Дальневосточный математический журнал. 2025. Т. 25. № 2. С. 258–260

УДК 512.62+517.54
MSC2020 30C10

© В. Н. Дубинин[1]

Теорема искажения для полиномов с вещественными критическими точками

Для полиномов f с вещественными критическими точками рассматривается нижняя оценка $f'(z)$, зависящая от двух ближайших к z критических точек ζ_1, ζ_2 полинома f, $\zeta_1 < z < \zeta_2$, значений $f(z)$, $f(\zeta_k)$, $k = 1, 2$, и не зависящая от степени полинома f.

Ключевые слова: *полиномы, критические точки, критические значения, теорема искажения.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202519

1. Введение и формулировка результата

В теории голоморфных функций f значительное место занимают теоремы роста (оценки $|f|$), теоремы искажения (оценки $|f'|$), а также комбинированные оценки с участием f и f'. Хорошо известно влияние на искажение функции f её однолистности на заданных множествах [1]. В настоящей статье приводится оценка производной f' на интервале (ζ_1, ζ_2), где ветвь функции f однолистна, $f'(\zeta_k) = 0$, $k = 1, 2$, в случае, когда f является полиномом степени не меньше трех с вещественными критическими точками. Указанные полиномы представляют интерес при решении различных задач теории функций [2–6]. Без ограничения общности можно считать, что полином f вещественный, т.е. принимает вещественные значения на вещественной оси.

Заданному полиному f сопоставим полином третьей степени f^*, критические точки которого совпадают с критическими точками ζ_1, ζ_2 полинома f, а критические значения $f^*(\zeta_k) = f(\zeta_k), k = 1, 2$. Нетрудно увидеть, что полином f^* представим в виде

$$f^*(z) = \alpha \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2) z^2 + \zeta_1 \zeta_2 z \right) + \beta,$$

где

$$\alpha = \frac{f(\zeta_2) - f(\zeta_1)}{\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) dz}, \quad \beta = f(\zeta_1) - \alpha \int\limits_{0}^{\zeta_1} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) dz.$$

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: dubinin@iam.dvo.ru

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что все критические точки вещественного полинома f степени $n \geqslant 3$ вещественные; и пусть ζ_1 и ζ_2 — две соседние критические точки этого полинома. Тогда для любого $z \in (\zeta_1, \zeta_2)$ выполняется неравенство*

$$|f'(z)| \geqslant \left|f^{*'}(x)\right| \frac{(x-\zeta_1)(x-\zeta_2)}{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)}, \tag{1}$$

где x — единственный корень уравнения $f^*(x)=f(z)$, лежащий в интервале (ζ_1,ζ_2). Равенство в (1) достигается в случае $f=f^*$.

Интересно, что неравенство (1) не зависит от степени n полинома f. Оценки для полиномов с ограничениями на критические точки, не зависящие от степени полинома, встречаются впервые в работе А. Хинкканена и И. Р. Каюмова [2].

2. Схема доказательства теоремы 1

Можно считать, что $\zeta_1 < \zeta_2$, $f(\zeta_1) < f(\zeta_2)$ и $f''(\zeta_k) \neq 0$, $k=1,2$. Полином f^* отображает сферу $\overline{\mathbb{C}}_z$ на риманову поверхность $\mathscr{R}(f^*)$, образованную склеиванием w-плоскости с разрезами по радиальным лучам

$$L_1 = \big\{w:\ \operatorname{Im} w = 0,\ \operatorname{Re} w \leqslant f(\zeta_1)\big\} \quad \text{и} \quad L_2 = \big\{w:\ \operatorname{Im} w = 0,\ \operatorname{Re} w \geqslant f(\zeta_2)\big\}$$

с листами $D_k = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus L_k, k=1,2$, крест-накрест по берегам разрезов $L_k, k=1,2$, соответственно. Обозначим через S риманову область на поверхности $\mathscr{R}(f^*)$, полученную проведением разрезов на $\mathscr{R}(f^*)$ вдоль лучей вида $\{w: \operatorname{Im} w=0, \operatorname{Re} w \geqslant f(\zeta_1)\}$, $\{w: \operatorname{Im} w=0, \operatorname{Re} w \leqslant f(\zeta_2)\}$ на приклеенных листах D_1, D_2 соответственно. В принятых на полином f ограничениях область S можно рассматривать как подмножество поверхности $\mathscr{R}(f)$, на которую f отображает комплексную сферу $\overline{\mathbb{C}}_z$. Поэтому суперпозиция функций

$$F = f^{-1} \circ f^*$$

является однолистной в области

$$T = \mathbb{C}_z \setminus \{z:\ \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leqslant \zeta_1 \text{ либо } \operatorname{Re} z \geqslant \zeta_2\}.$$

Здесь f^{-1} означает функцию на поверхности $\mathscr{R}(f)$, обратную полиному f.

Фиксируем точку $z_0 \in (\zeta_1, \zeta_2)$, и пусть x_0 определено условиями $f^*(x_0) = f(z_0)$, $x_0 \in (\zeta_1, \zeta_2)$, а $\Delta x > 0$ настолько мало, что точка $x_0 + \Delta x$ также принадлежит интервалу (ζ_1, ζ_2). Введем вспомогательные функции

$$\Omega_1(z) = \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2} \cdot \frac{x_0-\zeta_2}{x_0-\zeta_1}, \quad \Omega_2(z) = \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2} \cdot \frac{z_0-\zeta_2}{z_0-\zeta_1}.$$

Рассмотрим теперь конденсатор с двумя пластинами $C = (\partial T, [x_0, x_0+\Delta x])$ (см., например, [7, часть 1.2]. Функция Ω_1 отображает конденсатор C конформно на конденсатор $\Omega_1(C) = ([-\infty, 0], [1, \Omega_1(x_0+\Delta x)])$. В силу конформной инвариантности емкости [7, теорема 1.12] выполняется

$$\operatorname{cap} C = \operatorname{cap} \Omega_1(C).$$

С другой стороны, конформная инвариантность влечёт за собой

$$\operatorname{cap} C = \operatorname{cap} F(C) = \operatorname{cap} \Omega_2(f(C)) \geqslant \operatorname{cap}([-\infty, 0], [1, \Omega_2(F(x_0 + \Delta x))]).$$

Последнее неравенство есть следствие экстремального свойства кольца Тейхмюллера [7, упражнение 1.4 (1)]. Оно вытекает также из принципа круговой симметризации Полиа [7, теорема 4.2]. Суммируя выписанные соотношения, получаем неравенство

$$\operatorname{cap}([-\infty, 0], [1, \Omega_1(x_0 + \Delta x)]) \geqslant \operatorname{cap}([-\infty, 0], [1, \Omega_2(F(x_0 + \Delta x))]).$$

Из свойства монотонности емкости [7, теорема 1.8] вытекает

$$\Omega_1(x_0 + \Delta x) \geqslant \Omega_2(F(x_0 + \Delta x)).$$

Элементарные преобразования с последующим предельным переходом при $\Delta x \to 0$ приводят отсюда к неравенству (1), где $z = z_0$, $x = x_0$. Случай равенства очевиден. Это завершает доказательство теоремы 1.

Список литературы

[1] Duren P. L., *Univalent Functions*, Springer Verlag, New York, 1983.

[2] Hinkkanen A., Kayumov I., “On critical values of polinomials with real critical points”, *Constructive Approximation*, **32**:2, (2010), 385–392.

[3] Epstein A., “Symmetric rigidity for real polynomials with real critical point”, *Complex manifolds and hyperbolic geometry*, Contemp. Math., 311, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 107–114.

[4] Brown J. E., Powell V. F., “A result on real polynomials with real critical points”, *J. Anal. Appl.*, **5**, (2007), 41–52.

[5] Kozlovski O., Shen W., van Strein S., “Rigidity for real polynomas”, *Ann. of Math.*, **2(165)**:3, (2007), 749–841.

[6] Bishop David L., “Approximation by polinomials with only real critical points”, 2025, arXiv: 2501.02145[math.CA].

[7] V. N. Dubinin, *Condenser Capacities and Symmetrization in Geometric Function Theory*, Springer, Basel, 2014.

Поступила в редакцию
15 июля 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

Dubinin V. N.[1] Distortion theorem for polynomials with real critical points. Far Eastern Mathematical Journal. 2025. V. 25. No 2. P. 258–260.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

For polynomials f with real critical points, a lower bound of $f'(z)$ is considered, which depends on the two critical points ζ_1, ζ_2 of the polynomial f closest to z, $\zeta_1 < z < \zeta_2$, the values $f(z)$, $f(\zeta_k)$, $k = 1, 2$, and is independent of the degree of the polynomial f.

Key words: *polynomials, critical points, critical values, distortion theorem.*