, $u = u(t)$ — неизвестный коэффициент. Функции a, f, h, y_0 заданы. Через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе Γ.

Обратная задача для модели (1)–(2) заключается в отыскании неизвестной функции $u(t), t \in [0,T]$ и соответствующего этой функции решения начально-краевой задачи (1)–(2) по условию переопределения

$$\int\limits_{\Omega} y(x,t)\,dx = r(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Здесь заданная функция r описывает изменение по времени среднего значения в Ω функции y.

Будем использовать пространства Лебега L^s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, и пространства Соболева $H^s = W_2^s$; $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, $U = L^2(0,T)$. При этом будем отождествлять пространство H с его сопряженным H' так, что $V \subset H = H' \subset V'$; (η,ζ) — значение функционала $\eta \in V'$ на элементе $\zeta \in V$ и скалярное произведение в H, если $\eta,\zeta \in H$, $\|\eta\|^2 = (\eta,\eta)$. Через $L^p(0,T;X)$ (соотв. $C([0,T],X)$) обозначаем пространство строго измеримых функций класса L^p (соотв. непрерывных), определенных на $[0,T]$, со значениями в банаховом пространстве X;

$$Y = \Big\{y : \ y \in L^2(0,T;V), \ y' \in L^2(0,T;V')\Big\},$$

где $y' = dy/dt$. Отметим, что пространство Y непрерывно вложено в $C([0,T];H)$.

Пусть исходные данные удовлетворяют условиям

(c_1) $y_0 \in H, f \in L^\infty(\Omega)$, $|f| \leqslant f_0$, $a \in L^\infty(\Omega)$, $a \geqslant a_0$, $a_0, f_0 = \mathrm{const} > 0$;

(c_2) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|h(s_1) - h(s_2)| \leqslant \kappa|s_1 - s_2|$, $|h(s)| \leqslant h_0$; $r \in H^1(0,T), |r(t)| \geqslant r_0$, $r(0) = (y_0, 1), h_0, r_0 = \mathrm{const} > 0$.

Определим оператор $A\colon V \to V'$, используя следующее равенство, справедливое для $y, z \in V$:

$$(Ay, z) = (a\nabla y, \nabla z).$$

Определение. Пара $\{y,u\} \in Y \times U$ называется *решением задачи* (1)–(3), если

$$y' + Ay = f \cdot h(y) - u \cdot y, \ (y,1) = r, \quad t \in (0,T); \quad y(0) = y_0. \tag{4}$$

2. Преобразование обратной задачи

Сведем формулировку обратной задачи (4) к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами. Определим оператор $B : Y \to U$,

$$B(y) = \frac{1}{r}\big((fh(y), 1) - r'\big).$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* $(c_1) - (c_2)$. *Пара* $\{y, u\} \in Y \times U$ *является решением обратной задачи* (4), *если и только если*

$$y' + Ay = f \cdot h(y) - B(y) \cdot y, \quad t \in (0, T); \;\; y(0) = y_0; \quad u = B(y). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{y, u\} \in Y \times U$ — решение обратной задачи (4). Умножая скалярно первое уравнение в (4) на $z = 1$, получаем равенство

$$r' = (fh(y), 1) - ur.$$

Выразив отсюда u, заключаем, что $u = B(y)$. Обратно, покажем, что $(y, 1) = r$, если y решение задачи (5). Пусть $\eta = (y, 1)$. Умножая скалярно (4) на $z = 1$, получаем равенство $\eta' = (fh(y), 1) - u\eta$. Здесь $u = B(y)$. Из определения оператора B следует равенство $r' = (fh(y), 1) - ur$. Поэтому

$$(\eta - r)' = -u(t)(\eta - r), \;\; t \in (0, T), \qquad \eta(0) - r(0) = (y_0, 1) - r(0) = 0.$$

Следовательно, $\eta = (y, 1) = r$, и поэтому пара $\{y, B(y)\}$ является решением обратной задачи (4). □

Получим априорные оценки решения задачи (5).

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* $(c_1) - (c_2)$. *Если* $y \in Y$ *является решением* (5), *то справедливы оценки*

$$\|y\|^2_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant k_1, \quad 2a_0 \int_0^T \|\nabla y(t)\|^2\, dt \leqslant \|y_0\|^2 + f_0^2 h_0^2 T + k_1 \int_0^T (1 + 2\xi(\tau))\, d\tau. \tag{6}$$

Здесь $k_1 = (\|y_0\|^2 + f_0^2 h_0^2 T) \exp\left(\int_0^T (1 + 2\xi(\tau)) d\tau\right)$, $\xi = \frac{1}{r_0}(f_0 h_0 |\Omega| + |r'|)$. *Через* $|\Omega|$ *обозначен объем области* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим сразу, что из определения оператора B следует неравенство

$$|u(t)| \leqslant \xi(t), \; t \in [0, T].$$

Здесь

$$\xi = \frac{1}{r_0}(f_0 h_0 |\Omega| + |r'|) \in L^2(0, T).$$

Из равенства $(y' + Ay, y) = (f \cdot h(y) - u \cdot y, y)$ следует, с учетом того, что $|h(y)| \leqslant h_0$, неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y\|^2 + a_0 \|\nabla y\|^2 \leqslant \left(\frac{1}{2} + |\xi(t)|\right) \|y\|^2 + \frac{1}{2} f_0^2 h_0^2.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени и используя лемму Гронуолла для оценки $\|y(t)\|^2$, получаем

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \Big(\|y_0\|^2 + f_0^2 h_0^2 T\Big) \exp\left(\int\limits_0^T \big(1 + 2\xi(\tau)\big)\, d\tau\right) = k_1.$$

Тогда выводим

$$2a_0 \int\limits_0^T \|\nabla y(t)\|^2\, dt \leqslant \|y_0\|^2 + f_0^2 h_0^2 T + k_1 \int\limits_0^T \big(1 + 2\xi(\tau)\big)\, d\tau.$$

Таким образом, справедливы нелокальные оценки (6). □

3. Однозначная разрешимость обратной задачи

Установим сначала локальную разрешимость задачи (5) на интервале времени $(0,T_1)$, где T_1 достаточно мало, $0<T_1\leqslant T$. В пространстве $C([0,T_1];H)$ рассмотрим замкнутое множество

$$K = \Big\{z \in C([0,T_1];H):\ \|z(t)\|^2 \leqslant M\Big\}, \quad M = 2\|y_0\|^2 \exp\left(\int\limits_0^T (1 + \xi^2(\tau)) d\tau\right).$$

Рассмотрим оператор $F: K \to C([0,T_1];H)$ такой, что $w = F(z)$, если

$$w' + Aw = f \cdot h(z) - B(z) \cdot z, \quad t \in (0,T); \;\; w(0) = y_0. \tag{7}$$

Однозначная разрешимость линейной параболической задачи (7) хорошо известна [8, гл. 3, теорма 1.2].

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* $(c_1)-(c_2)$. *Если* $(f_0^2 h_0^2|\Omega| + M)T_1 \leqslant \|y_0\|^2$, *то* $F(K) \subset K$.

Доказательство. Пусть $z \in K$. Умножим скалярно уравнение в (7) на w и отбросим неотрицательное слагаемое $(a\nabla w, \nabla w)$ в левой части. Тогда, учитывая оценку $|B(z)| \leqslant \xi$, получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 \leqslant (f \cdot h(z) - B(z) \cdot z, w) \leqslant \frac{1}{2} f_0^2 h_0^2 |\Omega| + \frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\xi^2\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|z\|^2.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2 \leqslant f_0^2 h_0^2 |\Omega| + M + (1 + \xi^2)\|w\|^2.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени, учитывая условие малости T_1 и применяя лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\|w(t)\|^2 \leqslant 2\|y_0\|^2 \exp\left(\int\limits_0^t (1 + \xi^2(\tau)) d\tau\right) \leqslant 2\|y_0\|^2 \exp\left(\int\limits_0^T (1 + \xi^2(\tau)) d\tau\right) = M.$$

Следовательно, $w = F(z) \in K$. □

Заметим, что неподвижная точка оператора F является решением задачи (5) на интервале $(0,T_1)$. Покажем, что при малых T_1 оператор F является сжатием и поэтому имеет ровно одну неподвижную точку.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия леммы 3 и дополнительно*

$$2\int_0^{T_1} \xi_1(\tau)\,d\tau < 1, \quad \xi_1(t) = f_0\kappa + \frac{1}{r_0} f_0\kappa|\Omega|^{1/2}M^{1/2} + \xi(t).$$

Тогда оператор $F : K \to K$ является сжатием.

Доказательство. Пусть $z_{1,2} \in K$, $w_{1,2} = F(z_{1,2})$, $u_{1,2} = B(z_{1,2})$, $w = w_1 - w_2$, $z = z_1 - z_2$, $u = u_1 - u_2$. Тогда

$$w' + Aw = f \cdot (h(z_1) - h(z_2)) - u \cdot z_1 - u_2 \cdot z, \quad t \in (0,T_1);\;\; w(0) = 0. \tag{8}$$

Используя липшицевость функции h и ограниченность функции f, получаем неравенства

$$|f \cdot (h(z_1) - h(z_2))| \leqslant f_0\kappa|z|, \quad |u| \leqslant \frac{1}{r_0} f_0\kappa|\Omega|^{1/2}\|z\|.$$

Умножим скалярно уравнение в (8) на w и отбросим неотрицательное слагаемое $(a\nabla w, \nabla w)$ в левой части. Тогда, учитывая указанные неравенства и ограничение $\|z_1\| \leqslant M^{1/2}$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 \leqslant \xi_1(t)\|z\| \cdot \|w\|, \quad \xi_1(t) = f_0\kappa + \frac{1}{r_0} f_0\kappa|\Omega|^{1/2}M^{1/2} + \xi(t) \in L^2(0,T).$$

Проинтегрировав по времени, заключаем

$$\|w(t)\|^2 \leqslant 2\int_0^{T_1} \xi_1(\tau)\|z(\tau)\| \cdot \|w(\tau)\| d\tau \leqslant 2\int_0^{T_1} \xi_1(\tau) d\tau \|z\|_{C([0,T_1];H)} \cdot \|w\|_{C([0,T_1];H)}.$$

Поэтому

$$\|w\|_{C([0,T_1];H)} \leqslant 2\int_0^{T_1} \xi_1(\tau) d\tau \|z\|_{C([0,T_1];H)}$$

и в силу условия леммы оператор F будет сжатием. □

Теорема 1. *Пусть выполняются условия $(c_1)-(c_2)$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (4) и справедливы оценки (6).*

Доказательство. Из леммы 4 следует, что существует единственная неподвижная точка y оператора F, которая является решением задачи (5), эквивалентной обратной задаче (4), на $(0,T_1)$ при достаточно малом T_1. Априорные оценки (6) не зависят от длины T_1 интервала существования локального решения, и поэтому локальное решение можно продолжить на весь интервал $(0,T)$.

Покажем единственность решения задачи (5). Если $y_{1,2}$ — решения задачи (5), $u_{1,2} = B(y_{1,2})$, $y = y_1 - y_2$, $u = u_1 - u_2$, тогда

$$y' + Ay = f \cdot (h(y_1) - h(y_2)) - u \cdot y_1 - u_2 \cdot y, \quad t \in (0,T);\;\; y(0) = 0. \tag{9}$$

Умножим скалярно уравнение в (9) на y и отбросим неотрицательное слагаемое $(a\nabla y, \nabla y)$ в левой части. Тогда аналогично доказательству леммы 4, с учетом первой оценки (6), выводим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y\|^2 \leqslant \xi_2(t)\|y\|^2, \quad \xi_2(t) = f_0\kappa + \frac{1}{r_0}f_0\kappa|\Omega|^{1/2}k_1^{1/2} + \xi(t) \in L^2(0,T).$$

Применяя лемму Гронуолла, заключаем, что $y=0$, что означает единственность решения обратной задачи. □

Список литературы

[1] Kuttler C., Maslovskaya A., “Hybrid stochastic fractional-based approach to modeling bacterial quorum sensing”, *Math. Model.*, **93**, (2021), 360–375.

[2] Maslovskaya A., Kuttler C., Chebotarev A., Kovtanyuk A., “Optimal multiplicative control of bacterial quorum sensing under external enzyme impact”, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **17**, (2022), 29.

[3] Chebotarev A. Yu., Pinnau R., “An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **472**, (2019), 314–327.

[4] Чеботарев А. Ю., “Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **61**:2, (2021), 303–311.

[5] Пятков С. Г., Ротко В. В., “Обратные задачи для некоторых квазилинейных параболических систем с точечными условиями переопределения”, *Матем. тр.*, **22**:1, (2019), 178–204.

[6] Белоногов В. А., Пятков С. Г., “О некоторых классах обратных задач определения коэффициента теплообмена в слоистых средах”, *Сибирский математический журнал*, **63**:2, (2022), 252–271.

[7] Пятков С. Г., Баранчук В. А., “Определение коэффициента теплопередачи в математических моделях тепломассопереноса”, *Математические заметки*, **113**:1, (2023), 90–108.

[8] Лионс Ж.-Л., *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, Москва, 1972.

Поступила в редакцию
26 сентября 2024 г.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00).

Chebotarev A. Yu.[1] Inverse problem with integral overdetermination for a semilinear parabolic equation. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 2. P. 280–285.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

An analysis of the inverse problem for a nonlinear parabolic equation with integral overdetermination is presented. Nonlocal estimates of the solution of the inverse problem are obtained, its solvability in time as a whole is proved, and conditions for the uniqueness of the solution are derived.

Key words: *semilinear parabolic equation, inverse coefficient problem, integral overdetermination, nonlocal unique solvability.*