

УДК 517.95
MSC2020 35A16

© А. Ю. Чеботарев¹

Задача Коши в гильбертовом пространстве и ее приложения

Доказана нелокальная однозначная разрешимость абстрактной задачи Коши для уравнения в гильбертовом пространстве с локально-липшицевой нелинейностью. Рассмотрены приложения основного результата к анализу прямой и обратной задачи для уравнения Ландау – Халатникова.

Ключевые слова: задача Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве, существование и единственность решения, прямая и обратная задачи для уравнения Ландау – Халатникова.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202510>

Введение

Рассмотрим вещественные гильбертовы сепарабельные пространства V и H такие, что $V \subset H \subset V'$, при этом вложение $V \subset H$ является плотным и непрерывным. Здесь V' — пространство, сопряженное с V . Обозначим, соответственно, через $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ нормы в V, H и V' , а через (f, v) — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $f \in H$. Пусть W — банахово пространство такое, что $V \subset W \subset H \subset W' \subset V'$.

Пусть $A: V \rightarrow V'$ — линейный непрерывный оператор такой, что

$$(Az, z) \geq \nu \|z\|_V^2, \quad \nu > 0.$$

Будем рассматривать также семейства нелинейных операторов $B(t), F(t), t \in [0, T]$, удовлетворяющих условиям:

$$(i) \quad \text{Функции } [0, T] \ni t \rightarrow B(t)u(t) \in V', \quad [0, T] \ni t \rightarrow F(t)u(t) \in V'$$

являются измеримыми для каждой измеримой функции $[0, T] \ni t \rightarrow u(t) \in V$;

$$(ii) \quad B(t) \text{ — монотонный, семинепрерывный, } (B(t)z, z) \geq \omega \|z\|_W^p - k_1,$$

$$\|B(t)z\|_* \leq k_2(1 + \|z\|_W^{p-1}) \quad \forall z \in V, t \in [0, T], \text{ где } \omega, k_1, k_2 > 0, p > 1;$$

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: cheb@iam.dvo.ru

$$(iii) \|F(t)z_1 - F(t)z_2\|_* \leq L_r \|z_1 - z_2\| \quad \forall z_{1,2} \in V, \|z_{1,2}\| \leq r, t \in [0, T].$$

При рассмотрении эволюционных задач на временном интервале $(0, T)$, через $L^s(0, T; X)$ (соотв. $C([0, T], X)$ или $AC([0, T], X)$) обозначаем пространство строго измеримых функций класса L^s (соотв. непрерывных или абсолютно непрерывных), определенных на $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве X ,

$$W_s^1(0, T; X) = \left\{ z \in AC([0, T], X) : z' \in L^s(0, T; X) \right\}.$$

Запись $f \in X + Y$ означает, что $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in X$, $f_2 \in Y$.

Следующая задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами моделирует различные начально-краевые задачи и обратные задачи для уравнений типа реакции-диффузии.

Задача 1.

$$y' + Ay + B(t)y = F(t)y + f(t), \quad \text{для почти всех } t \in (0, T), \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

Здесь $y' = dy/dt$ рассматривается в сильной топологии V' , $y_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; V')$.

Результат нелокальной однозначной разрешимости Задачи 1, представленный в данной статье, является расширением классических результатов Ж.-Л. Лионса [1, гл.2, теорема 1.2] и В. Барбу [2, гл.4, теоремы 4.8-4.10].

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i) – (iii) и $\|F(t)0\|_* \in L^2(0, T)$. Тогда для $y_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; V')$ существует число $T_1 = T_1(y_0, f) \in (0, T)$ такое, что Задача 1 однозначно разрешима на промежутке $[0, T_1]$ и при этом

$$\begin{aligned} y &\in C([0, T_1], H) \cap L^2(0, T_1; V) \cap L^p(0, T_1; W), \\ y' &\in L^2(0, T_1; V') + L^s(0, T_1; W'), \quad s = \frac{p}{p-1}. \end{aligned}$$

Если дополнительно для $t \in (0, T)$, $z \in V$ выполняется неравенство

$$(F(t)z, z) \leq \frac{\nu}{2} \|z\|_V^2 + \frac{\omega}{2} \|z\|_W^p + k_3 (1 + \|z\|^2), \quad (2)$$

то решение является глобальным, т.е. существует и единственно на $[0, T]$.

Несмотря на то, что этот результат устанавливается достаточно просто, он позволяет доказывать существование решений различных прямых и обратных задач. Для доказательства нелокальной однозначной разрешимости достаточно проверить условие (2), т.е. условие подчиненности локально липшицева оператора операторам в главной части. В качестве примера в работе рассмотрены начально-краевая задача для уравнения Ландау – Халатникова [3, 4] и обратная задача для этой модели с неизвестной интенсивностью источников поляризации и интегральным переопределением.

1. Предварительные результаты

Опираясь на результаты В. Барбу [2, гл.4, теоремы 4.8-4.10], получим однозначную разрешимость задач Коши для уравнений с монотонным оператором и с нелокально липшицевым оператором.

Лемма 1. Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда для $y_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; V')$ существует единственная абсолютно непрерывная функция $y : [0, T] \rightarrow V'$ такая, что

$$y \in C([0, T], H) \cap L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W), \quad (3)$$

$$y' \in L^2(0, T; V') + L^s(0, T; W'), \quad s = \frac{p}{p-1}, \quad (4)$$

$$y' + Ay + B(t)y = f(t), \quad \text{для почти всех } t \in (0, T), \quad y(0) = y_0. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $A_1(t) = A + B(t)$,

$$D(A_1) = \left\{ z \in V : A_1(t)z \in H, t \in [0, T] \right\}.$$

Если $y_0 \in D(A_1)$, $f \in W_1^1(0, T; H)$. Тогда [2, теорема 4.9, с.151] существует функция $y \in W_1^1(0, T; H)$, $A_1 y \in L^\infty(0, T; H)$, удовлетворяющая (5). Далее так же, как и при доказательстве теоремы 4.10 и теоремы 4.17 [2, с.151, с.177], доказывается, что $D(A_1)$ плотно в H , данные $y_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; V')$ аппроксимируются последовательностями $\{y_{0n}\} \subset D(A_1)$, $\{f_n\} \subset W_1^1(0, T; H)$ и для решений задачи

$$y'_n + Ay_n + B(t)y_n = f_n(t), \quad \text{для почти всех } t \in (0, T), \quad y(0) = y_{0n} \quad (6)$$

выводятся оценки, позволяющие сделать предельный переход в (6). Предельная функция удовлетворяет условиям (3)–(5). Единственность решения следует из монотонности оператора $A_1(t)$. $\square$

Лемма 2. Пусть выполняются условия (i), (ii) и

$$\|F(t)z_1 - F(t)z_2\|_* \leq L\|z_1 - z_2\| \quad \forall z_{1,2} \in V, \quad \|F(t)0\|_* \in L^2(0, T),$$

где $L > 0$ не зависит от $z_{1,2}$. Тогда для $y_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; V')$ существует единственная абсолютно непрерывная функция $y : [0, T] \rightarrow V'$, удовлетворяющая (3), (4) и такая, что

$$y' + Ay + B(t)y = F(t)y + f(t), \quad \text{для почти всех } t \in (0, T), \quad y(0) = y_0. \quad (7)$$

Доказательство. Получим сначала априорные оценки решения задачи (7). Умножим скалярно уравнение (7) на y . Тогда, учитывая условия на операторы $A, B(t), F(t)$, выводим неравенства.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y\|^2 + \nu \|y\|_V^2 + \omega \|y\|_W^p \leq (F(t)y + f(t), y) \leq L \|y\| \|y\|_V + \|f_1(t)\|_* \|y\|_V.$$

Здесь $f_1(t) = f(t) + F(t)0$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \|y\|^2 + \nu \|y\|_V^2 + 2\omega \|y\|_W^p \leq \frac{2}{\nu} (L^2 \|y\|^2 + \|f_1(t)\|_*^2).$$

Поэтому

$$\|y(t)\| \leq C, \quad \|y\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \quad \|y\|_{L^p(0, T; W)} \leq C.$$

Кроме того, $y' = \chi_1 + \chi_2$, где $\|\chi_1\|_{L^2(0,T;V')} \leq C$, $\|\chi_2\|_{L^s(0,T;W')} \leq C$. Здесь через $C > 0$ обозначены различные постоянные, не зависящие от y_0, f .

Докажем теперь локальную разрешимость задачи (7). Из оценок, полученных выше, будет тогда следовать, что решение может быть продолжено на весь промежуток $[0, T]$. Пусть $0 < T_1 \leq T$, $L^2 T_1 / \nu < 1$. Определим оператор $S : C([0, T_1], H) \rightarrow C([0, T_1], H)$ так, что $y = Sz$, если y — решение задачи

$$y' + Ay + B(t)y = F(t)z + f(t), \quad \text{для почти всех } t \in (0, T_1), \quad y(0) = y_0.$$

Поскольку $F(t)z \in L^2(0, T_1; V')$, то решение указанной задачи существует и единственно в силу леммы 1. Заметим, что если y — неподвижная точка S , то y — решение задачи (7) на $[0, T_1]$. Покажем, что оператор S является сжатием. Пусть $w_{1,2} = Sz_{1,2}$, $w = w_1 - w_2$, $z = z_1 - z_2$. Тогда

$$w' + Aw + B(t)w_1 - B(t)w_2 = F(t)z_1 - F(t)z_2 \quad \text{для почти всех } t \in (0, T_1), \quad w(0) = 0.$$

Учитывая монотонность $B(t)$, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \nu \|w\|_V^2 \leq L \|z\| \|w\|_V \leq \frac{L^2}{4\nu} \|z\|^2 + \nu \|w\|_V^2 \quad \text{то есть} \quad \frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq \frac{L^2}{2\nu} \|z\|^2.$$

Следовательно,

$$\|w\|_{C([0, T_1], H)}^2 \leq \frac{L^2 T_1}{2\nu} \|z\|_{C([0, T_1], H)}^2$$

и оператор S будет сжимающим, если $L^2 T_1 < 2\nu$.

Для доказательства единственности решения полагаем $w = y_1 - y_2$, где $y_{1,2}$ — решения задачи (7). Тогда, аналогично доказательству того, что S — сжатие, выводим

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq \frac{L^2}{2\nu} \|w\|^2 \quad \text{для почти всех } t \in (0, T), \quad w(0) = 0.$$

Из леммы Гронвуолла следует, что $w = 0$, т.е. решение единственно. $\square$

2. Доказательство теоремы 1

Покажем сначала локальную разрешимость Задачи 1. Для $r > 0$ определим срезку оператора $F(t)$:

$$F_r(t)z = \begin{cases} F(t)z, & \text{если } \|z\| \leq r; \\ F(t)(rz/\|z\|), & \text{если } \|z\| > r. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\|F_r(t)z_1 - F_r(t)z_2\|_* \leq 2L_r \|z_1 - z_2\| \quad \forall z_{1,2} \in V,$$

где L_r — постоянная из условия (iii). Действительно, если $\|z_{1,2}\| > r$, то

$$\|F_r(t)z_1 - F_r(t)z_2\|_* \leq L_r r \|z_1/\|z_1\| - z_2/\|z_2\|\| \leq 2L_r \|z_1 - z_2\|.$$

В случае, если $\|z_1\| \leq r$, $\|z_2\| > r$, получаем

$$\|F_r(t)z_1 - F_r(t)z_2\|_* \leq L_r \|z_1 - rz_2/\|z_2\|\| \leq 2L_r \|z_1 - z_2\|.$$

Из леммы 2 следует, что существует единственное решение задачи

$$y_r' + Ay_r + B(t)y_r = F_r(t)y_r + f(t), \quad \text{для почти всех } t \in (0, T), \quad y_r(0) = y_0, \quad (8)$$

и справедлива оценка

$$\frac{d}{dt} \|y_r\|^2 + \nu \|y_r\|_V^2 + 2\omega \|y_r\|_W^p \leq \frac{2}{\nu} (4L_r^2 \|y_r\|^2 + \|f_1(t)\|_*^2).$$

Поэтому

$$\|y_r(t)\|^2 \leq \exp(C_r t) \left(\|y_0\|^2 + \frac{2}{\nu} \|f_1\|_{L^2(0,T;V')}^2 \right), \quad C_r = \frac{8L_r^2}{\nu}.$$

Выберем r и T_1 таким образом, что

$$r^2 \geq 2 \left(\|y_0\|^2 + \frac{2}{\nu} \|f_1\|_{L^2(0,T;V')}^2 \right), \quad \exp(C_r T_1) \leq 2.$$

Тогда $\|y_r(t)\|^2 \leq r^2$, $F_r(t)y_r = F(t)y_r$ и y_r является решением Задачи 1 на промежутке $[0, T_1]$.

Если выполняется условие (2), то из (8) следуют оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y_r\|^2 + \frac{\nu}{2} \|y_r\|_V^2 + \frac{\omega}{2} \|y_r\|_W^p &\leq k_3(1 + \|y_r\|^2) + \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_*^2 + \frac{\nu}{4} \|y_r\|_V^2, \\ \frac{d}{dt} \|y_r\|^2 + \frac{\nu}{2} \|y_r\|_V^2 + \omega \|y_r\|_W^p &\leq k_3 \|y_r\|^2 + a(t), \end{aligned}$$

где $a(t) = k_3 + \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_*^2$. Используя неравенство Гронуолла, выводим

$$\|y_r(t)\|^2 \leq \exp(k_3 T) (\|y_0\|^2 + \|a\|_{L^1(0,T)}) \leq r^2,$$

если r достаточно большое. Следовательно, для таких r функция y_r будет решением Задачи 1 на всем промежутке $[0, T]$.

Заметим также, что для всякого решения Задачи 1 справедливы оценки

$$\|y_r(t)\|^2 \leq k_4, \quad \int_0^T \left(\frac{\nu}{2} \|y(t)\|_V^2 + \omega \|y(t)\|_W^p \right) dt \leq \|y_0\|^2 + \|a\|_{L^1(0,T)} + k_3 k_4,$$

где $k_4 = \exp(k_3 T) (\|y_0\|^2 + \|a\|_{L^1(0,T)})$. Указанные оценки позволяют доказать единственность решения Задачи 1 аналогично доказательству единственности в лемме 2. Это завершает доказательство теоремы 1.

3. Приложения

3.1. Начально-краевая задача для уравнения Ландау – Халатникова

Рассмотрим модель сегнетоэлектрической поляризации, основанной на термодинамической теории Ландау – Гинзбурга – Девоншира. В случае переключения поляризация реализуется вместе с одной из ее компонент и индуцируется приложенным электрическим полем, а математическую модель [4] можно выразить в виде

начально-краевой задачи для нестационарного уравнения Ландау–Халатникова в области $\Omega \subset \mathbb{R}$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\Delta p + ap + bp^2 - cp^5 + E(t)f_0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (9)$$

$$\lambda \partial_n p + p|_{\Gamma} = 0, \quad p|_{t=0} = p_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

Здесь p — распределение поляризации, D — термодинамический параметр, который имеет смысл комбинации градиентного коэффициента и восстанавливающей силы, a, b, c — термодинамические параметры, зависящие от температуры, $E(t)f_0$ — приложенное электрическое поле. Через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе Γ .

В дальнейшем считаем, что $\Omega = (\alpha, \beta)$ — ограниченный интервал, $Q = \Omega \times (0, T)$. Через L^s , $1 \leq s \leq \infty$ обозначаем пространство Лебега, через H^1 — пространство Соболева W_2^1 . Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega) \subset W = L^6(\Omega)$, через V' обозначаем пространство, сопряженное с пространством V . Пространство H отождествляем с пространством H' , так что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную норму в H , а через (w, v) — значение функционала $w \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $w \in H$.

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям

(c_1) $D, a, b, c, \lambda = \text{const} > 0$;

(c_2) $E \in L^2(0, T)$, $f_0, p_0 \in H$.

Определим оператор $A: V \rightarrow V'$ так, что

$$(Ap, v) = D \int_{\Omega} p_x v_x dx + \frac{D}{\lambda} (p(\alpha)v(\alpha) + p(\beta)v(\beta)) \quad \forall p, v \in V.$$

Пусть $Bp = cp^5$, $Fp = ap + bp^2$, $f = E(t)f_0$.

Если умножить уравнение (9) на тестовую функцию $v \in V$, проинтегрировать по Ω , используя для первого слагаемого в правой части интегрирование по частям и учитывая краевое условие (10), то получим слабую формулировку начально-краевой задачи (9), (10) в виде задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с операторным коэффициентом.

Найти $p \in L^2(0, T; V)$ такую, что

$$p' + Ap + Bp = Fp + f \text{ п.в. на } (0, T), \quad p(0) = p_0. \quad (11)$$

Заметим, что квадратичная форма (Av, v) соответствует квадрату нормы в пространстве V , эквивалентной стандартной норме, и поэтому $(Av, v) \geq \nu \|v\|_V^2$ для некоторого $\nu > 0$. Кроме того, оператор $B: V \rightarrow V'$ является монотонным и семинепрерывным,

$$(Bv, v) = c \|v\|_W^6, \quad \|Bv\|_* \leq k_2 \|v\|_W^5.$$

Для оператора $F: V \rightarrow V'$ справедлива оценка

$$\|Fz_1 - Fz_2\|_* \leq C(1 + \|z_1\| + \|z_2\|) \|z_1 - z_2\|,$$

где $C > 0$ зависит только от области Ω и параметров a, b и поэтому выполняется условие (iii). Кроме того

$$(Fz, z) = \int_{\Omega} (az + bz^2)z dx \leq \frac{c}{4} \|z\|_W^6 + k_3. \quad (12)$$

Таким образом, применяя теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполняются условия $(c_1), (c_2)$. Тогда задача (11) однозначно разрешима на промежутке $[0, T]$ и при этом

$$p \in C([0, T], H) \cap L^2(0, T; V) \cap L^6(0, T; W), \\ p' \in L^2(0, T; V') + L^{6/5}(0, T; W').$$

3.2. Обратная задача для уравнения Ландау – Халатникова

Рассмотрим постановку обратной задачи, которая заключается в отыскании неизвестной интенсивности электрического поля $E(t)$ в модели (9) и поляризации p по интегральному переопределению.

Задача (IP). Найти функции $E \in L^2(0, T)$, p такие, что

$$p \in C([0, T], H) \cap L^2(0, T; V) \cap L^6(0, T; W), p' \in L^2(0, T; V') + L^{6/5}(0, T; W'); \\ p' + Ap + Bp = Fp + E(t)f_0, (f_0, p(t)) = q(t) \text{ п.в. на } (0, T), p(0) = p_0. \quad (13)$$

Здесь $q \in W_2^1(0, T)$ — заданная функция.

Сведем задачу (IP) к задаче Коши (1). Для этого определим пространства

$$V_0 = \{z \in V : (f_0, z) = 0\}, H_0 = \text{замыкание } V_0 \text{ по норме } H, V_0 \subset H_0 \subset V'_0.$$

Пусть $\tilde{f} \in V$, $(\tilde{f}, f_0) = 1$. Будем искать компоненту p решения задачи (IP) в виде $p(t) = y(t) + q(t)\tilde{f}$, где $y(t) \in V_0$. В этом случае условие переопределения $(f_0, p(t)) = q(t)$ заведомо выполняется.

Задача (P). Пусть $q \in W_2^1(0, T)$, $y_0 = p_0 - q(0)\tilde{f} \in H_0$. Найти функцию y такую, что

$$y \in C([0, T], H_0) \cap L^2(0, T; V_0) \cap L^6(0, T; W), \\ y' \in L^2(0, T; V'_0) + L^{6/5}(0, T; W'), p' + Bp \in L^2(0, T; V'_0); \\ y' + Ay + Bp = Fp + f_1 \text{ п.в. на } (0, T), y(0) = y_0. \quad (14)$$

Здесь $p(t) = y(t) + q(t)\tilde{f}$, $f_1(t) = -(q'(t)\tilde{f} + q(t)A\tilde{f})$.

Лемма 3. Пусть выполняются условия $(c_1), (c_2)$ и $p_0 - q(0)\tilde{f} \in H_0$. Пара $\{E, p\}$ будет решением задачи (IP), если и только если

$$p(t) = y(t) + q(t)\tilde{f}, E(t) = (p'(t) + Bp(t) + Ap(t) - Fp(t), \tilde{f}),$$

где y — решение задачи (P).

Доказательство. Пусть $\{E, p\}$ — решение задачи (IP), $y(t) := p(t) - q(t)\tilde{f}$. Тогда, умножая скалярно уравнение в (13) на $v \in V_0$, получим (14), и при этом функция y принадлежит указанному в постановке задачи (P) классу, а также выполняется начальное условие. Выражение для $E(t)$ получается путем умножения уравнения в (13) на $\tilde{f}$.

Обратно, пусть y — решение задачи (P), $p(t) = y(t) + q(t)\tilde{f}$. Тогда $(f_0, p(t)) = q(t)$. Умножим скалярно уравнение (14) на $v - (f_0, v)\tilde{f} \in V_0$, где $v \in V$. Тогда

$$(h, v) - (f_0, v)(h, \tilde{f}) = 0 \quad \forall v \in V,$$

где $h = p' + Ap + Bp - Fp$. Поэтому $h(t) = E(t)f_0$, где $E(t) = (h(t), \tilde{f})$, и таким образом пара $\{E, p\}$ является решением задачи (IP). $\square$

Теорема 3. Пусть выполняются условия $(c_1), (c_2)$ и $p_0 - q(0)\tilde{f} \in H_0$. Тогда обратная задача (IP) однозначно разрешима.

Доказательство. Покажем существование и единственность решения задачи (P), которая эквивалентна задаче (IP). Перепишем задачу (P) в виде

$$y' + Ay + B_1(t)y = F_1(t)y + f_1 \text{ в } V'_0 \text{ п.в. на } (0, T), \quad y(0) = y_0. \quad (15)$$

Здесь $B_1(t)y = B(y(t) + q(t)\tilde{f})$, $F_1(t)y = F(y(t) + q(t)\tilde{f})$.

Проверим выполнение условий $(i) - (iii)$ для операторов $B_1(t), F_1(t)$. Справедливость условия (i) и монотонность оператора $B_1(t)$ очевидны. Далее

$$(B_1(t)z, z) = c \int_{\Omega} (z + q(t)\tilde{f})^5 z dx \geq \omega \|z\|_W^6 - k_1, \quad \|B_1(t)z\|_* \leq k_2(1 + \|z\|_W^5),$$

поскольку

$$|z|^s \leq \frac{s\varepsilon^{6/s}}{6} |z|^6 + \frac{6-s}{6\varepsilon^{\frac{6}{6-s}}} \text{ для } s \in [1, 5], \varepsilon > 0$$

и функция q ограничена. Здесь постоянные k_1, k_2 не зависят от z , $\omega = c/2$.

Для $F_1(t)$ справедливо неравенство

$$\|F_1(t)z_1 - F_1(t)z_2\|_* \leq C \left(1 + \|z_1 + q(t)\tilde{f}\| + \|z_2 + q(t)\tilde{f}\| \right) \|z_1 - z_2\|,$$

где $C > 0$ зависит только от области Ω и параметров a, b и для $F_1(t)$ выполняется условие (iii) . Из неравенства (12) следует

$$(F_1(t)z, z) \leq \frac{c}{4} \|z + q(t)\tilde{f}\|_W^6 + k_3 \leq \frac{c}{2} \|z\|_W^6 + k_4.$$

Применение теоремы 1 к задаче (15) заканчивает доказательство. $\square$

Список литературы

- [1] Лионс Ж.-Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, Москва, 1972.

-
- [2] Barbu V., *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, Springer Science-Business Media, 2010.
- [3] Maslovskaya A. G., Moroz L. I., Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E., “Theoretical and numerical analysis of the Landau–Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis”, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, **93**:105524, (2020).
- [4] Veselova E., Maslovskaya A., Chebotarev A., “Size-Dependent Switching in Thin Ferroelectric Films: Mathematical Aspects and Finite Element Simulation”, *Computation*, **11**:14, (2023).

Поступила в редакцию
1 марта 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного
задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

*Chebotarev A. Yu.*¹ The Cauchy problem in Hilbert space and its applications. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2025. V. 25. No 1. P. 113–121.

¹Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

The nonlocal unique solvability of the abstract Cauchy problem for an equation in a Hilbert space with locally Lipschitz nonlinearity is proved. Applications of the main result to the analysis of direct and inverse problems for the Landau-Khalatnikov equation are considered.

Key words: *Cauchy problem for a differential equation in Hilbert space, existence and uniqueness of a solution, direct and inverse problems for the Landau-Khalatnikov equation.*