

УДК 519.17

MSC2020 60-08, 05C40, 05C90

© А. С. Лосев¹

Доминантные связи в высоконадежных двухполюсных соединениях

В работе исследуется задача повышения вероятности несвязности двухполюсного высоконадежного графа. В качестве решения предлагается идея выделения доминантных связей, численные характеристики которых формируют асимптотическую оценку вероятности связности графа. Доказывается, что изменение пропускной способности таких связей наиболее значимо отражается на вероятности несвязности всего графа.

Ключевые слова: *связность, двухполюсник, доминантные связи, сетевые структуры.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202505>

Введение

Внедрение информационных технологий и искусственного интеллекта в управление различными системами привело к существенному увеличению требований к их надежности, особенно если речь идёт о высоконадёжных системах, которые должны обеспечивать непрерывное выполнение возложенных на них функций. К таким системам относятся различные измерительные комплексы по сбору, хранению и анализу навигационной информации, автоматизированные цеха, элементы авиакосмических систем и атомных электростанций. Их отличительной особенностью является высокая степень риска катастрофы в случае выхода из строя.

Одной из важнейших задач при проектировании и функционировании высоконадежной системы является задача повышения отказоустойчивости за счет перераспределения нагрузки или резервирования её элементов. В теории функционирования систем известны различные методы резервирования основных элементов, эти элементы способствуют повышению отказоустойчивости и живучести [1–4]. При этом вопрос рационального использования имеющихся ресурсов остается открытым, так как достижение полной отказоустойчивости через избыточное резервирование приводит к сильному удорожанию всей системы и стоимости её содержания [5]. Вдобавок можно отметить значительный рост размерности самих систем, особенно в

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: losev@iam.dvo.ru

области информационных технологий. В этом случае даже частичное дублирование важных узлов или связей, например, смешанным резервированием с использованием искусственного интеллекта [6] или доведение системы до симметрии [7, 8] является весьма затратной процедурой и требует дополнительных ресурсов.

Принимая во внимание, что живучесть и целостность системы в обобщенном представлении основана на связности соответствующей теоретико-графовой модели, в настоящей работе рассматриваются способы воздействия на вероятность связности высоконадежных двухполюсных соединений через незначительное влияние на физические характеристики их ребер, такие как пропускная способность, длина и вес ребра. Также в работе доказывается, что максимальный эффект достигается через воздействие на пропускную способность отдельных ребер, которые образуют множество доминантных связей $\mathcal{T}$. Они ничем не отличаются по своим характеристикам от остальных ребер, но вносят определяющий вклад в оценку вероятности связности всего соединения. Изменение численных характеристик таких ребер позволяет изменить связность графа без дополнительного резервирования или дублирования ребер.

Основные результаты

Введем в рассмотрение двухполюсник $\Gamma(U, W)$ в виде неориентированного графа с конечным множеством вершин U и ребер W без петель и кратных ребер. Зафиксируем в графе Γ начальную u_* и конечную v_* вершины и обозначим $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ множество всех разрезов графа между u_* и v_* с минимальным по включению числом ребер. Положим, что каждое ребро $w \in W$ имеет пропускную способность c_w и находится в неработоспособном состоянии независимо от другого ребра с вероятностью $\bar{p}_w$, $0 < \bar{p}_w < 1$. В таком случае граф Γ считается несвязным, если существует хотя бы один разрез из множества $\mathcal{L}$, состоящий полностью из неработающих ребер.

В работах [9, 10] рассмотрены асимптотические соотношения, позволяющие оценить $\bar{P}_\Gamma$ вероятность несвязности графа Γ . А именно доказана теорема 1, которая позволяет вычислить вероятность несвязности графа Γ , состоящего из высоконадежных ребер $\bar{p}_w(h) \rightarrow 0$, $w \in W$ через выделение доминантных связей.

Теорема 1. Пусть $\bar{p}_w(h) \sim h^{c_w}$ при $h \rightarrow 0$, где $c_w > 0$, $w \in W$. Тогда

$$\bar{P}_\Gamma \sim kh^f, \quad (1)$$

где

$$f = \min_{L \in \mathcal{L}} f_L, \quad f_L = \sum_{w \in L} c_w.$$

Здесь f — минимальная пропускная способность, f_L — пропускная способность разреза L , k — количество разрезов с минимальной пропускной способностью f в графе Γ .

Заметим, что асимптотическая оценка (1) вероятности несвязности двухполюсника Γ строится на основе пропускной способности отдельных ребер, которые формируют множество доминантных связей $\mathcal{T} = \{w \in L : f = f_L\}$. Выделим подмножество

разрезов $\tilde{\mathcal{L}} = \{L \in \mathcal{L} : f_L = f\} \subseteq \mathcal{L}$, каждый из которых в силу определения множества $\mathcal{T}$ состоит из доминантных связей. Далее, везде под $N(A)$ будем понимать число элементов, содержащихся во множестве A .

Утверждение 1. Если $\bar{p}_w(h) \sim h^{c(w)}$ при $h \rightarrow 0$, где $c_w > 0$, $w \in W$, то при замене $c_{w'}$ на $c_{w'} - \varepsilon$ у одного произвольного $w' \in \mathcal{T}$ получим

$$\bar{P}_\Gamma \sim k' h^{f-\varepsilon},$$

где $0 < k' \leq k$, $0 < \varepsilon < c_{w'}$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что

$$\bar{P}_\Gamma \sim k h^f = \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}} \prod_{w \in L} h^{c_w}.$$

Зафиксируем ребро $w' \in \mathcal{T}$ и положим $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}' \cup \tilde{\mathcal{L}}''$, где $\tilde{\mathcal{L}}' = \{L \in \tilde{\mathcal{L}} : w' \notin L\}$, а $\tilde{\mathcal{L}}'' = \{L \in \tilde{\mathcal{L}} : w' \in L\}$. Тогда

$$\bar{P}_\Gamma \sim \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}'} \prod_{w \in L} h^{c_w} + \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} \prod_{w \in L} h^{c_w}.$$

Выполнив замену $c_{w'}$ на $c_{w'} - \varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} \bar{P}_\Gamma &\sim \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}'} \prod_{w \in L} h^{c_w} + \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} \left(h^{c_{w'} - \varepsilon} \prod_{w \in L \setminus w'} h^{c_w} \right) = \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}'} \prod_{w \in L} h^{c_w} + \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} \left(h^{-\varepsilon} \prod_{w \in L} h^{c_w} \right) = \\ &= \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}'} h^f + \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} h^{f-\varepsilon} = \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} h^{f-\varepsilon} \left(1 + \frac{\sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}'} h^f}{\sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} h^{f-\varepsilon}} \right). \end{aligned}$$

При условиях $h \rightarrow 0$ и $0 < \varepsilon < c_{w'}$ и обозначении $k' = N(\tilde{\mathcal{L}}'')$

$$\bar{P}_\Gamma \sim N(\tilde{\mathcal{L}}'') h^{f-\varepsilon} \left(1 + \frac{N(\tilde{\mathcal{L}}')}{N(\tilde{\mathcal{L}}'')} h^\varepsilon \right) = k' h^{f-\varepsilon} (1 + o(1)) \sim k' h^{f-\varepsilon}, \quad h \rightarrow 0.$$

□

Утверждение 2. Если $\bar{p}_w(h) \sim h^{c_w}$ при $h \rightarrow 0$, где $c_w > 0$, $w \in W$, то при замене $c_{w'}$ на $c_{w'} + \varepsilon$ у одного произвольного $w' \in \mathcal{T}$ получим

а) при $0 < \varepsilon$, $0 < k' < k$

$$\bar{P}_\Gamma \sim (k - k') h^f,$$

б) при $k = k'$, $0 < \varepsilon < \min_{L \in \mathcal{L} \setminus \tilde{\mathcal{L}}} |f - f_L|$

$$\bar{P}_\Gamma \sim k h^{f+\varepsilon}.$$

Доказательство. Руководствуясь аналогичными рассуждениями, проведенными для утверждения 1, выполним замену $c_{w'}$ на $c_{w'} + \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{P}_\Gamma &\sim \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}'} \prod_{w \in L} h^{c_w} + \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} \left(h^{c_{w'} + \varepsilon} \prod_{w \in L \setminus w'} h^{c_w} \right) = \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}'} \prod_{w \in L} h^{c_w} + \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} \left(h^\varepsilon \prod_{w \in L} h^{c_w} \right) = \\ &= \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}'} h^f + \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} h^{f+\varepsilon} = \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}'} h^f \left(1 + \frac{\sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} h^{f+\varepsilon}}{\sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}'} h^f} \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $N(\tilde{\mathcal{L}}) = N(\tilde{\mathcal{L}}') + N(\tilde{\mathcal{L}}'')$, и при условии $h \rightarrow 0$ и $0 < \varepsilon$ получим

$$\begin{aligned} \bar{P}_\Gamma &\sim N(\tilde{\mathcal{L}}') h^f \left(1 + \frac{N(\tilde{\mathcal{L}}'')}{N(\tilde{\mathcal{L}}')} h^\varepsilon \right) = N(\tilde{\mathcal{L}}') h^f (1 + o(1)) \sim N(\tilde{\mathcal{L}}') h^f = \\ &= (N(\tilde{\mathcal{L}}) - N(\tilde{\mathcal{L}}'')) h^f = (k - k') h^f, \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В случае, если $k = k'$, то $N(\tilde{\mathcal{L}}) = N(\tilde{\mathcal{L}}'')$ и, следовательно, $N(\tilde{\mathcal{L}}') = 0$. Тогда $\tilde{\mathcal{L}}' = \{L \in \tilde{\mathcal{L}} : w' \notin L\} = \emptyset$ и

$$\bar{P}_\Gamma \sim \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} \left(h^{c_{w'} + \varepsilon} \prod_{w \in L \setminus w'} h^{c_w} \right) = \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} \left(h^\varepsilon \prod_{w \in L} h^{c_w} \right) = \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}''} h^{f+\varepsilon} = k h^{f+\varepsilon}.$$

□

Рассмотрим в качестве примера неориентированный граф $\Gamma(U, W)$ (см. рис. 1), который в терминологии работы [11] называется эквивалентной схемой трансформатора.

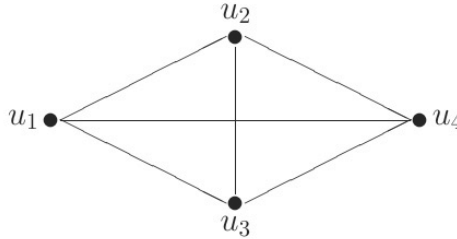


Рис. 1. Универсальная эквивалентная схема трансформатора.

Положим $c_{12} = 0.2$, $c_{13} = 0.35$, $c_{24} = 0.32$, $c_{34} = 0.52$, $c_{14} = 0.6$, $c_{23} = 0.5$, тогда по теореме 1 получаем $\bar{P}_\Gamma \sim h^{1.15}$. В этом случае множество доминантных связей

$$\mathcal{T} = \{(u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_1, u_4)\}$$

и, по утверждению 1, замена $c_{w'}$ на $c_{w'} - \varepsilon$ любого $w' \in \mathcal{T}$ приводит к существенному изменению $\bar{P}_\Gamma$. Действительно, при $h = 0.0001$ и $\varepsilon = 0.15$ получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned}\bar{P}_\Gamma &= 0.0000251189, & \bar{P}_\Gamma^* &= 0.0000269629, & \bar{P}'_\Gamma &= 0.0001, \\ \bar{P}_{\Gamma(1\ 2)}^* &= 0.000101915, & \bar{P}_{\Gamma(1\ 3)}^* &= 0.000102012, & \bar{P}_{\Gamma(1\ 4)}^* &= 0.000107341, \\ \bar{P}_{\Gamma(2\ 4)}^* &= 0.0000323097, & \bar{P}_{\Gamma(3\ 4)}^* &= 0.0000227275, & \bar{P}_{\Gamma(2\ 3)}^* &= 0.0000230429.\end{aligned}$$

Здесь $\bar{P}_\Gamma$ — асимптотическая оценка вероятности несвязности Γ , полученная с помощью теоремы 1; $\bar{P}_\Gamma^*$ — точное расчетное значение вероятности несвязности Γ ; $\bar{P}'_\Gamma$ — асимптотическая оценка после замены $c_{w'}$ на $c_{w'} - 0.15$ одного любого $w' \in \mathcal{T}$; $\bar{P}_{\Gamma(i\ j)}^*$ — точное расчетное значение после замены $c_{i,j}$ на $c_{i,j} - 0.15$.

Список литературы

- [1] Гнеденко В. Б., *Математические методы в теории надежности и эффективности*, Машиностроение, М, 1987.
- [2] Громов Ю. Ю., Драчев В. О., Набатов К. А., Иванов О. Г., *Синтез и анализ живучести сетевых систем*, Машиностроение, М, 2007.
- [3] Иванова А. П., Межуева Л. В., Пискарева Т. И., Гунько В. В., “Декомпозиционный подход к надежности технической системы”, *Вестник ОГУ*, **10**, (2011), 280–283.
- [4] Павлов И. В., Разгуляев С. В., “Построение доверительных границ для коэффициентов готовности системы с восстанавливаемыми элементами”, *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, **4**, (2015), 15–11.
- [5] Быкова В. В., “О мерах целостности графов: обзор”, *Прикладная дискретная математика*, **4(26)**, (2014), 96–111.
- [6] Сердюков В. И., Сердюкова Н. А., Шишкина С. И., “Повышение безотказной работы изделий с использованием элементов искусственного интеллекта”, *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, **1(112)**, (2017), 62–72.
- [7] Каравай М. Ф., “Математические основы отказоустойчивости”, *Методы и системы технической диагностики*, **14(1)**, (1990), 3–7.
- [8] Каравай М. Ф., “Применение теории симметрии к анализу и синтезу отказоустойчивых систем”, *Автоматика и телемеханика*, **6**, (1996), 159–173.
- [9] Лосев А. С., “Асимптотический анализ надежности стохастических сетей”, *Информатика и системы управления*, **4(18)**, (2008), 101–105.
- [10] Цициашвили Г. Ш., Осипова М. А., Лосев А. С., “Асимптотические формулы для вероятностей связности случайных графов”, *Автоматика и вычислительная техника*, **2**, (2013), 22–28.
- [11] Рябинин И. А., *Логико-вероятностные методы исследования надёжности структурно-сложных систем*, Радио и связь, М, 1981.

Поступила в редакцию
10 февраля 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

*Losev A. S.*¹ Dominant connections in highly reliable two-terminal networks. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2025. V. 25. No 1. P. 61–66.

¹Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

The paper researches the problem of increasing the probability of disconnection of a two-terminal highly reliable graph. As a solution, the idea of identifying dominant connections, the numerical characteristics of which form an asymptotic estimate of the probability of graph connectivity, is proposed. It is proved that changing the throughput of such connections most significantly affects the probability of disconnection of the entire graph.

Key words: *connectivity, two-terminal network, dominant connections, network structures.*