

УДК 539.3

MSC2020 74A05 + 74B05

© М. А. Гузев¹, Е. В. Черныш¹

И. Удаление сингулярности в решениях теории упругости на основе неевклидовой модели сплошной среды: случай нулевой и первой гармоник

С использованием функции напряжений Эйри для плоско-деформированного состояния сплошной среды, получено представление для сингулярных вкладов нулевой и первой гармоник классического поля упругих напряжений. В рамках неевклидовой модели сплошной среды показано, что структура поля внутренних напряжений плоско-деформированного состояния складывается из классического поля упругих напряжений и неклассического поля напряжений, определяемого через функцию несовместности деформаций. Вычислен сингулярный вклад нулевой и первой гармоник неклассического поля напряжений. Требование регулярного поведения поля внутренних напряжений позволило скомпенсировать сингулярность в решении теории упругости за счет выбора сингулярности неклассического поля напряжений.

Ключевые слова: *функция напряжений Эйри, неевклидова модель сплошной среды, несовместность деформаций.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202502>

Введение

В теории упругости разрывы в геометрии или граничных условиях — например, наличие острого угла или сосредоточенная (дельта-функция) нагрузка — всегда приводят к задачам с особыми точками, то есть сингулярным задачам. Предпочтительный с точки зрения математики анализ сингулярных решений сводится к их выбору на основании свойств единственности, сходимости и существования решений. Таким образом, указывается класс функций, в рамках которого следует искать решение, и формулируются некоторые утверждения о сингулярностях, допустимых в решении. Если мы хотим придать какой-либо смысл сингулярным решениям, то

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
Электронная почта: guzev@iam.dvo.ru (М. А. Гузев).

их следует рассматривать как пределы, соответствующие более практическим ситуациям, таким как угол с очень маленьким радиусом скругления или нагрузка, приложенная к маленькой области границы. Тогда разница между реальной проблемой и предельным случаем наблюдается локально, а в областях сингулярного поведения формулируется критерий, согласно которому единственно приемлемыми являются особенности, имеющие физический смысл [1, 2].

С математической точки зрения появление сингулярных решений можно объяснить тем, что соответствующие модели недостаточно адекватно описывают физические явления, в частности, при использовании континуальной модели. Однако реальные материалы не являются континуумами, поскольку в них можно выделить дискретные структуры на разных масштабах. Таким образом, не имеет практического смысла говорить о значении величин, находящихся к углу ближе, например, чем на одно атомное расстояние, поскольку теория все равно неприменима. Конечно, аргументы такого рода появляются всякий раз, когда мы пытаемся идеализировать физическую реальность, что означает по сути, попытку описать ее поведение на языке математики. В процессе моделирования используется так много идеализаций и приближений, что порой не бывает точно известно, какое из них отвечает за встречаемые в задаче трудности. При этом может существовать несколько способов переформулировки проблемы, позволяющих улучшить модель физической реальности и избежать трудностей. Но, ограничив модельные предположения, к примеру, полагая, что полная энергия деформации в небольшой области, окружающей особую точку, ограничена, мы устраним возражения инженера, который обычно склонен утверждать, что любая ситуация, в которой предсказывается, например, бесконечное напряжение, противоречит здравому смыслу, поскольку никакие реальные материалы не способны его выдерживать [1, 2].

Проблема конструирования моделей материалов с микрохарактеристиками материалов, позволяющая исключить сингулярность в решениях и получить физически реальный результат, находится в центре внимания теоретических исследований начиная с 60-х годов XX века. В континуальной теории дислокаций обзор различных подходов, в рамках которых предлагается преодолеть сингулярности, можно найти в [3]. Исследования, посвященные разработке несингулярной модели описания поля упругих напряжений и деформаций для дислокаций и дисклинаций в рамках градиентной теории Миндлина, представлены в [4–7]. Научные группы [8–11] построили несингулярные решения градиентной упругости для дислокаций и трещин. Способы получения регулярных решений традиционных сингулярных задач представлены в работах отечественных ученых [12–15].

В механике сплошной среды с каждым типом дефекта (дислокации, дисклинации и др.) связывают состояние внутреннего напряжения континуума, для описания которого исследователи еще в 50-е годы XX века предложили использовать неевклидовы геометрические объекты [16, 17]. Анализ этой проблемы в различные периоды можно найти в [18–21]. Общий подход, характерный для всех авторов, заключается в использовании геометрических неевклидовых объектов в качестве переменных, характеризующих геометрическую структуру несовместности элементов материала среды.

Неевклидова модель сплошной среды использовалась для построения несингулярных решений с целью описания остаточных напряжений плоско-деформированного состояния сплошной среды [22,23]. Однако этот результат для поля напряжений был представлен без детального вывода, а также при условии, что зависимость от угловой переменной отсутствует. В данной работе этот пробел восполнен: показано, как в рамках неевклидовой модели сплошной среды выполнить построение несингулярного поля напряжений для нулевой и первой гармоники.

Кратко опишем содержание работы. В разделе 1 рассматривается плоско-деформированное состояние сплошной среды и используется функция напряжений Эйри для представления решения. Указано, что обобщение классической теории и переход к неевклидовой модели сплошной среды лежит на пути отказа от классических условий совместности Сен-Венана [24]. Показано, что поле внутренних напряжений складывается из классического поля упругих напряжений и дополнительного неклассического вклада. В разделах 2 и 3 определяются коэффициенты Фурье нулевой и первой гармоник для классической и неклассической функции напряжений соответственно. Структура сингулярностей классического поля упругих напряжений анализируется в разделе 4. Сингулярные компоненты нулевых гармоник неклассического поля напряжений вычислены в разделе 5. Нулевые гармоники полного поля внутренних напряжений, имеющие сингулярное поведение, представлены в разделе 6. В нем показано, что условие отсутствия особенностей в полном поле внутренних напряжений приводит к необходимости выбрать коэффициенты при сингулярностях классического и неклассического полей согласованным способом, тем самым обеспечивая обращение в нуль сингулярной компоненты полного поля внутренних напряжений. Сингулярные вклады первой гармоники неклассического поля напряжений вычислены в разделе 7. Сингулярные компоненты для первой гармоники полного поля напряжений представлены в разделе 8. Используя идею из раздела 6 о согласованном выборе сингулярных коэффициентов классического и неклассического полей, мы показали, что можно обеспечить обращение в нуль сингулярностей полного поля внутренних напряжений.

1. Основные соотношения и переход к неевклидовой модели

Для плоско-деформированного состояния уравнения механического равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Соотношения (1) тождественно удовлетворяются, если ввести функцию напряжений Эйри W согласно формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2}. \quad (2)$$

Пусть справедлив закон Гука: $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + 2\mu E_{ij}$, где λ, μ — феноменологические параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера, E_{ij} — компоненты тензора деформаций.

Хорошо известно [24], что в классической теории упругости шесть компонент классического тензора деформаций выражаются только через три компоненты вектора перемещений, поэтому тензор деформаций не может быть произвольным и удовлетворяет дополнительным ограничениям, которые в механике сплошной среды называются условиями совместности для деформаций — условиями совместности Сен-Венана. В двумерном случае ограничение на E_{ij} задается в виде единственного соотношения

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - 2 \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{R}{2}. \quad (3)$$

Введенная справа функция R характеризует кинематические свойства модели сплошной среды, и для классической теории упругости $R \equiv 0$, что соответствует выполнению условий совместности условия Сен-Венана.

В ситуации общего положения $R \neq 0$, то есть условия совместности Сен-Венана не выполняются. В наиболее четкой форме это было проанализировано С.К. Годуновым [24], указавшим, что с геометрической точки зрения условие совместности означает отождествление изменения формы тела в евклидовой метрике внешнего наблюдателя с изменениями внутренней метрики материала, и это условие является дополнительной гипотезой, постулируемой в классической теории. Таким образом, отказ от классических условий совместности означает переход к неевклидовой модели сплошной среды.

Выразим E_{ij} из закона Гука и подставим в (3), что приведет к следующему уравнению для $\sigma = \sigma_{jj}$:

$$\Delta \sigma = \frac{\mu}{1 - \nu} R, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (4)$$

Из (2), (4) для функции напряжений W получаем неоднородное бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 W = \frac{\mu}{1 - \nu} R. \quad (5)$$

Поскольку оно является линейным, то его решение можно представить в виде суммы решения однородного бигармонического уравнения и частного решения неоднородного бигармонического уравнения:

$$W = \Psi + \Phi, \quad (6)$$

$$\Delta^2 \Psi = 0, \quad \Delta^2 \Phi = \frac{\mu}{1 - \nu} R. \quad (7)$$

В классической теории упругости Ψ определяет функцию напряжений. Подстановка (6) в (2) дает следующие представления для компонент поля напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \tau_{11} + n_{11}, & \tau_{11} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2 \partial x^2}, & n_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2 \partial x^2}, \\ \sigma_{22} &= \tau_{22} + n_{22}, & \tau_{22} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^1 \partial x^1}, & n_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^1 \partial x^1}, \\ \sigma_{12} &= \tau_{12} + n_{12}, & \tau_{12} &= -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^1 \partial x^2}, & n_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^1 \partial x^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) видно, что структура поля внутренних напряжений складывается из классического поля упругих напряжений τ_{ij} и неклассического поля напряжений n_{ij} , определяемого через функцию несовместности R .

Функция R использовалась при формулировке моделей сплошных сред с внутренней структурой [25], и в предположении квадратичной зависимости внутренней энергии среды от термодинамических переменных было получено уравнение для R в следующем виде:

$$\Delta^2 R = \gamma R, \quad \gamma \neq 0, \quad (9)$$

где параметр γ характеризует пространственный масштаб внутренней структуры.

Перейдем к безразмерным переменным $x^i \rightarrow x^i / \sqrt[4]{\gamma}$ и выполним перенормировку для σ_{ij} , Φ , R полагая $\sigma_{ij} \rightarrow \mu \sigma_{ij}$, $\Phi \rightarrow \Phi \mu / \sqrt{\gamma}$, $R \rightarrow R \sqrt{\gamma} (1 - \nu)$, тогда (7), (9) редуцируются к соотношениям

$$\Delta^2 \Phi = R, \quad \Delta^2 R = R.$$

Отсюда следует, что неклассическая функции напряжений Φ удовлетворяет спектральному уравнению для бигармонического оператора

$$\Delta^2 \Phi = \Phi.$$

В полярной системе координат (r, φ) компоненты поля напряжений вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{\varphi\varphi} + n_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \tau_{rr} + n_{rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \tau_{r\varphi} + n_{r\varphi}, \quad (10)$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \tau_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \varphi}, \quad (11)$$

$$n_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad n_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad n_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi}. \quad (12)$$

Решение для Φ , Ψ запишем в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n = \Psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{n1} \cos n\varphi + \Psi_{n2} \sin n\varphi), \quad (13)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{n1} \cos n\varphi + \Phi_{n2} \sin n\varphi), \quad (14)$$

где $\Psi_0 = \Psi_0(r)$, $\Phi_0 = \Phi_0(r)$, $\Psi_{n\gamma} = \Psi_{n\gamma}(r)$, $\Phi_{n\gamma} = \Phi_{n\gamma}(r)$ — коэффициенты Фурье и $\gamma = 1, 2$. Подстановка (13), (14) в (10)–(12) дает такое представление для σ_{ij} в виде суммы $\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{(n)} \sigma_{ij}^{(n)}$, в которой

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(n)} &= \tau_{ij}^{(n)} + n_{ij}^{(n)}, \\ \tau_{\varphi\varphi}^{(n)} &= \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial r^2}, \quad \tau_{rr}^{(n)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_n}{\partial r}, \quad \tau_{r\varphi}^{(n)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial r \partial \varphi}, \\ n_{\varphi\varphi}^{(n)} &= \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2}, \quad n_{rr}^{(n)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r}, \quad n_{r\varphi}^{(n)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (15)$$

2. Коэффициенты Фурье классической функции напряжений

В полярных координатах (r, φ) уравнение (7) для Ψ имеет вид

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \Psi = 0.$$

Подставляя вместо Ψ выражение (13), находим, что функции Ψ_0 , $\Psi_{n\gamma}$ должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \right) \Psi_0 = 0, \quad (16)$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Psi_{n\gamma} = 0. \quad (17)$$

Интегрируя в (16), получаем решение для Ψ_0

$$\Psi_0 = A_0 + B_0 r^2 + \alpha_0 \ln r + \beta_0 r^2 \ln r$$

с некоторыми постоянными A_0 , B_0 , α_0 , β_0 .

Запишем (17) в виде системы уравнений:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) F_{n\gamma} = 0, \quad (18)$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Psi_{n\gamma} = F_{n\gamma}. \quad (19)$$

Функция $F_{n\gamma}$ является линейной комбинацией независимых решений r^n , r^{-n} уравнения (18):

$$F_{n\gamma} = a_\gamma r^n + \frac{b_\gamma}{r^n}, \quad (20)$$

Тогда, используя метод вариации произвольной постоянной, представим решение (19) в виде

$$\Psi_{n\gamma} = A_\gamma(r) r^n + \frac{B_\gamma(r)}{r^n}. \quad (21)$$

Из (19)–(21) получаем уравнения для определения $A_\gamma(r)$, $B_\gamma(r)$:

$$\frac{dA_\gamma(r)}{dr} = \frac{1}{2nr^{n-1}} \left(a_\gamma r^n + \frac{b_\gamma}{r^n} \right), \quad \frac{dB_\gamma(r)}{dr} = -\frac{r^{n+1}}{2n} \left(a_\gamma r^n + \frac{b_\gamma}{r^n} \right), \quad (22)$$

где a_γ , b_γ — постоянные. Интегрирование в (22) дает

$$\begin{aligned} A_\gamma(r) &= \frac{1}{4n} \left(a_\gamma r^2 - \frac{b_\gamma}{n-1} \frac{1}{r^{2(n-1)}} \right) + D_\gamma, \\ B_\gamma(r) &= -\frac{1}{4n} \left(\frac{a_\gamma}{n+1} r^{2(n+1)} + b_\gamma r^2 \right) + E_\gamma. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя (23) в (21) и переопределяя величины, запишем $\Psi_{\gamma n}$ в виде

$$\Psi_{n\gamma} = A_\gamma r^n + \frac{B_\gamma}{r^n} + \frac{\alpha_\gamma}{r^{n-2}} + \beta_\gamma r^{n+2} \quad (24)$$

с некоторыми постоянными $A_\gamma, B_\gamma, \alpha_\gamma, \beta_\gamma$.

Из (23) видно, что представление (24) справедливо при $n \neq 1$. Для случая $n = 1$ получаем из (22):

$$A_\gamma(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{2} a_\gamma + b_\gamma \ln r \right) + D_\gamma, \quad B_\gamma(r) = -\frac{1}{2} \left(\frac{a_\gamma}{2} r^4 + b_\gamma r^2 \right) + E_\gamma.$$

Это позволяет вычислить

$$\Psi_{1\gamma} = A_\gamma + \frac{B_\gamma}{r} + \alpha_\gamma r \ln r + \beta_\gamma r^3.$$

Приведем формулы для нулевой и первой гармоник функции напряжений Ψ :

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 + \Psi_1, \quad \Psi_1 = \Psi_{11} \cos \varphi + \Psi_{12} \sin \varphi, \\ \Psi_0 &= A_0 r + B_0 r^2 + \alpha_0 \ln r + \beta_0 r^2 \ln r, \\ \Psi_{11} &= A_1 r + \frac{B_1}{r} + \alpha_1 r \ln r + \beta_1 r^3, \quad \Psi_{12} = A_2 r + \frac{B_2}{r} + \alpha_2 r \ln r + \beta_2 r^3. \end{aligned} \quad (25)$$

3. Коэффициенты Фурье неклассической функции напряжений

Уравнение (4) допускает следующую факторизацию:

$$\Delta^2 \Phi - \Phi = (\Delta + I)(\Delta - I)\Phi = 0.$$

Решение для Φ имеет структуру

$$\Phi = \Phi^+ + \Phi^-, \quad (\Delta + I)\Phi^+ = 0, \quad (\Delta - I)\Phi^- = 0.$$

Учитывая (14), получаем

$$\Phi^+ = \Phi_0^+ + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{1n}^+ \cos n\varphi + \Phi_{2n}^+ \sin n\varphi), \quad \Phi^- = \Phi_0^- + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{1n}^- \cos n\varphi + \Phi_{2n}^- \sin n\varphi).$$

Поскольку в полярных координатах оператор Лапласа равен

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

то для коэффициентов Фурье $\Phi_{n\gamma}^+, \Phi_{n\gamma}^-$ уравнения записываются следующим образом:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + 1 - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_{n\gamma}^+ = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - 1 - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_{n\gamma}^- = 0. \quad (26)$$

Решениями уравнений (26) являются цилиндрические функции n порядка

$$\Phi_{n\gamma}^+ = a_{n\gamma} J_n(r) + b_{n\gamma} N_n(r), \quad \Phi_{n\gamma}^- = c_{n\gamma} K_n(r) + d_{n\gamma} I_n(r),$$

где $J_n(r)$ и $N_n(r)$ — функции Бесселя и Неймана соответственно, $K_n(r)$ — функция Макдональда и $I_n(r)$ — модифицированная функция Бесселя.

В заключение этого раздела приведем формулы для нулевой и первой гармоники функции напряжений Φ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \Phi_1, \quad \Phi_1 = \Phi_{11} \cos \varphi + \Phi_{12} \sin \varphi, \\ \Phi_0 &= a_0 J_0(r) + b_0 N_0(r) + c_0 K_0(r) + d_0 I_0(r), \\ \Phi_{11} &= a_{11} J_1(r) + b_{11} N_1(r) + c_{11} K_1(r) + d_{11} I_1(r), \\ \Phi_{12} &= a_{12} J_1(r) + b_{12} N_1(r) + c_{12} K_1(r) + d_{12} I_1(r). \end{aligned} \quad (27)$$

4. Сингулярные компоненты классического поля напряжений

Для определения классического поля напряжений используем соотношения (11), (25). Не зависящие от угловой переменной компоненты $\tau_{rr}^{(0)}$, $\tau_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\tau_{r\varphi}^{(0)}$ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tau_{rr}^{(0)} &= \frac{1}{r} \frac{d\Psi_0}{dr} = 2B_0 + \beta_0 + 2\beta_0 \ln r + \frac{\alpha_0}{r^2}, \\ \tau_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \frac{d^2\Psi_0}{dr^2} = 2B_0 + 3\beta_0 + 2\beta_0 \ln r - \frac{\alpha_0}{r^2}, \quad \tau_{r\varphi}^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\tau_{rr}^{(0)}$, $\tau_{\varphi\varphi}^{(0)}$ имеют сингулярное поведение при $r \rightarrow 0$. Обозначая сингулярные вклады в эти функции через $T_{rr}^{(0)}$, $T_{\varphi\varphi}^{(0)}$ соответственно, получаем для них представление

$$T_{rr}^{(0)} = 2\beta_0 \ln r + \frac{\alpha_0}{r^2} + \underline{O}(1), \quad T_{\varphi\varphi}^{(0)} = 2\beta_0 \ln r - \frac{\alpha_0}{r^2} + \underline{O}(1). \quad (28)$$

Поля $\tau_{rr}^{(1)}$, $\tau_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $\tau_{r\varphi}^{(1)}$ даются формулами

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2}, \quad \tau_{rr}^{(1)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}, \\ \tau_{r\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (29)$$

Комбинируя (29) с (25), получаем

$$\tau_{\varphi\varphi}^{(1)} = \left(\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} + 6\beta_1 r \right) \cos \varphi + \left(\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} + 6\beta_2 r \right) \sin \varphi. \quad (30)$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \varphi^2} = - \left(A_1 r + \frac{B_1}{r} + \alpha_1 r \ln r + \beta_1 r^3 \right) \cos \varphi - \left(A_2 r + \frac{B_2}{r} + \alpha_2 r \ln r + \beta_2 r^3 \right) \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \left(A_1 - \frac{B_1}{r^2} + \alpha_1 \ln r + \alpha_1 + 3\beta_1 r^2 \right) \cos \varphi + \left(A_2 - \frac{B_2}{r^2} + \alpha_2 \ln r + \alpha_2 + 3\beta_2 r^2 \right) \sin \varphi,$$

то отсюда и из (29) следует, что

$$\tau_{rr}^{(1)} = \left(-\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} + 2\beta_1 r \right) \cos \varphi + \left(-\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} + 2\beta_2 r \right) \sin \varphi. \quad (31)$$

Компонента поля напряжений $\tau_{r\varphi}^{(1)}$ равна

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}^{(1)} &= \cos \varphi \left(\frac{\Psi_{12}}{r^2} - \frac{\Psi'_{12}}{r} \right) + \sin \varphi \left(-\frac{\Psi_{11}}{r^2} + \frac{\Psi'_{11}}{r} \right) = \\ &= -\cos \varphi \frac{d}{dr} \left(\frac{\Psi_{12}}{r} \right) + \sin \varphi \frac{d}{dr} \left(\frac{\Psi_{11}}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя сюда Ψ_{11} , Ψ_{12} из (25), получаем для коэффициентов при $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ в (32) следующие представления:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\Psi_{11}}{r} \right) = -\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} + 2\beta_1 r, \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{\Psi_{12}}{r} \right) = -\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} + 2\beta_2 r.$$

Следовательно, (32) редуцируется к виду

$$\tau_{r\varphi}^{(1)} = -\cos \varphi \left(-\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} + 2\beta_2 r \right) + \sin \varphi \left(-\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} + 2\beta_1 r \right). \quad (33)$$

Сингулярные при $r \rightarrow 0$ вклады в поля $\tau_{rr}^{(1)}$, $\tau_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $\tau_{r\varphi}^{(1)}$ обозначим через $T_{rr}^{(1)}$, $T_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $T_{r\varphi}^{(1)}$ соответственно. Из (30), (31), (33) следует, что $T_{rr}^{(1)}$, $T_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $T_{r\varphi}^{(1)}$ равны:

$$T_{\varphi\varphi}^{(1)} = \left(\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} \right) \cos \varphi + \left(\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} \right) \sin \varphi + \underline{Q}(r), \quad (34)$$

$$T_{rr}^{(1)} = \left(-\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} \right) \cos \varphi + \left(-\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} \right) \sin \varphi + \underline{Q}(r), \quad (35)$$

$$T_{r\varphi}^{(1)} = -\cos \varphi \left(-\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} \right) + \sin \varphi \left(-\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} \right) + \underline{Q}(r). \quad (36)$$

5. Сингулярные компоненты нулевых гармоник неклассического поля напряжений

Из (12), (27) следует, что для нулевых гармоник $n_{\varphi\varphi}^0$, n_{rr}^0 неклассического поля напряжений справедливы представления в виде:

$$n_{\varphi\varphi}^0 = \frac{d^2 \Phi_0}{dr^2} = a_0 J_0''(r) + b_0 N_0''(r) + c_0 K_0''(r) + d_0 I_0''(r), \quad (37)$$

$$n_{rr}^0 = \frac{1}{r} \frac{d\Phi_0}{dr} = \frac{a_0}{r} J_0'(r) + \frac{b_0}{r} N_0'(r) + \frac{c_0}{r} K_0'(r) + \frac{d_0}{r} I_0'(r), \quad (38)$$

где штрих обозначает производную по переменной r .

Поскольку для цилиндрических функций справедливы соотношения

$$\begin{aligned} J'_0(r) &= -J_1(r), \quad 2J'_1(r) = J_0(r) - J_2(r), \quad N'_0(r) = -N_1(r), \quad 2N'_1(r) = N_0(r) - N_2(r), \\ K'_0(r) &= -K_1(r), \quad -2K'_1(r) = K_0(r) + K_2(r), \\ 2I'_1(r) &= I_0(r) + I_2(r), \quad I'_0(r) = I_1(r), \end{aligned} \quad (39)$$

то (37) можно записать в следующем виде:

$$n_{\varphi\varphi}^0 = -\frac{a_0}{2}[J_0(r) - J_2(r)] - \frac{b_0}{2}[N_0(r) - N_2(r)] + \frac{c_0}{2}[K_0(r) + K_2(r)] + \frac{d_0}{2}[I_0(r) + I_2(r)]. \quad (40)$$

Сингулярные вклады при $r \rightarrow 0$ в правой части (40) порождаются функциями Неймана $N_0(r)$, $N_2(r)$ и Макдональда $K_0(r)$, $K_2(r)$. Обозначим суммарный сингулярный вклад через $S_{\varphi\varphi}^{(0)}$, тогда

$$S_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\frac{b_0}{2}[N_0(r) - N_2(r)] + \frac{c_0}{2}[K_0(r) + K_2(r)].$$

Используя асимптотические формулы при $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} N_0(r) &= \frac{2}{\pi} \ln r + \underline{O}(1), \quad N_2(r) = -\frac{4}{\pi r^2} + \underline{O}(1), \\ K_0(r) &= -\ln r + \underline{O}(1), \quad K_2(r) = \frac{2}{r^2} + \underline{O}(1), \end{aligned} \quad (41)$$

получаем

$$S_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\frac{b_0}{2} \left(\frac{2}{\pi} \ln r + \frac{4}{\pi r^2} \right) + \frac{c_0}{2} \left(-\ln r + \frac{2}{r^2} \right) + \underline{O}(1). \quad (42)$$

Подставим выражение (5) для производной в (38):

$$n_{rr}^{(0)} = -\frac{a_0}{r} J_1(r) - \frac{b_0}{r} N_1(r) - \frac{c_0}{r} K_1(r) + \frac{d_0}{r} I_1(r).$$

Используя рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} J_1(r) &= J_0(r) + J_2(r), \quad \frac{2}{r} I_1(r) = I_0(r) - I_2(r), \\ \frac{2}{r} N_1(r) &= N_0(r) + N_2(r), \quad -\frac{2}{r} K_1(r) = K_0(r) - K_2(r) \end{aligned} \quad (43)$$

и учитывая, что функции $J_0(r)$, $J_2(r)$, $I_0(r)$, $I_2(r)$ не имеют особенностей при $r \rightarrow 0$, получаем, что сингулярный вклад $S_{rr}^{(0)}$ в $n_{rr}^{(0)}$ дается функциями Неймана $N_1(r)$ и Макдональда $K_1(r)$:

$$S_{rr}^{(0)} = -\frac{b_0}{r} N_1(r) - \frac{c_0}{r} K_1(r).$$

Следовательно,

$$S_{rr}^{(0)} = -\frac{b_0}{2}[N_0(r) + N_2(r)] + \frac{c_0}{2}[K_0(r) - K_2(r)].$$

Отсюда и из (5) следует формула для сингулярного вклада $S_{rr}^{(0)}$:

$$S_{rr}^{(0)} = -\frac{b_0}{2} \left(\frac{2}{\pi} \ln r - \frac{4}{\pi r^2} \right) - \frac{c_0}{2} \left(\ln r + \frac{2}{r^2} \right) + \underline{O}(1).$$

6. Сингулярные нулевые гармоники полного поля напряжений и удаление сингулярностей

Из (10) следует, что нулевые гармоники полных полей напряжений $\sigma_{rr}^{(0)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$ равны

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = \tau_{\varphi\varphi}^{(0)} + n_{\varphi\varphi}^{(0)}, \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \tau_{rr}^{(0)} + n_{rr}^{(0)}.$$

Сингулярные вклады в $\sigma_{rr}^{(0)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$ обозначим через $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\Sigma_{rr}^{(0)}$ соответственно:

$$\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = T_{\varphi\varphi}^{(0)} + S_{\varphi\varphi}^{(0)}, \quad \Sigma_{rr}^{(0)} = T_{rr}^{(0)} + S_{rr}^{(0)}.$$

Отсюда и из (28), (42), (43) для них следует представление

$$\begin{aligned} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \left(2\beta_0 - \frac{b_0}{\pi} - \frac{c_0}{2}\right) \ln r - \left(\alpha_0 + \frac{2b_0}{\pi} - c_0\right) \frac{1}{r^2} + \underline{O}(1), \\ \Sigma_{rr}^{(0)} &= \left(2\beta_0 - \frac{b_0}{\pi} - \frac{c_0}{2}\right) \ln r + \left(\alpha_0 + \frac{2b_0}{\pi} - c_0\right) \frac{1}{r^2} + \underline{O}(1). \end{aligned}$$

Выше было сформулировано требование, чтобы функции $\Sigma_{\varphi\varphi}$, Σ_{rr} не имели особенностей при $r \rightarrow 0$. Это можно гарантировать при обращении в нуль коэффициентов при сингулярностях, что приводит к двум условиям:

$$2\beta_0 - \frac{b_0}{\pi} - \frac{c_0}{2} = 0, \quad \alpha_0 + \frac{2b_0}{\pi} - c_0 = 0.$$

Выбирая в качестве независимых параметров коэффициенты α_0 , β_0 , определяем

$$c_0 = \frac{\alpha_0}{2} + 2\beta_0, \quad b_0 = -\frac{\pi\alpha_0}{4} + \pi\beta_0.$$

7. Сингулярные компоненты первой гармоники неклассического поля напряжений

Из (15), (27) следует, что первая гармоника $n_{\varphi\varphi}^{(1)}$ неклассического поля напряжений дается формулой

$$\begin{aligned} n_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} &= (a_{11}J_1''(r) + b_{11}N_1''(r) + c_{11}K_1''(r) + d_{11}I_1''(r)) \cos \varphi + \\ &+ (a_{21}J_1''(r) + b_{21}N_1''(r) + c_{21}K_1''(r) + d_{21}I_1''(r)) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Сингулярности в $n_{\varphi\varphi}^{(1)}$ порождаются функциями Неймана $N_1(r)$ и Макдональда $K_1(r)$. Обозначая суммарный сингулярный вклад через $S_{\varphi\varphi}^{(1)}$, получим

$$S_{\varphi\varphi}^{(1)} = [b_{11}N_1''(r) + c_{11}K_1''(r)] \cos \varphi + [b_{12}N_1''(r) + c_{12}K_1''(r)] \sin \varphi. \quad (44)$$

Поскольку

$$N_2'(r) = \frac{1}{2}[N_1(r) - N_3(r)], \quad K_2'(r) = -\frac{1}{2}[K_1(r) + K_3(r)], \quad (45)$$

то, используя (5), запишем вторые производные от $N_1(r)$, $K_1(r)$ в виде

$$\begin{aligned} N_1''(r) &= \frac{1}{2}[N_0'(r) - N_2'(r)] = \frac{1}{4}[N_3(r) - 3N_1(r)], \\ K_1''(r) &= -\frac{1}{2}[K_0'(r) + K_2'(r)] = \frac{1}{4}[3K_1(r) + K_3(r)]. \end{aligned}$$

Тогда (44) редуцируется к виду

$$\begin{aligned} S_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{4}[b_{11}(N_3(r) - 3N_1(r)) + c_{11}(3K_1(r) + K_3(r))] \cos \varphi + \\ &+ \frac{1}{4}[b_{12}(N_3(r) - 3N_1(r)) + c_{12}(3K_1(r) + K_3(r))] \sin \varphi. \end{aligned} \quad (46)$$

Поскольку $\partial^2 \Phi_1 / \partial \varphi^2 = -\Phi_1$, то первая гармоника $n_{rr}^{(1)}$ равна

$$\begin{aligned} n_{rr}^{(1)} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = -\frac{\Phi_1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi_1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi_{11}}{r} \right) \cos \varphi + \frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi_{12}}{r^2} \right) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Суммарный сингулярный вклад $S_{rr}^{(1)}$ в $n_{rr}^{(1)}$ при $r \rightarrow 0$ определяется функциями Неймана $N_1(r)$ и Макдональда $K_1(r)$ в Φ_{12} , Φ_{11} (27), и он равен

$$\begin{aligned} S_{rr}^{(1)} &= \left[b_{11} \frac{d}{dr} \left(\frac{N_1(r)}{r} \right) + c_{11} \frac{d}{dr} \left(\frac{K_1(r)}{r} \right) \right] \cos \varphi + \\ &+ \left[b_{12} \frac{d}{dr} \left(\frac{N_1(r)}{r} \right) + c_{12} \frac{d}{dr} \left(\frac{K_1(r)}{r} \right) \right] \sin \varphi. \end{aligned}$$

Из (43), (45) следует, что

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{N_1}{r} \right) = \frac{1}{2}(N_0' + N_2') = -\frac{1}{4}(N_1 + N_3), \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{K_1}{r} \right) = \frac{1}{2}(K_2' - K_0') = \frac{1}{4}(K_1 - K_3). \quad (47)$$

Это позволяет записать (5) в виде

$$\begin{aligned} S_{rr}^{(1)} &= \frac{1}{4}[b_1(N_1(r) + N_3(r)) - c_1(K_1(r) - K_3(r))] \cos \varphi - \\ &- \frac{1}{4}[b_2(N_1(r) + N_3(r)) - c_2(K_1(r) - K_3(r))] \sin \varphi. \end{aligned} \quad (48)$$

Неклассическая компонента поля напряжений $n_{r\varphi}^{(1)}$ равна

$$\begin{aligned} n_{r\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} = \left(-\frac{\Phi_{12}'}{r} + \frac{\Phi_{12}}{r^2} \right) \cos \varphi + \left(\frac{\Phi_{11}'}{r} - \frac{\Phi_{11}}{r^2} \right) \sin \varphi = \\ &= -\frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi_{12}}{r} \right) \cos \varphi + \frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi_{11}}{r^2} \right) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Функции Неймана $N_1(r)$ и Макдональда $K_1(r)$ в (27) порождают сингулярности в $n_{r\varphi}^{(1)}$, тогда представление $S_{r\varphi}^{(1)}$ для сингулярных вкладов дается формулой

$$S_{r\varphi}^{(1)} = \left[b_{12} \frac{d}{dr} \left(\frac{N_1}{r} \right) + c_{12} \frac{d}{dr} \left(\frac{K_1}{r} \right) \right] \cos \varphi + \\ + \left[b_{11} \frac{d}{dr} \left(\frac{N_1}{r} \right) + c_{11} \frac{d}{dr} \left(\frac{K_1}{r} \right) \right] \sin \varphi. \quad (49)$$

Используя (47), получаем для (49) представление

$$S_{r\varphi}^{(1)} = \frac{1}{4} [b_{12}(N_1 + N_3) - c_{12}(K_1 - K_3)] \cos \varphi - \\ - \frac{1}{4} [b_{11}(N_1 + N_3) - c_{11}(K_1 - K_3)] \sin \varphi. \quad (50)$$

8. Удаление сингулярностей в первой гармонике полного поля напряжений

Используя (34)–(36), (46), (48), (50), запишем представление для сингулярных вкладов $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $\Sigma_{rr}^{(1)}$, $\Sigma_{r\varphi}^{(1)}$ в полных полях напряжений $\sigma_{rr}^{(1)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $\sigma_{r\varphi}^{(1)}$ соответственно:

$$\Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = T_{\varphi\varphi}^{(1)} + S_{\varphi\varphi}^{(1)} = \left(\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} \right) \cos \varphi + \left(\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} \right) \sin \varphi + \\ + \frac{1}{4} [b_{11}(N_3(r) - 3N_1(r)) + c_{11}(3K_1(r) + K_3(r))] \cos \varphi + \\ + \frac{1}{4} [b_{12}(N_3(r) - 3N_1(r)) + c_{12}(3K_1(r) + K_3(r))] \sin \varphi, \quad (51)$$

$$\Sigma_{rr}^{(1)} = T_{rr}^{(1)} + S_{rr}^{(1)} = \left(-\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} \right) \cos \varphi + \left(-\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} \right) \sin \varphi - \\ - \frac{1}{4} [b_{11}(N_1(r) + N_3(r)) - c_{11}(K_1(r) - K_3(r))] \cos \varphi - \\ - \frac{1}{4} [b_{12}(N_1(r) + N_3(r)) - c_{12}(K_1(r) - K_3(r))] \sin \varphi, \quad (52)$$

$$\Sigma_{r\varphi}^{(1)} = T_{r\varphi}^{(1)} + S_{r\varphi}^{(1)} = - \left(-\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} \right) \cos \varphi + \left(-\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} \right) \sin \varphi + \\ + \frac{1}{4} [b_{21}(N_1 + N_3) - c_{21}(K_1 - K_3)] \cos \varphi - \\ - \frac{1}{4} [b_{11}(N_1 + N_3) - c_{11}(K_1 - K_3)] \sin \varphi. \quad (53)$$

Для $N_1(r)$, $N_3(r)$, $K_1(r)$, $K_3(r)$ используем формулы асимптотического разложения:

$$N_1(r) = -\frac{2}{\pi r} + \underline{O}(r \ln r), \quad N_3(r) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{16}{r^3} + \frac{2}{r} \right) + \underline{O}(r),$$

$$K_1(r) = \frac{1}{r} + \underline{O}(r \ln r), \quad K_3(r) = \frac{8}{r^3} - \frac{1}{r} + \underline{O}(r).$$

Тогда (51)–(53) записываются в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = & \left(\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} \right) \cos \varphi + \left(\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} \right) \sin \varphi + \\ & + \left[\frac{b_{11}}{\pi} \left(-\frac{4}{r^3} + \frac{1}{r} \right) + \frac{c_{11}}{2} \left(\frac{4}{r^3} + \frac{1}{r} \right) \right] \cos \varphi + \\ & + \left[\frac{b_{12}}{\pi} \left(-\frac{4}{r^3} + \frac{1}{r} \right) + \frac{c_{12}}{2} \left(\frac{4}{r^3} + \frac{1}{r} \right) \right] \sin \varphi + \underline{O}(r \ln r), \quad (54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{rr}^{(1)} = & \left(-\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} \right) \cos \varphi + \left(-\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} \right) \sin \varphi + \\ & + \left[\frac{b_{11}}{\pi} \left(\frac{4}{r^3} + \frac{1}{r} \right) + \frac{c_{11}}{2} \left(-\frac{4}{r^3} + \frac{1}{r} \right) \right] \cos \varphi + \\ & + \left[\frac{b_{12}}{\pi} \left(\frac{4}{r^3} + \frac{1}{r} \right) + \frac{c_{12}}{2} \left(-\frac{4}{r^3} + \frac{1}{r} \right) \right] \sin \varphi + \underline{O}(r \ln r), \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{r\varphi}^{(1)} = & -\cos \varphi \left(-\frac{2B_2}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} \right) + \sin \varphi \left(-\frac{2B_1}{r^3} + \frac{\alpha_1}{r} \right) + \\ & + \left[-\frac{b_{12}}{\pi} \left(\frac{4}{r^3} + \frac{1}{r} \right) + \frac{c_{12}}{2} \left(\frac{4}{r^3} - \frac{1}{r} \right) \right] \cos \varphi - \\ & - \left[-\frac{b_{11}}{\pi} \left(\frac{4}{r^3} + \frac{1}{r} \right) + \frac{c_{11}}{2} \left(\frac{4}{r^3} - \frac{1}{r} \right) \right] \sin \varphi + \underline{O}(r \ln r). \quad (56) \end{aligned}$$

Теперь мы покажем, что функции $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $\Sigma_{rr}^{(1)}$, $\Sigma_{r\varphi}^{(1)}$ могут не иметь особенностей при $r \rightarrow 0$ при определенном выборе постоянных B_1 , B_2 , α_1 , α_2 , b_{11} , b_{12} , c_{11} , c_{12} .

Приравняем нулю коэффициенты при $1/r^3$, $1/r$ для $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ в (54), в результате получаем

$$\frac{1}{r^3} \cos \varphi : 2B_1 - \frac{4b_{11}}{\pi} + 2c_{11} = 0; \quad \frac{1}{r^3} \sin \varphi : 2B_2 - \frac{4b_{12}}{\pi} + 2c_{12} = 0, \quad (57)$$

$$\frac{1}{r} \cos \varphi : \alpha_1 + \frac{b_{11}}{\pi} + \frac{c_{11}}{2} = 0; \quad \frac{1}{r} \sin \varphi : \alpha_2 + \frac{b_{12}}{\pi} + \frac{c_{12}}{2} = 0. \quad (58)$$

По аналогии получаем ограничения на коэффициенты в (55):

$$\frac{1}{r^3} \cos \varphi : -2B_1 + \frac{4b_{11}}{\pi} - 2c_{11} = 0; \quad \frac{1}{r^3} \sin \varphi : -2B_2 + \frac{4b_{12}}{\pi} - 2c_{12} = 0, \quad (59)$$

$$\frac{1}{r} \cos \varphi : \alpha_1 + \frac{b_{11}}{\pi} + \frac{c_{11}}{2} = 0; \quad \frac{1}{r} \sin \varphi : \alpha_2 + \frac{b_{12}}{\pi} + \frac{c_{12}}{2} = 0. \quad (60)$$

Наконец, из (56) следуют условия обращения сингулярностей в нуль:

$$\frac{1}{r^3} \cos \varphi : -2B_2 + \frac{4b_{12}}{\pi} - 2c_{12} = 0; \quad \frac{1}{r^3} \sin \varphi : -2B_1 + \frac{4b_{11}}{\pi} - 2c_{11} = 0, \quad (61)$$

$$\frac{1}{r} \cos \varphi : -\alpha_2 - \frac{b_{12}}{\pi} - \frac{c_{12}}{2} = 0; \quad \frac{1}{r} \sin \varphi : \alpha_1 + \frac{b_{11}}{\pi} + \frac{c_{11}}{2} = 0. \quad (62)$$

Видно, что условие (57) совпадает с (59), (61), и (58) совпадает с (60), (62). Тогда независимыми являются соотношения

$$2B_1 - \frac{4b_{11}}{\pi} + 2c_{11} = 0, \quad 2B_2 - \frac{4b_{12}}{\pi} + 2c_{12} = 0; \quad \alpha_1 + \frac{b_{11}}{\pi} + \frac{c_{11}}{2} = 0, \quad \alpha_2 + \frac{b_{12}}{\pi} + \frac{c_{12}}{2} = 0.$$

Отсюда находим

$$b_{11} = \frac{\pi B_1}{4} - \frac{\alpha_1}{2}, \quad c_{11} = -\alpha_1 - \frac{B_1}{2}, \quad b_{12} = \frac{\pi B_2}{4} - \frac{\alpha_2}{2}, \quad c_{12} = -\alpha_2 - \frac{B_2}{2},$$

в предположении, что $B_1, B_2, \alpha_1, \alpha_2$ заданы.

Вывод

Следует отметить, что авторы в начале своего исследования проблемы удаления сингулярностей не указали условия, при которых они появляются. Однако представленный в работе анализ показал, что мы «боролись» с сингулярностью, природа происхождения которой имеет кинематический характер. Дело в том, что построение решения для равновесного плоско-деформированного состояния сплошной среды выполнялось в полярных координатах (r, φ) , а якобиан преобразования к ним от прямоугольных имеет особенность при $r = 0$. Таким образом, суть представленной проблемы заключалась в том, что поля напряжений, вычисляемые в рамках классической теории упругости, имеют особенность, связанную с выбором кинематического описания в полярных координатах. Поставленная в данной работе задача состояла в том, чтобы для поля напряжений в полярных координатах предложить рецепт получения решения без сингулярностей при $r = 0$.

Реализованная в работе идея, использованная при конструировании несингулярного решения, была основана на свойстве уравнений сплошной среды: они не изменяются, если к классическому решению добавить дополнительное поле, удовлетворяющее этим уравнениям. В результате полное поле внутренних напряжений будет складываться из классического поля упругих напряжений и дополнительного неклассического вклада. Построение этих полей в работе выполнено на основе единого подхода путем введения функции напряжений Эйри. В классической теории упругости формулировка уравнения для этой функции была основана на использовании линейных соотношений теории упругости и классических условий совместности Сен-Венана, что приводило к бигармоническому уравнению. С точки зрения физики его можно рассматривать как частный случай спектрального уравнения для бигармонического оператора при нулевом собственном значении. Таким образом, функцию напряжений Эйри можно представить в виде суммы двух вкладов: классической функции напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению, и дополнительной компоненты, которая является решением спектрального бигармонического уравнения. Это уравнение появляется на пути отказа от классических

условий совместности Сен-Венана и соответствует переходу к неевклидовой модели сплошной среды, в которой предполагается, что внутренняя геометрия среды не совпадает с геометрией евклидова пространства наблюдателя.

Совпадение характера сингулярностей классического и неклассического полей является большой удачей. Однако такое свойство неслучайно. Дело в том, что при формулировке уравнения для неклассической компоненты функции напряжений мы сохранили структуру дифференциального оператора, присутствующего в уравнении для классической компоненты. Как раз этот оператор определяет тип «классических» сингулярностей, которые сохраняются при переходе к неевклидовой модели. При этом условие обращения в нуль сингулярной компоненты полного поля внутренних напряжений приводит к согласованному выбору коэффициентов при сингулярностях классического и неклассического полей: один набор коэффициентов выражается через другой. Таким образом, число феноменологических параметров, необходимых для определения, остается одинаковым как для классической, так и для неевклидовой моделей.

Список литературы

- [1] Черепанов Г. П., *Механика хрупкого разрушения*, Наука, М., 1974.
- [2] Barber J. R., “Wedge Problems”, In *Elasticity. Part of the book series: Solid Mechanics and Its Applications*, v. 172, Springer, Dordrecht, 2010, 149–170.
- [3] Cai W., Arsenlis A., Weinberger C., Bulatov V., “A non-singular continuum theory of dislocations”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 54(3), 2006, 561–587.
- [4] Lazar M., “Non-singular dislocation loops in gradient elasticity”, *Physics Letters A*, v. 376(21), 2012, 1757–1758.
- [5] Lazar M., “The fundamentals of non-singular dislocations in the theory of gradient elasticity: Dislocation loops and straight dislocations”, *International Journal of Solids and Structure*, v. 50(2), 2013, 352–262.
- [6] Lazar M., Po G., “The non-singular Green tensor of Mindlin’s anisotropic gradient elasticity with separable weak non-locality”, *Physics Letters A*, v. 379(24-25), 2018, 1538—1543.
- [7] Po G., Lazar M., Admal N. C., Ghoniem N., “A non-singular theory of dislocations in anisotropic crystals”, *International Journal of Plasticity*, v. 379(24-25), 2018, 1—22.
- [8] Kioseoglou J., Konstantopoulos I., Ribarik et G. al., “Nonsingular dislocation and crack fields: implications to small volumes”, *Microsystem Technologies*, v. 15, 2009, 117–121.
- [9] Aifantis E. C., “A note on gradient elasticity and nonsingular crack fields”, *J. Mech. Behav. Mater.*, v. 20, 2011, 103–105.
- [10] Konstantopoulos I., Aifantis E. C., “Gradient elasticity applied to a crack”, *J. Mech. Behav. Mater.*, v. 22, 2013, 193–201.
- [11] Parisi K., Konstantopoulos I., Aifantis E. C., “Nonsingular Solutions of GradEla Models for Dislocations: An Extension to Fractional GradEla”, *J. Mech. Behav. Mater.*, v. 3(03n04), 2018, A. 1840013.
- [12] Васильев В. В., “Сингулярные решения в задачах механики и математической физики”, *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.*, т. 4, 2018, 48–65.
- [13] Васильев В. В., Лурье С. А., “О сингулярности решения в плоской задаче теории упру-

гости для консольной полосы”, *Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела.*, т. 4, 2013, 40–49.

- [14] Васильев В. В., Лурье С. А., “Нелокальные решения сингулярных задач математической физики и механики”, *Прикладная математика и механика*, т. 82, 2018, 459–471.
- [15] Васильев В. В., Лурье С. А., “Дифференциальные уравнения и проблема сингулярности решений в прикладной механике и математике”, *Прикладная механика и техническая физика*, т. 64, 2023, 114–127.
- [16] Kondo K., “On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding”, *Proc. Japan. Nat. Congr. Appl. Mech.*, v. 2, 1952, 41–47.
- [17] Bilby B. A., Bullough R., Smith E., “Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Reimannian geometry”, *Proceedings of the Royal Society A*, v. 231, 1955, 263–273.
- [18] Stojanovic R., “On the stress functions in elastodynamics”, *Acta Mechanica*, v. 24(3), 1976, 209–217.
- [19] Kroner E., “Incompatibility, defects, and stress functions in the mechanics of generalized continua”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 21(7), 1985, 747–756.
- [20] Edelen D. G. B., “A correct, globally defined solution of the screw dislocation problem in the gauge theory of defects”, *International Journal of Engineering Science*, v. 34(1), 1996, 81–86.
- [21] Guzev M. A., *Non-Euclidean models of elastoplastic materials with structure defects*, Lambert Academic Publishing, 2010.
- [22] Guzev M. A., Liu W., Qi C., “Non-Euclidean model for description of residual stresses in planar deformations”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 90, 2021, 615–623.
- [23] Guzev M. A., Riabokon E. P., “Construction of Nonsingular Stress Fields for Non-Euclidean Model in Planar Deformations”, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, v. 14(6), 2021, 815–821.
- [24] Годунов С. К., *Элементы механики сплошной среды*, Наука, М., 1978.
- [25] Гузев М. А., “Структура кинематического и силового поля в Римановой модели сплошной среды”, *ПМТФ*, т. 52(5), 2011, 39–48.

Поступила в редакцию
25 апреля 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного
задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

Guzev M. A.¹, Chernysh E. V.¹ I. Singularity removal in the elasticity theory solutions based on a non-euclidean model of a continuous medium: the case of zero and first harmonics. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2025. V. 25. No 1. P. 21–38.

¹Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

A representation for singularities in the zero and first harmonics of the classical elastic stress field was obtained using the Airy stress function for a plane-strained state of a continuous medium. For a non-Euclidean model of a continuous medium, the structure of the internal stress field of a plane-strained state was shown to consist of a classical elastic stress field and a non-classical stress field determined through the incompatibility function of deformations. The singular contribution of the zero and first harmonics of the non-classical stress field is calculated. The requirement of regular behavior of the internal stress field allowed to compensate for the singularity in the elasticity theory solution by choosing a singularity of the non-classical stress field.

Key words: *Airy stress function, non-Euclidean model of a continuous medium, deformation incompatibility.*