

УДК 517.958

MSC2020 35Q20 +35Q60

© Е. П. Арефьев¹, И. В. Прохоров²

Экстраполяционный метод обращения обобщенного преобразования Радона

Рассмотрены вопросы численного нахождения функции, заданной на плоскости по ее интегралам вдоль полос относительно небольшой ширины. Предложен алгоритм решения задачи, основанный на экстраполяции нескольких изображений, полученных в результате приближенного обращения преобразования Радона вдоль полос различной ширины. Приведены результаты численных расчетов, указаны ограничения и перспективы применения экстраполяционного подхода.

Ключевые слова: *обобщенное преобразование Радона, экстраполяция, численный алгоритм*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202501>

С момента публикации работы И. Радона, посвященной доказательству формулы обращения для решения одной задачи интегральной геометрии, прошло уже больше ста лет [1]. На полвека формула Радона была почти забыта и воспринималась специалистами главным образом с теоретической точки зрения.

Появление компьютеров и необходимость создания программного обеспечения первых томографов для обработки данных рентгеновского сканирования объектов стало спусковым механизмом, давшим мощнейший толчок к росту публикаций, посвященных изучению задач интегральной геометрии и разработке численных алгоритмов для их решения [2–7].

В настоящее время достигнут значительный прогресс не только при изучении качественных свойств интегральных операторов типа преобразования Радона, но и на пути теоретического и численного исследования новых обратных задач для уравнений математической физики, сводящихся к задачам интегральной геометрии [8–10]. В данной статье продолжены исследования работ [11–15], развивающих экстраполяционные методы решения задач акустической и рентгеновской томографии.

¹ Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.

² Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

Электронная почта: arefev.ep@dvfu.ru (Е. П. Арефьев), prokhorov@iam.dvo.ru (И. В. Прохоров).

1. Постановка задачи

В работе рассматривается интегральное преобразование функции $f(r)$, заданной в единичном круге $G = \{r = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |r| < 1\}$, вида

$$(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\rho-\varepsilon}^{\rho+\varepsilon} \int_{-\sqrt{1-\rho'^2}}^{\sqrt{1-\rho'^2}} f(\rho'\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi)) d\tau d\rho', \quad (1)$$

где $\omega(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, $\omega_{\perp}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [-1, 1]$ и $\varepsilon > 0$. Интегральное преобразование (1) является обобщением классического преобразования Радона

$$(R_0f)(\rho, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon) = \int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} f(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi)) d\tau, \quad (2)$$

которое представляет собой двумерное семейство интегралов от функции f вдоль всевозможных прямых, проходящих через область G .

Задача заключается в приближенном нахождении функции f , описывающей радиационные характеристики среды, если задана функция

$$(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon) = g(\rho, \varphi, \varepsilon) \quad (3)$$

при некоторых значениях параметра ε .

В отличие от преобразования Радона (2), интегральное преобразование (1) возникает в рентгеновской томографии тогда, когда размерами детектора в сравнении с размерами исследуемого объекта пренебречь нельзя или когда при визуализации быстротекущих процессов необходимо уменьшить время накопления прошедшего через среду сигнала за счет увеличения площади регистрации фотонов приемного устройства.

Рассматривается случай, когда параметр ε , характеризующий ширину полосы, по которой взят интеграл в (1), относительно небольшой. При асимптотической малости параметра ε можно применить традиционные методы обращения преобразования Радона, используя экстраполяционное уточнение решения по известным данным $(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon)$ для различных значений параметра ε . В работе предложен экстраполяционный алгоритм решения задачи, использующий только два набора исходных данных $(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon_1)$ и $(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon_2)$, и представлены результаты вычислительных экспериментов для различных классов искомых функций f .

2. Асимптотические разложения и экстраполяция изображений

Предположим, что для подынтегральной функции $f(\rho'\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi))$ в соотношении (1) справедливо асимптотическое разложение в достаточно малой окрестности точки $\rho' = \rho$:

$$\begin{aligned} f(\rho'\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi)) = & f_0(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi)) + f_1(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi))(\rho' - \rho) + \\ & + f_2(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi))(\rho' - \rho)^2 + f_3(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi))(\rho' - \rho)^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя разложение (4) в формулу (1) и учитывая, что при любом $i=0,1,2,3$ справедливо $(Rf_i)(\rho, \varphi, \varepsilon) = (R_0 f_i)(\rho, \varphi)$, получим

$$(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon) = (R_0 f_0)(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon^2}{3}(R_0 f_2)(\rho, \varphi). \quad (5)$$

Если функция $g(\rho, \varphi, \varepsilon)$ в уравнении (3) известна при двух значениях $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$, тогда из (5) вытекает

$$g(\rho, \varphi, \varepsilon_1) = (R_0 f_0)(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon_1^2}{3}(R_0 f_2)(\rho, \varphi), \quad (6)$$

$$g(\rho, \varphi, \varepsilon_2) = (R_0 f_0)(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon_2^2}{3}(R_0 f_2)(\rho, \varphi). \quad (7)$$

После несложных преобразований из (6), (7) вытекает

$$\begin{aligned} (R_0 f_0)(\rho, \varphi) &= \frac{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 g(\rho, \varphi, \varepsilon_1) - g(\rho, \varphi, \varepsilon_2)}{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 - 1} = \\ &= g(\rho, \varphi, \varepsilon_1) - \frac{g(\rho, \varphi, \varepsilon_1) - g(\rho, \varphi, \varepsilon_2)}{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя к обеим частям (8) обратное преобразование Радона, получаем

$$f(r) = (R_0^{-1}g)(r, \varepsilon_1) - \frac{(R_0^{-1}g)(r, \varepsilon_1) - (R_0^{-1}g)(r, \varepsilon_2)}{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 - 1}. \quad (9)$$

Если в формуле (9) пренебречь вторым слагаемым, то это фактически означает, что восстановление функции f проводится с помощью обращения классического преобразования Радона по заданным значениям $g(\rho, \varphi, \varepsilon_1)$ без экстраполяционного уточнения.

3. Вычислительные эксперименты

Для численного решения задачи обращения преобразования Радона воспользуемся алгоритмом свертки и обратной проекции [2, 3]. Суть метода состоит в последовательном применении двух операций. На первом шаге выполняется свертка проекций $(Rf)(\rho_i, \varphi_j, \varepsilon)$, $-1 \leq \rho_i \leq 1$, $i = -N_\rho, \dots, N_\rho$,

$$v_{j,k} = \frac{1}{N_\rho} \sum_{i=-N_\rho}^{N_\rho} w_b(s_k - s_i)(Rf)(\rho_i, \varphi_j, \varepsilon)$$

с некоторой фильтрующей функцией $w_b(s)$. Существует множество различных вариантов выбора ядра $w_b(s)$, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки [2, 3]. В данной работе мы используем один из самых экономичных с вычислительной точки зрения фильтр Шеппа – Логана, имеющий в узлах сетки следующий

вид [2]:

$$w_b(s_l) = \frac{N_\rho^2}{(1 - 4l^2)\pi^2}.$$

На втором шаге вычисляется дискретная обратная проекция

$$\hat{f}(x, y, \varepsilon) = \frac{2\pi}{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_\varphi} \left((1-u)v_{j,k} + uv_{j,k+1} \right),$$

где N_φ — количество разбиений отрезка $[0, \pi]$ по переменной φ . Ошибка между точным решением f и функцией $\hat{f}$ обусловлена как погрешностью дискретизации, так и использованием обобщенных проекций $(Rf)(\rho_i, \varphi_j, \varepsilon)$, вычисляемых по формуле (1), вместо проекций $(Rf)(\rho_i, \varphi_j, 0)$, определенных соотношением (2).

В расчетах при сравнении точного решения f и приближенного решения $\hat{f}$ будем использовать относительное среднеквадратичное отклонение:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(f(x_i, y_j) - \hat{f}(x_i, y_j) \right)^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f^2(x_i, y_j)}} \cdot 100, \quad (x_i, y_j) \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Для экстраполяционного уточнения функции $\hat{f}(x, y, \varepsilon)$ нам нужно дважды провести обращение преобразования Радона при разных ε , для того чтобы воспользоваться формулой (9). При вычислении функции $\hat{f}(x, y, \varepsilon)$ с помощью алгоритма свертки и обратной проекции использовались параметры разбиения для преобразования Радона $N_\rho = 100$ и $N_\varphi = 314$ с близким к оптимальному соотношению $N_\varphi/N_\rho = \pi$ [2].

В первой серии вычислительных экспериментов в качестве тестовой функции f был выбран широко известный в томографии фантом Шеппа – Логана [16]. Графическое изображение этого фантома приведено на рис. 1а. На рис. 1б приведена реконструкция этого фантома по данным $(Rf)(\rho_i, \varphi_j, \varepsilon_1)$ при $\varepsilon_1 = 0.019$, определенных на сетке $(\rho_i, \varphi_j) \in [-1, 1] \times [0, \pi]$, $i = 1, \dots, N_\rho$, $j = 1, \dots, N_\varphi$. На рис. 1с приведено восстановление фантома Шеппа – Логана после экстраполяционного уточнения при этом используется дополнительное измерение $(Rf)(\rho_i, \varphi_j, \varepsilon_2)$ при $\varepsilon_2 = 0.02$. Как видно на рисунках, экстраполированное изображение 1с более четкое, чем необработанное изображение 1б. Это подтверждается количественными характеристиками: среднеквадратичная ошибка экстраполированного изображения составила 11.34 процента, а необработанного — 14.49 процента.

Для этого же фантома были проведены расчеты при различных значениях параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (см. табл. 1). Как и следовало ожидать, ошибка неэкстраполированного и экстраполированного решений понижается с уменьшением параметра ε_1 . Почти во всех случаях ошибка экстраполированного решения меньше, чем не экстраполированного, кроме случая очень широкой полосы $\varepsilon_1 = 0.155$. Возможно, что в этом случае перестает работать асимптотика по малому параметру ε и при осуществлении неустойчивой процедуры экстраполяции сказываются численные ошибки полученных изображений $(R_0^{-1}g)(r, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2$.

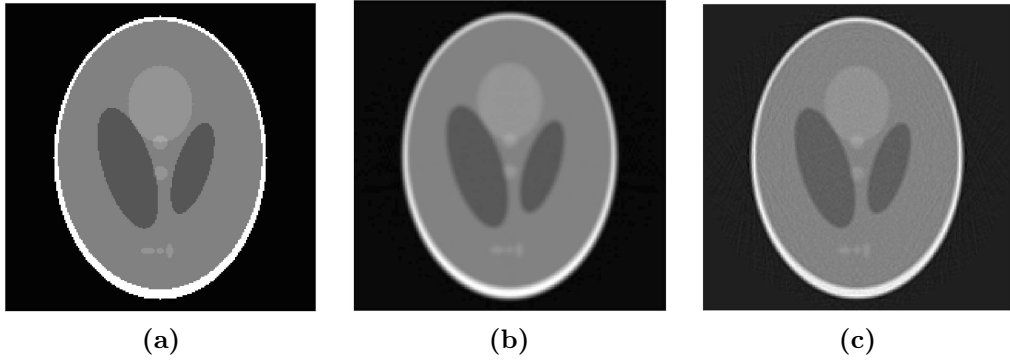


Рис. 1. (a) — полутоновое изображение фантома Шеппа–Логана; (b) — реконструкция фантома без экстраполяции при $\varepsilon_1 = 0.019$; (c) — реконструкция после экстраполяционного уточнения при $\varepsilon_1 = 0.019$, $\varepsilon_2 = 0.02$.

Таблица 1. Количественные результаты реконструкция фантома Шеппа–Логана при различных значениях параметров экстраполяции $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1, \varepsilon'_2$

ε_1	0.155	0.077	0.038	0.019	0.0095
ε_2	0.160	0.080	0.040	0.020	0.0100
ε'_2	0.31	0.155	0.077	0.038	0.019
Ошибка восстановления функции f без экстраполяции при $\varepsilon = \varepsilon_1$ (в процентах)	36.58	30.58	22.46	14.49	10.16
Ошибка восстановления функции f с экстраполяционным уточнением при $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$	38.48	28.51	18.62	11.34	8.78
Ошибка восстановления функции f с экстраполяционным уточнением при $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon'_2$	35.96	29.59	20.83	12.69	9.19

Также были проведены аналогичные расчеты для случая, когда при экстраполяции изображений использовались значения параметров ε_1 и ε'_2 такие, что $\varepsilon'_2 - \varepsilon_1 > \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. При увеличении ε_2 ошибка δ увеличилась для всех значений параметра ε'_2 , кроме самого большого значения $\varepsilon'_2 = 0.31$, где ошибка стала даже меньше не экстраполированного решения. Как мы видим, выбор параметров ε_i зависит от множества факторов и требует более тщательного исследования.

Для второй серии вычислительных экспериментов был взят более простой тестовый фантом, который описывается непрерывной функцией в виде комбинации двух гауссианов (рис. 2a):

$$f(x, y) = \max(\exp(-50(x - 0.3)^2 - 10y^2), \exp(-50x^2 - 10y^2)). \quad (10)$$

На рис. 2b построена реконструкция функции (10), полученная по проекциям $R(\rho, \varphi, \varepsilon)$

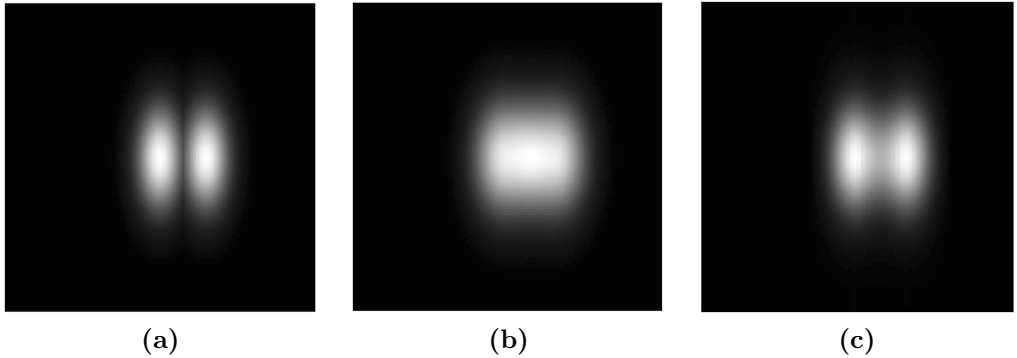


Рис. 2. (a) — полутоновое графическое изображение функции (12); (b) — реконструкция функции без экстраполяции при $\varepsilon_1 = 0.155$; (c) — реконструкция после экстраполяционного уточнения при $\varepsilon_1 = 0.155$, $\varepsilon_2 = 0.16$.

при $\varepsilon_1 = 0.155$, а на рис. 2с приведена реконструкция функции (10) после экстраполяционного уточнения по двум наборам проекций $R(\rho, \varphi, \varepsilon_1)$ и $R(\rho, \varphi, \varepsilon_2)$ при $\varepsilon_1 = 0.155$, $\varepsilon_2 = 0.16$. В этом случае результаты экстраполяционного уточнения видны более отчетливо по сравнению с фантомом Шеппа – Логана. На рис. 2b наблюдается практически полное слияние двух близко расположенных «шапочек» в одну. Применение экстраполяционного алгоритма позволило существенно улучшить качество изображения, пространственно разделив «слившиеся шапочки» (см. рис. 2с).

Табл. 2 содержит относительные ошибки восстановления функции (10) по заданным проекциям $R(\rho, \varphi, \varepsilon_i)$. Данные таблицы показывают, что при реконструкции более гладкой функции уровень ошибки в целом существенно понизился, причем ошибка экстраполированного решения для всех значений параметра ε_1 всегда мень-

Таблица 2. Количественные результаты реконструкция функции (10) при различных значениях параметров экстраполяции $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1, \varepsilon'_2$

ε_1	0.155	0.077	0.038	0.019	0.0095
ε_2	0.16	0.08	0.04	0.02	0.01
ε'_2	0.31	0.155	0.077	0.038	0.019
Ошибка восстановления функции f без экстраполяции при $\varepsilon = \varepsilon_1$ (в процентах)	29.81	10.64	3.27	1.16	0.57
Ошибка восстановления функции f с экстраполяционным уточнением при $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$	14.28	2.82	1.00	0.50	0.35
Ошибка восстановления функции f с экстраполяционным уточнением при $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon'_2$	25.61	5.20	1.41	0.63	0.40

ше ошибки неэкстраполированного решения. В отличие от результатов, полученных в первой серии вычислительных экспериментов, увеличение разности $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ приводит к росту ошибки для всех рассмотренных параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

4. Заключение

Проведенные исследования показали эффективность применения экстраполяционного уточнения в задаче обращения обобщенного преобразования Радона. При реконструкции гладких функций по двум наборам проекций уровень среднеквадратичной ошибки удалось понизить более чем в три раза при некоторых параметрах экстраполяции. При восстановлении высококонтрастных объектов экстраполяция изображений, как и ожидалось, не дает таких же впечатляющих результатов. Тем не менее, понижение уровня ошибки всего на один-два процента может иметь значение в задачах определения химического состава и идентификации неоднородного вещества по данным мультэнергетического облучения [17].

Важно отметить, что с практической точки зрения применение экстраполяционного подхода не предъявляет каких-то повышенных требований к измерительным устройствам, детектирующих прошедшее через среду излучение, но несколько увеличивает радиационную нагрузку на объект, подвергающийся повторному рентгеновскому просвечиванию.

Список литературы

- [1] Radon J., “Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten”, *Berichte Sachsische Akademie der Wissen schaften*, **29**, (1917), 262–277.
- [2] Наттерер Ф., *Математические аспекты компьютерной томографии*, Мир, Москва, 1990.
- [3] Терещенко С. А., *Методы вычислительной томографии*, Физматлит, Москва, 2004.
- [4] Шарафутдинов В. А., “Задача интегральной геометрии для обобщенных тензорных полей на R^m ”, *Докл. АН СССР*, **286**:2, (1986), 305–307.
- [5] Деревцов Е. Ю., “Об одном обобщении экспоненциального лучевого преобразования в томографии”, *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, **18**:4, (2018), 29–42.
- [6] Аниконов Д. С., Коновалова Д. С., “Задача о неизвестной границе для обобщённого преобразования Радона в чётномерном пространстве”, *Матем. тр.*, **27**:3, (2024), 5–19.
- [7] Аниконов Д. С., Коновалова Д. С., “Проблема обращения преобразований Радона, определенных на псевдодвуупуклых множествах”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **516**, (2024), 93–97.
- [8] Anikonov D. S., Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V., *Transport Equation and Tomography, Inverse and Ill-Posed Problems Series*, **30**, VSP, Boston-Utrecht, 2002.
- [9] Романов В. Г., “Лучевая постановка задачи акустической томографии”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **505**, (2022), 50–55.
- [10] Романов В. Г., “Обратная задача для нелинейного уравнения переноса”, *Сиб. матем. журн.*, **65**:5, (2024), 1022–1028.
- [11] Прохоров И. В., Яровенко И. П., “Повышение качества томографических изображений

- при облучении среды импульсами различной длительности”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **505**, (2022), 71–78.
- [12] Коваленко Е. О., Прохоров И. В., “Об одном экстраполяционном алгоритме улучшения качества гидролокационных изображений морского дна”, *Дальневост. матем. журн.*, **23**:2, (2023), 211–221.
- [13] Коваленко Е. О., Прохоров И. В., Сущенко А. А., “Экстраполяционные алгоритмы улучшения качества гидролокационных изображений”, *Вычислительные технологии*, **29**:3, (2024), 38–51.
- [14] Yarovenko I. P., Prokhorov I. V., “An extrapolation method for improving the quality of tomographic images using multiple short-pulse irradiations”, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, **32**:1, (2024), 57–74.
- [15] Яровенко И. П., Ворновских П. А., Прохоров И. В., “Экстраполяция томографических изображений по данным многократного импульсного зондирования”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **27**:3, (2024), 177–195.
- [16] Shepp L. A., Logan B. F., “The Fourier Reconstruction of a Head Section”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, **21**:3, (1974), 21–43.
- [17] Nazarov V. G., Prokhorov I. V., Yarovenko I. P., “Identification of an Unknown Substance by the Methods of Multi-Energy Pulse X-ray Tomography”, *Mathematics*, **11**:15, (2023), 3263.

Поступила в редакцию
20 марта 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00 при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).

*Aref'ev E. P.*¹, *Prokhorov I. V.*² Extrapolation method for inversion of the generalized Radon transform. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2025. V. 25. No 1. P. 13–20.

¹Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

²Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

The issues of numerical determination of a function defined on a plane by its integrals along strips of relatively small width are considered. An algorithm for solving the problem is proposed, based on extrapolation of several images obtained as a result of approximate inversion of the Radon transform for strips of different widths. The results of numerical calculations are presented, limitations and prospects for using the extrapolation approach are indicated.

Key words: *generalized Radon transform, extrapolation, numerical algorithm.*