УДК 511.9

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ОКТАЭДРАЛЬНЫЕ МИНИМУМЫ ДВУМЕРНЫХ РЕШЕТОК

О. А. Горкуша
(г. Хабаровск ИПМ ДВО РАН)

Аннотация

В работе рассматриваются минимумы решеток, устанавливается критерий, при котором минимум будет октаэдральным (эллиптическим).

Введение

Двумерная Γ решетка из $\mathfrak{L}_2(\mathbf{R}^2)$ определяется как множество целочисленных линейных комбинаций двух линейно независимых векторов $\gamma^{(1)} = (\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)})$, $\gamma^{(2)} = (\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)})$:

$$\Gamma = \{m_1\gamma^{(1)} + m_2\gamma^{(2)} | m_1, m_2 \in \mathbf{Z}\}$$

с определителем

$$d(\Gamma) = \begin{vmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_1^{(2)} & \gamma_2^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Для удобства введем еще одно обозначение $\Gamma' = \Gamma \setminus \{0, 0\}$.

Определение 1. Узел $\gamma \in \Gamma'$ называется *относительным минимумом,* если не существует другого ненулевого узла $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ решетки Γ, для которого $|\eta_1| \le |\gamma_1|$ и $|\eta_2| < |\gamma_2|$ или $|\eta_1| < |\gamma_1|$ и $|\eta_2| \le |\gamma_2|$.

Определение 2. Узел $\gamma \in \Gamma'$ называется *локальным минимумом,* если не существует другого ненулевого узла $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ с $\eta \ne \pm\gamma$, для которого при некотором фиксированном $0 < \delta < 1$ выполняется $|\eta_1| < \delta|\gamma_1|$ и $|\eta_2| < \delta|\gamma_2|$.

Определение 3. Узел $\gamma \in \Gamma'$ называется *эллиптическим минимумом,* если он принадлежит каноническому эллипсу $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ с некоторыми положительными числами a и b, внутри которого отсутствуют ненулевые узлы решетки Γ.

Определение 4. Узел $\gamma \in \Gamma'$ называется *октаэдральным минимумом,* если он принадлежит ромбу $|x/a| + |y/b| = 1$ с некоторыми положительными числами a и b, внутри которого отсутствуют ненулевые узлы решетки Γ.

Пусть $\mathfrak{M}(\Gamma), \mathfrak{N}(\Gamma), \mathfrak{N}_e(\Gamma), \mathfrak{N}_o(\Gamma)$ — совокупности узлов решетки, составленные из относительных, локальных, эллиптических и октаэдральных минимумов этой решетки. Из определений немедленно следует, что

$$\mathfrak{N}(\Gamma) \supset \mathfrak{M}(\Gamma) \supset \mathfrak{N}_e(\Gamma) \supset \mathfrak{N}_o(\Gamma).$$

В настоящей работе получены условия, при которых относительный минимум будет эллиптическим или октаэдральным.

Вспомогательные замечания

Напомним, что

1) два относительных минимума $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ и $\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2')$ $\gamma \neq \gamma'$ — *смежные,* если не найдется $\eta \in \{\pm\gamma, \pm\gamma/\}$, удовлетворяющего одновременно двум неравенствам $|\eta_1| \leq \max(|\gamma_1|, |\gamma_1'|)$, $|\eta_2| \leq \max(|\gamma_2|, |\gamma_2'|)$.

2) Две решетки $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ подобны, если существуют положительные числа α_1 и α_2, для которых $\Gamma^{(1)} = \{\gamma = (\alpha_1\gamma_1, \alpha_2\gamma_2)\ |(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^{(2)}\}$. Заметим, что $\mathfrak{M}(\Gamma^{(1)}) = \{\gamma = (\alpha_1\gamma_1, \alpha_2\gamma_2)\ |(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{M}(\Gamma^{(2)})\}$. Такие же отношения имеют место и для множеств $\mathfrak{N}(\Gamma), \mathfrak{N}_e(\Gamma), \mathfrak{N}_o(\Gamma)$.

3) Отдельно выделим множество решеток $\overline{\mathfrak{L}}_2(\mathbf{R}^2)$, подобных решетке

$$\overline{\Gamma} = \{m_1(1,1) + m_2(-1,1) | m_1, m_2 \in \mathbf{Z}\}.$$

Тогда для $\overline{\mathfrak{L}}_2(\mathbf{R}^2)$ $\mathfrak{M}(\overline{\Gamma}) = \{\pm(2\alpha_1, 0), \pm(-\alpha_1, \alpha_2), \pm(\alpha_1, \alpha_2), \pm(0, 2\alpha_2)\}$, где числа α_1 и α_2 — коэффициенты подобия.

4) Для остальных решеток последовательность относительных минимумов представляется в виде

$$\begin{gathered} \cdots, \gamma^{(i-1)}, \gamma^{(i)}, \gamma^{(i+1)}, \cdots, \\ \gamma^{(i)} = ((-1)^i x_i, y_i),\ 1 \leq y_i < y_{i+1},\ x_i > x_{i+1} \geq 0, \\ x_{i+1} = x_{i-1} - l_i x_i,\ y_{i+1} = y_{i-1} - l_i y_i,\ l_i = [x_{i-1}/x_i]. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь мы перечислили только узлы с неотрицательными вторыми координатами, учитывая то, что γ и $-\gamma$ могут быть минимумами только одновременно.

5) В такой последовательности любая пара $\gamma^{(i)}, \gamma^{(i+1)}$— смежные относительные минимумы и эта пара образует базис решетки Γ. То есть $d(\Gamma) = x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}$.

Замечание 1. Два относительных минимума $\gamma^{(i-1)}$ и $\gamma^{(i+1)}$ образуют базис только в том случае, когда $l_i = 1$.

Доказательство. Воспользуемся формулой последовательного вычисления координат узлов $\gamma^{(i-1)}, \gamma^{(i)}, \gamma^{(i+1)} : \gamma^{(i+1)} = \gamma^{(i-1)} + l_i\gamma^{(i)}$, где $l_i = [x_{i-1}/x_i]$. Так как пары узлов $\gamma^{(i-1)}, \gamma^{(i)}$ и $\gamma^{(i)}, \gamma^{(i+1)}$ образуют базис решетки, то для целых чисел a, b, c, d имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} (-1)^i x_i & -(-1)^i x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^i x_{i-1} & -(-1)^i x_{i+1} \\ y_{i-1} & y_{i+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(-1)^i x_{i-1} & (-1)^i x_i \\ y_{i-1} & y_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что пара узлов $\gamma^{(i-1)}, \gamma^{(i+1)}$ будет базисом только в случае $|a| = |b| = 1$. А так как $y_{i+1} = y_{i-1}a + y_i b = y_{i-1} + l_i y_i$, то $a = 1$ и $b = l_i$. Также из $x_{i-1} = x_i c + x_{i+1} d = x_{i+1} - l_i x_i$ следует, что $d = 1$ и $c = -l_i$. То есть $l_i = 1$. Замечание 1 доказано. $\square$

Замечание 2. Два относительных минимума $\gamma^{(i-1)}$ и $\gamma^{(i+m)}$ с $m \geq 2$ или $m \leq -4$ никогда не образуют базис решетки Γ.

Доказательство. Докажем это утверждение для $m \geq 2$, применив индукцию по m. Вначале покажем, что $\gamma^{(i-1)}$ и $\gamma^{(i+2)}$ не образуют базис решетки.

Предположим обратное. Тогда для некоторых целых чисел a и b

$$\gamma^{(i)} = a\gamma^{(i-1)} + b\gamma^{(i+2)} = a\gamma^{(i-1)} + b(\gamma^{(i)} + l_{i+1}\gamma^{(i+1)}) =$$

$$= a\gamma^{(i-1)} + b\gamma^{(i)} + bl_{i+1}(\gamma^{(i-1)} + l_i\gamma^{(i)}) =$$
$$= \gamma^{(i-1)}(a + bl_{i+1}) + b\gamma^{(i)}(1 + l_il_{i+1}).$$

Так как $\gamma^{(i-1)}, \gamma^{(i)}$— базис Γ, то $b = 1$ и $l_il_{i+1} = 0$. Далее получаем, что $\gamma^{(i)} = (a + l_{i+1})\gamma^{(i-1)}$. Это возможно только, когда $l_{i+1} = -a \neq 0$. Поэтому или $l_i = 0$ или $x_i = 0$. Чего не может быть, так как $x_i > x_{i+1} \geq 0$. Таким образом, мы показали, что $\gamma^{(i-1)}$ и $\gamma^{(i+2)}$ не образуют базис решетки.

Пусть теперь $\gamma^{(i-1)}$ и $\gamma^{(i+m)}$ не образуют базис решетки и относительно узлов $\gamma^{(i-1)}$ и $\gamma^{(i+m+1)}$ предположим, что они — базисные. Тогда для любого $\gamma \in \Gamma$ имеет место равенство для некоторых чисел a и b

$$\gamma = a\gamma^{(i-1)} + b\gamma^{(i+m+1)} = a\gamma^{(i-1)} + b(\gamma^{(i+m-1)} + l_{i+m}\gamma^{(i+m)}),$$

то есть

$$\gamma - b \cdot l_{i+m}\gamma^{(i+m)} = a\gamma^{(i-1)} + b\gamma^{(i+m-1)}.$$

Мы показали, что $\gamma^{(i-1)}$ и $\gamma^{(i+m-1)}$ — базис решетки, что противоречит предположению индукции. Таким образом $\gamma^{(i-1)}$ и $\gamma^{(i+m+1)}$ — не базисные узлы. Замечание для $m \geq 2$ доказано. Аналогично доказывается замечание для $m \leq -4$, если предварительно обозначить через $m = -m, j = i + 1 - m$. Тогда для $\gamma^{(i-1)}$ и $\gamma^{(i+m-2)}$ уже доказано, что эти узлы не являются базисными для $m \geq 4$. А это и доказывает замечание 2 $m \leq -4$. $\square$

Октаэдральные и эллиптические минимумы

Определение 5. Два октаэдральных минимума $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ и $\eta' = (\eta_1', \eta_2')$, $\eta \neq \eta'$— *смежные*, если они принадлежат ромбу $|x/a| + |y/b| = 1$ с некоторыми положительными числами a и b, внутри которого отсутствуют ненулевые узлы решетки Γ.

Замечание 3. Два смежных октаэдральных минимума $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ и $\eta' = (\eta_1', \eta_2')$ составляют базис решетки Γ.

Доказательство. Пусть и $\eta, \eta' \in \mathfrak{N}_o(\Gamma)$ и η, η' — смежные узлы. Согласно определению найдутся положительные числа a и b, для которых в ромбе $|x/a| + |y/b| = 1$ нет узлов из Γ' и $|\eta_1/a| + |\eta_2/b| = |\eta_1'/a| + |\eta_2'/b| = 1$. Не теряя общности можно считать, что $\eta_1, \eta_2' \geq 0$. Так как η и η' линейно независимы, то любой узел $\gamma \in \Gamma$ представляется в виде

$$\gamma = \alpha\eta_1 + \beta\eta',\ \alpha = n + r_\alpha,\ \beta = m + r_\beta,\ n, m \in \mathbf{Z},\ -\frac{1}{2} < r_\alpha, r_\beta \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\gamma^{(0)} = \gamma - n\eta - m\eta' \in \mathfrak{N}_o(\Gamma)$$

и $\gamma^{(0)}, \eta, \eta'$ — смежные или $\gamma^{(0)} = (0,0)$.

Действительно,

$$|\gamma_1^{(0)}/a| + |\gamma_2^{(0)}/b| = \frac{1}{a}|r_\alpha\eta_1 + r_\beta\eta_1'| + \frac{1}{b}|r_\alpha\eta_2 + r_\beta\eta_2'| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{|\eta_1|}{a} + \frac{|\eta_2|}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{|\eta_1'|}{a} + \frac{|\eta_2'|}{b}\right) = 1.$$

Это возможно только в двух случаях. Первый $\gamma^{(0)} = (0,0)$, второй, когда $r_\alpha = r_\beta = 1/2$, $\mathrm{sign}\ (\eta_1) = \mathrm{sign}\ (\eta_2)$.

Рассмотрим второй случай. Здесь $\gamma^{(0)} = \frac{1}{2}(\eta + \eta')$ и $\gamma^{(0)}$ смежен с η, η'. Повторяя рассуждения для узлов $\gamma^{(0)}$ и η, получаем, что $\gamma^{(1)} = \frac{1}{2}(\eta + \gamma^{(0)}) = \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{2}\eta' \in \Gamma'$ или $\gamma^{(1)} = (0,0)$. Если $\gamma^{(1)} \neq (0,0)$, то узел $\gamma^{(2)} = -\eta + \gamma^{(1)} = -\frac{1}{4}\eta + \frac{1}{2}\eta'$ нарушает смежность узлов η и η', поскольку

$$|\gamma_1^{(2)}/a| + |\gamma_2^{(2)}/b| = \left|\frac{-\eta_1}{4a} + \frac{\eta_1'}{2a}\right| + \left|\frac{-\eta_2}{4b} + \frac{\eta_2'}{2b}\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно $\gamma^{(1)} = (0,0)$ или $3\eta + 4\eta' = (0,0)$, что противоречит линейной независимости узлов η и η'. Таким образом, второй случай не выполняется и $\gamma^{(0)} = (0,0)$. Тем самым мы показали, что $r_\alpha = r_\beta = 0$ и η, η' — базис решетки Γ. $\square$

Теорема 1. Среди любых смежных относительных минимумов хотя бы один будет октаэдральным.

Доказательство. Предположим обратное. То есть найдется пара $\gamma^{(i)}, \gamma^{(i+1)} \notin \mathfrak{N}_a(\Gamma)$. А так как $\mathfrak{N}_o(\Gamma) \subset \mathfrak{M}(\Gamma)$, то существуют индексы i_0 и i_1 ($i_0 < i < i + 1 < i_1$), для которых $\gamma^{(i_0)}, \gamma^{(i_1)}$ — смежные октаэдральные минимумы. Согласно замечанию 3 они образуют базис решетки. А из замечаний 1 и 2 следует, что $i_1 - i_0 \leq 2$. В действительности $i_1 - i_0 \geq i + 2 - (i - 1) = 3$. Получили противоречие. Теорема 1 доказана. $\square$

Из теоремы 1 и того, что $\mathfrak{N}_e(\Gamma) \subset \mathfrak{N}_o(\Gamma)$ непосредственно следует

Теорема 2. Среди любых смежных относительных минимумов хотя бы один будет эллиптическим.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вороной Г.Ф. Собрание сочинений //Т.1. Киев. 1952 г.