Дальневосточный математический журнал. 2025. Т. 25. № 2. С. 261–270

УДК 517.588+517.44
MSC2020 33C20 + 33C60

© К. Е. Бахтин[1,2], Е. Г. Прилепкина[1]

О преобразованиях гипергеометрических функций с целыми параметрическими разностями

Доказано несколько фактов, касающихся преобразований и суммирований гипергеометрических функций с целыми параметрическими разностями. Установлена новая формула суммирования, дополняющая известную формулу суммирования Карлссона – Минтона. Из первого преобразования Миллера – Париса выведено новое трехчленное соотношение. Показано, как второе преобразование Миллера – Париса получается по индукции из преобразования Эйлера – Пфаффа, и записана рекурсивная формула для представляющего полинома. Установлено интегральное представление G-функции Майера, лежащее в основе второго преобразования Миллера – Париса.

Ключевые слова: *обобщённая гипергеометрическая функция, формулы суммирования, гипергеометрическое тождество, преобразования Миллера – Париса*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202520

1. Введение и основные результаты

В данной работе используются стандартные обозначения $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ комплексных, целых, натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Числа обозначаются обычными буквами, векторы — жирными символами, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_q)$. Символ Похгаммера $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, $(a)_0 = 1$. Для удобства записи формул приняты следующие сокращения: $\Gamma(\mathbf{a}) = \Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\cdots\Gamma(a_p)$, $(\mathbf{a})_n = (a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n$, $\mathbf{a}+\mu = (a_1+\mu, a_2+\mu, \ldots, a_p+\mu)$, $(\mathbf{a})_{\mathbf{n}} = (a_1)_{n_1}(a_2)_{n_2}\ldots(a_p)_{n_p}$. Неравенства типа $\Re(\mathbf{a}) > 0$ и свойства, подобные $-\mathbf{a} \notin \mathbb{N}$, понимаются поэлементно, то есть $\Re(a_i) > 0$, $-a_i \notin \mathbb{N}$ для $i = 1, \ldots, p$. Всюду ниже мы будем использовать обозначения $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^r$, $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_r)$ и $(\mathbf{f})_{\mathbf{m}} = (f_1)_{m_1}\cdots(f_r)_{m_r}$.

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 680041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 680922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Электронная почта: `bakhtin.ke@dvfu.ru` (К. Е. Бахтин), `pril-elena@yandex.ru` (Е. Г. Прилепкина).

Обобщенная гипергеометрическая функция с параметрами $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^p$, $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^q$ определяется как ряд

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\middle|\, x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{a})_n x^n}{(\mathbf{b})_n n!} $$

для тех значений x, когда ряд сходится, и как его аналитическое продолжение в случае расходимости. Аргумент $x=1$ обобщенной гипергеометрической функции обычно опускается. Более детальную информацию об определении и свойствах обобщенных гипергеометрических функций можно найти в литературе [1, Section 2.1], [2, Chapter 12]), [3, Section 5.1], [4, Sections 16.2-16.12].

Формулы преобразования, редукции и суммирования гипергеометрических функций восходят к работам Эйлера и имеют богатую историю. Основные достижения в этом направлении к концу XX века можно посмотреть, например, в книгах [1–3]. Интерес к обобщенным гипергеометрическим функциям с целыми параметрическими разностями возник к 1970 году в теоретической физике и связан с вычислениями коэффициентов Рака. Большое количество применений нашла формула суммирования, установленная в [5] Минтоном

$$ {}_{r+2}F_{r+1}\left(\begin{matrix}-k, b, f_1+m_1,\dots,f_r+m_r\\ b+1, f_1,\dots,f_r\end{matrix}\middle|\, 1\right)=\frac{k!}{(b+1)_k}\frac{(f_1-b)_{m_1}\cdots(f_r-b)_{m_r}}{(f_1)_{m_1}\cdots(f_r)_{m_r}}, \tag{1} $$

$k\geqslant m$, $k\in\mathbb{N}$, и модернизированная Карлссоном в [6] к виду

$$ {}_{r+2}F_{r+1}\left(\begin{matrix}a, b, f_1+m_1,\dots,f_r+m_r\\ b+1, f_1,\dots,f_r\end{matrix}\middle|\, 1\right)=\frac{\Gamma(b+1)\Gamma(1-a)}{\Gamma(b+1-a)}\frac{(f_1-b)_{m_1}\cdots(f_r-b)_{m_r}}{(f_1)_{m_1}\cdots(f_r)_{m_r}} \tag{2} $$

при условии $\Re(1-a-m)>0$. В дальнейшем формулы (1), (2) были обобщены в различных направлениях: в работах Гаспера [7], Чу [8,9], Шлоссера [10,11] получены q-аналоги формул Карлссона–Минтона для q-гипергеометрических рядов и их обобщений, в наших предыдущих работах [12,13] мы сосредоточились на распространении (1), (2) при замене числа b вектором $\mathbf{b}$. В первой теореме настоящей работы мы дополним Теорему 1 работы [13] частным случаем суммирования гипергеометрической функции при отрицательном параметрическом балансе. Чтобы сформулировать результат, нам понадобятся коэффициенты Норлунда. Напомним, что коэффициенты Норлунда для комплексных векторов размерности $\mathbf{a}=(a_1,\dots a_{q-1}),\mathbf{b}=(b_1\dots b_q)$ определяются как

$$ \mathrm{g}_n(\mathbf{a};\mathbf{b})=\sum_{0\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant\ \dots\ \leqslant j_{q-2}\leqslant n}\ \prod_{l=1}^{q-1}\frac{(\psi_l+j_{l-1})_{j_l-j_{l-1}}}{(j_l-j_{l-1})!}(b_{l+1}-a_l)_{j_l-j_{l-1}}, \tag{3} $$

где $\psi_l=\sum\limits_{i=1}^{l}(b_i-a_i)$, $j_0=0$, $j_{q-1}=n$ (см, например, [14]). В частности, начальные коэффициенты задаются следующими выражениями:

$$ \mathrm{g}_0(\mathbf{a};\mathbf{b})=1,\quad \mathrm{g}_1(\mathbf{a};\mathbf{b})=\sum_{l=1}^{q-1}(b_{l+1}-a_l)\,\psi_l, $$

$$ \mathrm{g}_2(\mathbf{a};\mathbf{b})=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{q-1}(b_{l+1}-a_l)_2(\psi_l)_2+\sum_{k=2}^{q-1}(b_{k+1}-a_k)(\psi_k+1)\sum_{l=1}^{k-1}(b_{l+1}-a_l)\psi_l. $$

Теорема 1. *Предположим, что все координаты вектора* $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_l)$ *различны,* $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_l)\in\mathbb{N}_0^l$, $n=n_1+\ldots+n_l$, $\mathbf{f}\in\mathbb{C}^r$, $\mathbf{m}\in\mathbb{N}^r$, $m=m_1+\ldots+m_r$, $k\in\mathbb{N}_0$, $-b_i\notin\mathbb{N}_0$, $-f_j\notin\mathbb{N}_0$ *для* $i=1,\ldots,l$, $j=1,\ldots r$. *Тогда при* $0\leqslant k\leqslant m-n$ *выполняется*

$$
{}_{r+n+1}F_{r+n}\left(\begin{array}{c}-k,b_1,\ldots,b_1,b_2,\ldots,b_2,\ldots,b_l,\ldots,b_l,\mathbf{f}+\mathbf{m}\\ \underbrace{b_1+1,\ldots,b_1+1}_{n_1-times},\underbrace{b_2+1,\ldots,b_2+1}_{n_2-times},\ldots,\underbrace{b_l+1,\ldots,b_l+1}_{n_l-times},\mathbf{f}\end{array}\right)=
$$

$$
=\frac{k!}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}}\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{k_i=1}^{n_i}\alpha_{k_i,i}\frac{(-1)^{k_i+1}}{(k_i-1)!}\left(\frac{(\mathbf{f}-x)_{\mathbf{m}}}{(x)_{k+1}}\right)^{(k_i-1)}_{x=b_i}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{k_i=1}^{n_i}\alpha_{k_i,i}W_{k_i,i}\right),
$$

где $\alpha_{k_i,i}$ *находятся из разложения* $\prod\limits_{i=1}^{l}\dfrac{b_i^{n_i}}{(b_i+x)^{n_i}}=\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{k_i=1}^{n_i}\dfrac{\alpha_{k_i,i}}{(b_i+x)^{k_i}}$ *и*

$$
W_{k_i,i}=\sum_{v=0}^{m-k-2}\frac{(-1)^{k_i+m}\mathrm{g}_{m-k-v-2}(-\mathbf{f};(-\mathbf{f}-\mathbf{m},k))}{(k_i-1)!}\left.\frac{\mathrm{d}^{k_i-1}(x-1-v)_{v+1}}{\mathrm{d}x^{k_i-1}}\right|_{x=b_i},
$$

если $k_i\geqslant 2$,

$$
W_{k_i,i}=(-1)^{m+1}\sum_{v=0}^{m-k-1}\mathrm{g}_{m-k-v-1}(-\mathbf{f};(-\mathbf{f}-\mathbf{m},k))(b_i-v)_v,
$$

если $k_i=1$.

Напомним, что коэффициенты Норлунда $\mathrm{g}_p(-\mathbf{f};(-\mathbf{f}-\mathbf{m},k))$ определяются по формуле (3). Из Теоремы 1, в частности, вытекает

$$
{}_{r+l+1}F_{r+l}\left(\begin{array}{c}-k,\mathbf{b},\mathbf{f}+\mathbf{m}\\ \mathbf{b}+1,\mathbf{f}\end{array}\right)=\frac{k!(\mathbf{b})}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}}\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\Bigg[\left(\frac{(\mathbf{f}-b_i)_{\mathbf{m}}}{(b_i)_{k+1}}\right)+
$$

$$
+(-1)^{m+1}\sum_{v=0}^{m-k-1}\mathrm{g}_{m-k-v-1}(-\mathbf{f};(-\mathbf{f}-\mathbf{m},k))(b_i-v)_v\Bigg],
$$

где $\alpha_i=\left(\prod\limits_{v=1,v\neq i}^{l}(b_v-b_i)\right)^{-1}$. Примеры других формул суммирования приведены в параграфе 3 в конце статьи.

С формулами суммирования для обобщенных гипергеометрических функций с целыми параметрическими разностями тесно связаны преобразования Миллера–Париса [15] и их обобщения (более подробно об этом можно узнать, например, посмотрев формулы суммирования в теореме 4 и в примере 2 статьи [16]). В настоящей работе мы сделаем несколько замечаний, касающихся данных преобразований.

Первое преобразование Миллера–Париса имеет вид

$$
{}_{r+2}F_{r+1}\left(\left.\begin{array}{c}a,b,\mathbf{f}+\mathbf{m}\\ c,\mathbf{f}\end{array}\right|x\right)=(1-x)^{-a}{}_{m+2}F_{m+1}\left(\left.\begin{array}{c}a,c-b-m,\boldsymbol{\zeta}+1\\ c,\boldsymbol{\zeta}\end{array}\right|\frac{x}{x-1}\right),\qquad(4)
$$

где $\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_r)$ — вектор положительных целых чисел, $m=m_1+m_2+\dots+m_r$ и $\mathbf{f}=(f_1,\dots,f_r)$ — вектор комплексных чисел [17, Theorem 1]. Здесь вектор $\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\zeta}(c,b,\mathbf{f})=(\zeta_1,\dots,\zeta_m)$ состоит из корней полинома

$$Q_m(t)=\frac{1}{(c-b-m)_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}\,{}_{r+1}F_r\left(\begin{matrix}-k,\mathbf{f}+\mathbf{m}\\ \mathbf{f}\end{matrix}\right)(b)_k(t)_k(c-b-m-t)_{m-k}. \quad (5)$$

Преобразование (4) выполняется при условии $b\neq f_j$ для любого $j=1\dots r$, $(c-b-m)_m\neq 0$ и $x\in\mathbb{C}\setminus[1,\infty]$. Теорема 2 нашей работы дополняет (4) трехчленным соотношением для гипергеометрических функций с целыми параметрическими разностями.

Теорема 2. *Пусть выполняется* (4). *Тогда*

$$\begin{aligned}{}_{r+3}F_{r+2}\left(\left.\begin{matrix}a,b,\mathbf{f}+\mathbf{m},d+1\\ c,\mathbf{f},d\end{matrix}\right|x\right)&=\\ &=(1-x)^{-a-1}\,{}_{m+3}F_{m+2}\left(\left.\begin{matrix}a,c-b-m,\boldsymbol{\zeta}+1,d+1\\ c,\boldsymbol{\zeta},d\end{matrix}\right|\frac{x}{x-1}\right)+\\ &+\frac{(a-d)x(1-x)^{-a-1}}{d}\,{}_{m+2}F_{m+1}\left(\left.\begin{matrix}a,c-b-m,\boldsymbol{\zeta}+1\\ c,\boldsymbol{\zeta}\end{matrix}\right|\frac{x}{x-1}\right). \quad (6)\end{aligned}$$

Замечание. Полином $Q_m(t)$, построенный по формуле (5), зависит от входящих параметров $b,c,\mathbf{f},\mathbf{m}$. При необходимости подчеркнуть эту зависимость мы будем обозначать $Q_m(t)$ через $Q_m(b,c,\mathbf{f},\mathbf{m};t)$. Применяя к каждому слагаемому в (6) преобразование (4), получим

$$\begin{aligned}{}_{r+3}F_{r+2}\left(\left.\begin{matrix}a,b,\mathbf{f}+\mathbf{m},d+1\\ c,\mathbf{f},d\end{matrix}\right|x\right)&=(1-x)^{-1}\,{}_{m+3}F_{m+2}\left(\left.\begin{matrix}a,b-1,\boldsymbol{\lambda}+1\\ c,\boldsymbol{\lambda}\end{matrix}\right|x\right)+\\ &+\frac{(a-d)x}{d(1-x)}\,{}_{m+2}F_{m+1}\left(\left.\begin{matrix}a,b,\boldsymbol{\omega}+1\\ c,\boldsymbol{\omega}\end{matrix}\right|x\right). \quad (7)\end{aligned}$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}$ — корни первого полинома Миллера–Париса $Q_{m+1}(c-b-m,c,(\boldsymbol{\zeta},d),(\mathbf{1},1);t)$ и $\boldsymbol{\omega}$ — корни $Q_m(c-b-m,c,\boldsymbol{\zeta},\mathbf{1};t)$. Меняя местами в (6) a и $c-b-m$, аналогичным образом получим

$$\begin{aligned}{}_{r+3}F_{r+2}\left(\left.\begin{matrix}a,b,\mathbf{f}+\mathbf{m},d+1\\ c,\mathbf{f},d\end{matrix}\right|x\right)&=\\ &=(1-x)^{c-a-b-m-1}\,{}_{m+3}F_{m+2}\left(\left.\begin{matrix}c-a-m-1,c-b-m,\boldsymbol{\lambda}_1+1\\ c,\boldsymbol{\lambda}_1\end{matrix}\right|x\right)+\\ &+\frac{(a-d)x(1-x)^{c-a-b-m-1}}{d}\,{}_{m+2}F_{m+1}\left(\left.\begin{matrix}c-a-m,c-b-m,\boldsymbol{\omega}_1+1\\ c,\boldsymbol{\omega}_1\end{matrix}\right|x\right), \quad (8)\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\lambda}_1$ — корни $Q_{m+1}(a,c,(\boldsymbol{\zeta},d),(\mathbf{1},1);t)$ и $\boldsymbol{\omega}_1$ — корни $Q_m(a,c,\boldsymbol{\zeta},\mathbf{1};t)$. Формула (8) является аналогом (6) для второго преобразования Миллера–Париса.

Второе преобразование Миллера–Париса справедливо в случае $(c-b-m)_m\neq 0$, $(c-a-m)_m\neq 0$, $(1+a+b-c)_m\neq 0$. Это преобразование получается двукратным применением первого преобразования и задается формулой

$${}_{r+2}F_{r+1}\left(\left.\begin{matrix}a,b,\mathbf{f}+\mathbf{m}\\ c,\mathbf{f}\end{matrix}\right|x\right)=(1-x)^{c-a-b-m}\,{}_{m+2}F_{m+1}\left(\left.\begin{matrix}c-a-m,c-b-m,\boldsymbol{\eta}+1\\ c,\boldsymbol{\eta}\end{matrix}\right|x\right), \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\ldots,\eta_m)$ корни полинома

$$\hat{Q}_m(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k C_{k,r}(a)_k(b)_k(t)_k}{(c-a-m)_k(c-b-m)_k}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+k,t+k,c-a-b-m\\ c-a-m+k,c-b-m+k\end{matrix}\right), \tag{10}$$

и $C_{k,r}=C_{k,r}(\mathbf{f},\mathbf{m})=\dfrac{(-1)^k}{k!}\,{}_{r+1}F_r\left(\begin{matrix}-k,\mathbf{f}+\mathbf{m}\\ \mathbf{f}\end{matrix}\right)$. Для нахождения преобразования (9) достаточно знать полином $\hat{Q}_m(t)/\hat{Q}_m(0)$, поскольку $(\boldsymbol{\eta}+1)_n/(\boldsymbol{\eta})_n=(\boldsymbol{\eta}+n)/(\boldsymbol{\eta})=$ $=\hat{Q}_m(-n)/\hat{Q}_m(0)$. Заметим также, что $\hat{Q}_m(0)=1$, и это единственный полином с такой нормировкой и корнями $\boldsymbol{\eta}$. В следующей теореме мы демонстрируем, как второе преобразование Миллера–Париса получается по индукции из преобразования Эйлера и каждый следующий полином $\hat{Q}_m(t)$ с увеличением размерности вектора $\mathbf{f}$ может быть получен из предыдущего.

Теорема 3. *Пусть* $\hat{Q}_m(t)$ — *полином в преобразовании* (9) *для функции* ${}_{r+2}F_{r+1}\left(\begin{matrix}a,b,\mathbf{f}+\mathbf{m}\\ c,\mathbf{f}\end{matrix}\middle|\,x\right)$, $\hat{Q}_{m+1}(t)$ — *полином в* (9) *для* ${}_{r+3}F_{r+2}\left(\begin{matrix}a,b,\mathbf{f}+\mathbf{m},d+1\\ c,\mathbf{f},d\end{matrix}\middle|\,x\right)$. *Тогда*

$$\hat{Q}_{m+1}(t)=\frac{(-t+d)(c-a-m-1-t)(c-b-m-1-t)}{(c-a-m-1)(c-b-m-1)d}\hat{Q}_m(t)-\\ -\frac{t(t+1-d-c+a+b+m)(c-t-1)}{(c-a-m-1)(c-b-m-1)d}\hat{Q}_m(t+1).$$

Заметим, что гипергеометрическая функция при условии $\Re(\mathbf{a})>0$ представима интегралом Лапласа от G-функции Майера [18, формула (10)]:

$${}_{q+1}F_q\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\middle|-z\right)=\frac{\Gamma(\mathbf{b})}{\Gamma(\mathbf{a})}\int\limits_0^\infty e^{-zt}\,G^{q+1,0}_{q,q+1}\left(t\,\middle|\,\begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{matrix}\right)\frac{dt}{t}. \tag{11}$$

Более подробное определение G-функции $G^{q+1,0}_{q,q+1}\left(t\,\middle|\,\begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{matrix}\right)$ можно посмотреть, например, в источнике [18]. Таким образом, второе преобразование Миллера–Париса (9) имеет вид $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, где $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ — интегралы Лапласа. Поэтому функция $f(x)$ есть свертка функций $f_1(x)$, $f_2(x)$. Этот факт приводит к следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть выполняется* (9), $\mathbf{a}=(a,b,\mathbf{f}+\mathbf{m})$, $\mathbf{c}=(c-a-m,c-b-m,\boldsymbol{\eta}+1)$, $\Re(\mathbf{a})>0$, $\Re(\mathbf{c})>0$ *и* $c-a-b-m<0$. *Тогда*

$$G^{r+2,\,0}_{r+1,\,r+2}\left(t\,\middle|\,\begin{matrix}c-1,\,\mathbf{f}-1\\ a-1,\,b-1,\,\mathbf{f}+\mathbf{m}-1\end{matrix}\right)=\\ =\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(\mathbf{f}+\mathbf{m})\,\Gamma(\boldsymbol{\eta})}{\Gamma(\mathbf{f})\,\Gamma(c-a-m)\,\Gamma(c-b-m)\,\Gamma(\boldsymbol{\eta}+1)\Gamma(a+b+m-c)}\times\\ \times\int\limits_0^t e^{-\tau}\tau^{a+b+m-c-1}G^{m+2,\,0}_{m+1,\,m+2}\left(t-\tau\,\middle|\,\begin{matrix}c-1,\,\boldsymbol{\eta}-1\\ c-a-m-1,\,c-b-m-1,\,\boldsymbol{\eta}\end{matrix}\right)d\tau,$$

где $\boldsymbol{\eta}$ — *корни полинома* (10).

2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 практически повторяет доказательство Теоремы 1 из статьи [13] с переобозначением $a=-k$ и некоторыми поправками. Во-первых, заметим, что формулу (10) из [13] нельзя применять при отрицательном параметрическом балансе за исключением случая, когда гипергеометрические ряды представляют конечную сумму (рассматриваемый случай $a=-k$ именно такой). Во-вторых, для суммирования ${}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} a-1, x-1, \mathbf{f}+\mathbf{m}-1 \\ x, \mathbf{f}-1 \end{matrix}\right)$ нужно применить взамен формулы Карлссона – Минтона формулу (2.3) из работы [12]:

$$
{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} -k, b, \mathbf{f}+\mathbf{m} \\ b+1, \mathbf{f} \end{matrix}\right) = \frac{k!}{(b+1)_k}\frac{(\mathbf{f}-b)_{\mathbf{m}}}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}} - \frac{(-1)^m k! b}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}} u_k,
$$

где $0\leqslant k\leqslant m-1$, $u_k=\sum\limits_{i=0}^{m-k-1}(b-i)_i\, g_{m-k-i-1}(b-\mathbf{f};(b-\mathbf{f}-\mathbf{m}, b+k))$ $\square$.

Доказательство теоремы 2. Записывая гипергеометрические функции в первом преобразовании Миллера – Париса в виде ряда, умножая на x^d и дифференцируя по x, получаем равенство

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(\mathbf{f}+\mathbf{m})_n(n+d)x^{n+d-1}}{n!(c)_n(\mathbf{f})_n} &= \\
= a(1-x)^{-a-1}\sum_{n=0}^{\infty}&\frac{(a)_n(c-b-m)_n(\boldsymbol{\zeta}+1)_n}{n!(c)_n(\boldsymbol{\zeta})_n}\frac{x^{n+d}}{(x-1)^n}+ \\
+(1-x)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}&\frac{(a)_n(c-b-m)_n(\boldsymbol{\zeta}+1)_n}{n!(c)_n(\boldsymbol{\zeta})_n}\frac{x^{n+d-1}}{(x-1)^{n+1}}(xd-d-n) = \\
=(1-x)^{-a-1}\Bigg(&\sum_{n=0}^{\infty}(a-d)\frac{(a)_n(c-b-m)_n(\boldsymbol{\zeta}+1)_n}{n!(c)_n(\boldsymbol{\zeta})_n}\frac{x^{n+d}}{(x-1)^n}+ \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(c-b-m)_n(\boldsymbol{\zeta}+1)_n}{n!(c)_n(\boldsymbol{\zeta})_n}\frac{x^{n+d-1}}{(x-1)^n}(d+n)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Сокращение на x^{d-1} с учетом равенства $(d+n)/d=(d+1)_n/(d)_n$ приводит к утверждению теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 3. Умножаем второе преобразование Миллера – Париса на x^d

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(\mathbf{f}+\mathbf{m})_n x^{n+d}}{n!(c)_n(\mathbf{f})_n} = (1-x)^{c-a-b-m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c-a-m)_n(c-b-m)_n(\boldsymbol{\eta}+1)_n x^{n+d}}{n!(c)_n(\boldsymbol{\eta})_n},
$$

дифференцируем, сокращаем на x^{d-1} и учитываем, что $(d+1)_n/(d)_n=(d+n)/d$. В итоге получим

$$
{}_{r+3}F_{r+2}\left(\left.\begin{matrix} a, b, \mathbf{f}+\mathbf{m}, d+1 \\ c, \mathbf{f}, d \end{matrix}\right| x\right) =
$$

$$
= \frac{1}{d}(1-x)^{c-a-b-m-1}\left((c+a+b+m)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c-a-m)_n(c-b-m)_n(\boldsymbol{\eta}+1)_n x^{n+1}}{n!(c)_n(\boldsymbol{\eta})_n} + \right.
$$

$$
\left. + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c-a-m)_n(c-b-m)_n(\boldsymbol{\eta}+1)_n(n+d)x^n}{n!(c)_n(\boldsymbol{\eta})_n}\right). \quad (12)
$$

Дальнейшие преобразования (12) с использованием формул $(a)_k = (a)_{k-1}(a+k-1)$, $(a)_{k-1} = (a-1)_k/(a-1)$ дают

$$
\frac{1}{d}(1-x)^{c-a-b-m-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c-a-m)_n(c-b-m)_n(\boldsymbol{\eta}+1)_n(n+d)x^n}{n!(c)_n(\boldsymbol{\eta})_n} + \right.
$$

$$
\left. + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c-a-m)_n(c-b-m)_n(\boldsymbol{\eta}+1)_n x^{n+1}}{(n+1)!(c)_n(\boldsymbol{\eta})_n}(n+1)(-n-d-c+a+b+m)\right) =
$$

$$
= (1-x)^{c-a-b-m-1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(c-a-m-1)_k(c-b-m-1)_k x^k}{k!d(c-a-m-1)(c-b-m-1)(c)_k}\times\right.
$$

$$
\times\left\{(k+d)(c-a-m-1+k)(c-b-m-1+k)\frac{(\boldsymbol{\eta}+k)}{(\boldsymbol{\eta})} + \right.
$$

$$
\left.\left. + k(-k+1-d-c+a+b+m)(c+k-1)\frac{(\boldsymbol{\eta}+k-1)}{(\boldsymbol{\eta})}\right\}\right),
$$

что и приводит к формулировке теоремы с учетом единственности полинома $\hat{Q}_m(t)/\hat{Q}_m(0)$ в преобразовании (9). $\square$

Доказательство теоремы 4. Заменим в (9) x на $-x$, затем воспользуемся соотношениями (11) и представлением

$$
(1+x)^{c-a-b-m} = \frac{1}{\Gamma(-c+a+b+m)}\int_0^{\infty} e^{-(x+1)t} t^{a+b+m-c}\frac{dt}{t}.
$$

В итоге получим

$$
\frac{\Gamma(c)\Gamma(\mathbf{f})}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(\mathbf{f}+\mathbf{m})}\int_0^{\infty} e^{-xt} G^{r+2,0}_{r+1,r+2}\left(t\left|\begin{matrix} c, \mathbf{f} \\ a, b, \mathbf{f}+\mathbf{m}\end{matrix}\right.\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{\Gamma(a+b+m-c)}\int_0^{\infty} e^{-xt}e^{-t}t^{a+b+m-c}\frac{dt}{t}\times
$$

$$
\times\frac{\Gamma(c)\Gamma(\boldsymbol{\eta})}{\Gamma(c-a-m)\Gamma(c-b-m)\Gamma(\boldsymbol{\eta}+1)}\int_0^{\infty} e^{-xt} G^{r+2,0}_{r+1,r+2}\left(t\left|\begin{matrix} c, \boldsymbol{\eta} \\ c-a-m, c-b-m, \boldsymbol{\eta}+1\end{matrix}\right.\right)\frac{dt}{t}.
$$

Далее, используя теорему о свертке для интегралов Лапласа и формулу сдвига для

G-функции Майера (см., например, [12, (1.6)]), получаем

$$\int\limits_0^\infty e^{-xt} G^{r+2,0}_{r+1,r+2}\left(t \middle| \begin{matrix} c-1, \mathbf{f}-1 \\ a-1, b-1, \mathbf{f}+\mathbf{m}-1 \end{matrix}\right) dt =$$
$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(\mathbf{f}+\mathbf{m})\Gamma(\boldsymbol{\eta})}{\Gamma(\mathbf{f})\Gamma(a+b+m-c)\Gamma(c-a-m)\Gamma(c-b-m)\Gamma(\boldsymbol{\eta}+1)} \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty e^{-xt}\left(\int\limits_0^t e^{-\tau}\tau^{a+b+m-c-1} G^{m+2,0}_{m+1,m+2}\left(t-\tau \middle| \begin{matrix} c-1, \boldsymbol{\eta}-1 \\ c-a-m-1, c-b-m-1, \boldsymbol{\eta} \end{matrix}\right) d\tau\right) dt.$$

Единственность преобразования Лапласа приводит к формулировке теоремы □.

3. Примеры формул суммирования

Пример 1. Пусть $k=m-2$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$, $\mathbf{f}=(f)$, тогда

$$ {}_5F_4\left(\begin{matrix} 2-m, b_1, b_2, f+m \\ b_1+1, b_2+1, f \end{matrix}\right) = \frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{b_2(m-2)!(f-b_1)_m}{(b_1+1)_{m-2}(f)_m} - \right.$$
$$\left. - \frac{(-1)^m(m-2)!b_1^2 b_2}{(f)_m} - \frac{b_1(m-2)!(f-b_2)_m}{(b_2+1)_{m-2}(f)_m} + \frac{(-1)^m(m-2)!b_1 b_2^2}{(f)_m}\right).$$

Пример 2. Пусть $k=m-3$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\mathbf{f}=(f)$, тогда

$$ {}_5F_4\left(\begin{matrix} 3-m, b_1, b_2, b_3, f+m \\ b_1+1, b_2+1, b_3+1, f \end{matrix}\right) = \frac{b_2 b_3}{(b_2-b_1)(b_3-b_1)}\left(\frac{(m-3)!(f-b_1)_m}{(b_1+1)_{m-3}(f)_m} - \right.$$
$$\left. - \frac{(-1)^m(m-3)!b_1}{(f)_m}\left(\frac{1}{2}(f+m-3)_2(-m)_2 + (f+m-3)(-m)(b_1-1) + (b_1-2)_2\right)\right) +$$
$$+ \frac{b_1 b_3}{(b_1-b_2)(b_3-b_2)}\left(\frac{(m-3)!(f-b_2)_m}{(b_2+1)_{m-3}(f)_m} - \right.$$
$$\left. - \frac{(-1)^m(m-3)!b_2}{(f)_m}\left(\frac{1}{2}(f+m-3)_2(-m)_2 + (f+m-3)(-m)(b_2-1) + (b_2-2)_2\right)\right) +$$
$$+ \frac{b_1 b_2}{(b_1-b_3)(b_2-b_3)}\left(\frac{(m-3)!(f-b_3)_m}{(b_3+1)_{m-3}(f)_m} - \right.$$
$$\left. - \frac{(-1)^m(m-3)!b_3}{(f)_m}\left(\frac{1}{2}(f+m-3)_2(-m)_2 + (f+m-3)(-m)(b_3-1) + (b_3-2)_2\right)\right).$$

В примерах 3 и 4 через $\psi(a)$ обозначена дигамма-функция, $\psi(a)=\Gamma'(a)/\Gamma(a)$, и мы предполагаем, что все аргументы дигамма-функции, встречаемые в формулах, не равны отрицательным целым числам.

Пример 3. Пусть $k=m-4$, $n_1=2$, $n_2=2$, $\mathbf{f}=(f)$, $\mathrm{g}_1=-m(m-5+f)$, $\mathrm{g}_2= = \dfrac{(-m)_2(m-5+f)_2}{2}$, тогда

$$
{}_6F_5\left(\begin{array}{c}4-m,b,b,c,c,f+m\\ b+1,b+1,c+1,c+1,f\end{array}\right)=\frac{(m-4)!b^2c^2}{(f)_m}\left[\frac{2}{(c-b)^3}\left(\frac{(f-c)_m}{(c)_{m-3}}-\frac{(f-b)_m}{(b)_{m-3}}+\right.\right.
$$

$$
\left.+(-1)^{m+1}\Big(\mathrm{g}_2(c-1)+\mathrm{g}_1(c-2)_2+(c-3)_3\Big)-(-1)^{m+1}\Big(\mathrm{g}_2(b-1)+\mathrm{g}_1(b-2)_2+(b-3)_3\Big)\right)-
$$

$$
-\frac{1}{(c-b)^2}\left(\frac{(f-b)_m}{(b)_{m-3}}\Big(\psi(f-b)-\psi(f-b+m)+\psi(b)-\psi(b+m-3)\Big)+\right.
$$

$$
+(-1)^{m+1}\Big(\mathrm{g}_2+\mathrm{g}_1(b-2)_2(\psi(b)-\psi(b-2))+(b-3)_3(\psi(b)-\psi(b-3))\Big)+
$$

$$
+\frac{(f-c)_m}{(c)_{m-3}}\Big(\psi(f-c)-\psi(f-c+m)+\psi(c)-\psi(c+m-3)\Big)+
$$

$$
\left.\left.+(-1)^{m+1}\Big(\mathrm{g}_2+\mathrm{g}_1(c-2)_2(\psi(c)-\psi(c-2))+(c-3)_3(\psi(c)-\psi(c-3))\Big)\right)\right].
$$

Пример 4. Пусть $k=m-5$, $n_1=2$, $\mathbf{f}=(f)$, $\mathrm{g}_1=-m(m-5+f)$, $\mathrm{g}_2=\dfrac{(-m)_2(m-5+f)_2}{2}$, $\mathrm{g}_3=\dfrac{(-m)_3(f+m-5)_3}{3!}$, тогда

$$
{}_4F_3\left(\begin{array}{c}5-m,b,b,f+m\\ b+1,b+1,f\end{array}\right)=\frac{(-1)^3(m-5)!b^2}{(f)_m}\left[\frac{(f-b)_m}{(b)_{m-4}}\Big(\psi(f-b)-\psi(f-b+m)+\right.
$$

$$
+\psi(b)-\psi(b+m-4)\Big)+(-1)^{m+1}\Big(\mathrm{g}_3+\mathrm{g}_2(b-2)_2(\psi(b)-\psi(b-2))+
$$

$$
\left.+\mathrm{g}_1(b-3)_3(\psi(b)-\psi(b-3))+(b-4)_4(\psi(b)-\psi(b-4))\Big)\right].
$$

Список литературы

[1] Andrews G. E., Askey R., Roy R., *Special functions*, Cambridge University Press, 1999.

[2] Beals R., Wong R., *Special Functions and Orthogonal Polynomials*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (No. 153), Cambridge University Press, 2016.

[3] Luke Y. L., *The special functions and their approximations*, v. 1, Academic Press, 1969.

[4] Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. (Eds.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010.

[5] Minton B. M., “Generalized hypergeometric functions at unit argument”, *J. Math. Phys.*, **12**, (1970), 1375–1376.

[6] Karlsson P. W., “Hypergeometric functions with integral parameter differences”, *J. Math. Phys.*, **12**, (1971), 270–271.

[7] Gasper G., “Summation formulas for basic hypergeometric series”, *SIAM J. Math. Anal.*, **12**, (1981), 196–200.

[8] Chu W., “Partial fractions and bilateral summations”, *J. Math. Phys.*, **35**, (1994), 2036.

[9] Chu W., "Erratum: Partial fractions and bilateral summations", *J. Math. Phys.*, **36**, (1995), 5198.

[10] Schlosser M., "Multilateral transformations of q-series with quotients of parameters that are nonnegative integral powers of q", *q-Series with Applications to Combinatorics, Number Theory, and Physics*, v. 291, eds. B. C. Berndt, K. Ono, Amer. Math. Soc., Contemp. Math., 2001, 203–227.

[11] Schlosser M., "Elementary derivations of identities for bilateral basic hypergeometric series", *Selecta Math. (N.S.)*, **9**:1, (2003), 119–159.

[12] Karp D. B., Prilepkina E. G., "Extensions of Karlsson – Minton summation theorem and some consequences of the first Miller – Paris transformation", *Integral Transforms and Special Functions*, **29**, (2018), 955–970.

[13] Bakhtin K., Prilepkina E., "On Summations of Generalized Hypergeometric Functions with Integral Parameter Differences", *Mathematics*, **12**, (2024).

[14] Karp D., Prilepkina E., "Hypergeometric differential equation and new identities for the coefficients of Nørlund and Bühring", *SIGMA*, **12**, (2016), 052, 23 pp.

[15] Miller A. R., Paris R. B., "Transformation formulas for the generalized hypergeometric function with integral parameter differences", *Rocky Mountain J. Math.*, **43**:1, (2013), 291–327.

[16] Karp D. B., Prilepkina E. G., "Degenerate Miller-Paris transformations", *Results in Mathematics*, **74**, (2019), 94.

[17] Kim Y. S., Rathie A. K., Paris R. B., "On two Thomae-type transformations for hypergeometric series with integral parameter differences", *Math. Commun.*, **19**, (2014), 111–118.

[18] Karp D. B., "Representations and inequalities for generalized hypergeometric functions", *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, **429**, (2014), 121–139.

Поступила в редакцию
29 июля 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

Bakhtin K. E.[1,2], *Prilepkina E. G.*[1] On transformations of hypergeometric functions with integer parameter differences. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2025. V. 25. No 2. P. 261–270.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences
[2] Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

Several facts concerning transformations and summations of hypergeometric functions with integral parametric differences have been proven. A new summation formula complementing the well-known Karlsson – Minton summation formula has been established. A new three – term relation has been derived from the first Miller – Paris transformation. It is shown how the second Miller – Paris transformation can be obtained by induction from the Euler – Pfaff transformation, and a recursive formula for the representing polynomial is provided. An integral representation of Meijer's G-function, which underlies the second Miller – Paris transformation, has been established.

Key words: *generalized hypergeometric function, summation formulas, hypergeometric identity, Miller – Paris transformations*