Обозначения

$\mathbb{R}_+$ — множество положительных вещественных чисел;

$X^{s\times s}$ — множество матриц размера $s\times s$ с элементами из X;

$\mathrm{GL}_s(X) = \{M \in X^{s\times s}: \quad \det M \neq 0\}$;

$\mathrm{GL}_s(X;N) = \{M \in X^{s\times s}: \quad \det M = N\}$;

если $m^{(1)},\ldots,m^{(s)} \in \mathbb{R}^s$, то $[m^{(1)},\ldots,m^{(s)}]$ — матрица со столбцами ${m^{(1)}}^T,\ldots,{m^{(s)}}^T$;

$\partial\Omega$ — граница, $\overline{\Omega}$ — замыкание множества Ω;

$\#X$ — число элементов конечного множества X.

Запись $f(x) \ll g(x)$ (либо $f(x) = O(g(x))$) при $x \in X$ означает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что $|f(x)| \leqslant C\cdot g(x)$ $\forall x \in X$. Если C зависит от параметра θ, то пишем $f(x) \ll_\theta g(x)$ (либо $f(x) = O_\theta(g(x))$). Запись $f \asymp g$ означает, что $f \ll g \ll f$.

Введение

В конце XIX века были предложены два обобщения непрерывных дробей на многомерный случай. Одно Ф. Клейном [1], а другое Г.Ф. Вороным [2] и независимо от него Г. Минковским [3]. В каждом из них среди узлов некоторой s-мерной решетки Γ выделяются и изучаются множество вершин многогранников Клейна и, соответственно, $\mathfrak{M}(\Gamma)$ — множество всех относительных минимумов Γ.

Напомним определения. Полной целочисленной s-мерной решеткой называется множество вида

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^{s} k_i m^{(i)}: \quad k_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

где $m^{(i)}$ $(i = \overline{1,s})$ — линейно независимые вектора из $\mathbb{Z}^s$ (базис Γ).

Величина $\det\Gamma = |\det((m_j^{(i)}))|$ называется определителем Γ.

Ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$ называется относительным минимумом s-мерной решетки Γ, если не существует другого ненулевого узла $\gamma' \in \Gamma$,

для которого
$$|\gamma_i'| \leqslant |\gamma_i| \quad i=\overline{1,s}, \qquad \sum_{i=1}^{s}|\gamma_i'| < \sum_{i=1}^{s}|\gamma_i'|.$$
Обозначим

$\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)$ — множество полных s-мерных целочисленных решеток,

$\mathfrak{M}(\Gamma)$ — множество относительных минимумов решетки Γ.

Конструкция Вороного и Минковского мотивирована классической теоремой Лагранжа о наилучших приближениях с помощью непрерывных дробей. Так, например, если $\alpha \in (0,1/2)$, то для решетки Γ_α с базисом $(1,\alpha)$, $(0,1)$
$$\mathfrak{M}(\Gamma_\alpha) = \left\{\pm(Q_i, \alpha Q_i - P_i): \quad i=0,1,\ldots\right\}, \tag{1}$$
где $Q_0=0$, $P_0=1$ и P_i/Q_i — i-я подходящая дробь к α при $i\geqslant 1$.

Понятие относительного минимума возникает в различных областях математики. Так, например, в [4, 5] было замечено, что множество относительных минимумов $\mathfrak{M}(\Gamma)$ определяет погрешность многомерных квадратурных формул Коробова (см. еще [6]).

Несмотря на значительный интерес, довольно мало известно про количество относительных минимумов решеток размерности три и выше (для двумерных решеток число относительных минимумов определяется длиной разложения соответствующего α в цепную дробь). Известны только следующие верхняя
$$\#\mathfrak{M}(\Gamma) \ll_s \ln^{s-1} N \quad \forall \Gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}^s;N), \ \ N\geqslant 2 \tag{2}$$
и нижняя
$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}(\mathbb{Z}^s;N)} \#\mathfrak{M}(\Gamma) \gg_s N^{s-1}\ln^{s-1} N \tag{3}$$
оценки. Для полных решеток неравенство (2) доказано в [4, 5] (см. [7] по поводу оценки соответствующей константы), а неравенство (3) — в [10]. Из результатов [10] также вытекает, что оценка (2) является правильной с точностью до константы, зависящей от размерности s. В [8] были получены аналогичные оценки для неполных решеток.

Определим
$$E_s(N) = \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};n)} \#\mathfrak{M}(\Gamma)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};n)}$$

— среднее число относительных минимумов s-мерных целочисленных полных решеток с определителем из отрезка $[1, N]$.

Нетрудно доказать (см. лемму 2.2 ниже), что

$$\sum_{n=1}^{N} \#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; n) \ll_s N^s, \tag{4}$$

Используя (2), (3), (4) легко заметить, что

$$E_s(N) \asymp_s \ln^{s-1} N \quad \text{при } N \geqslant 2.$$

Гипотеза. *Существует постоянная $C(s)$ такая, что*

$$E_s(N) \sim C(s) \ln^{s-1} N \quad \textit{при } N \to +\infty. \tag{5}$$

При $s = 2$ асимптотику (5) нетрудно вывести из классического результата Хейльбронна [9] о средней длине конечной цепной дроби (см. лемму 2.3 ниже), причем

$$C(2) = \frac{4 \ln 2}{\zeta(2)}.$$

Здесь и далее ζ — дзета-функция Римана.

Целью данной работы является доказательство формулы (5) при $s = 3$. Она обобщает классические результаты о средней длине конечной цепной дроби с знаменателем из отрезка $[1, N]$ (см. [11, 9]) на двумерный случай.

Автор благодарен В.А. Быковскому за внимание к работе и полезные советы.

1 Формулировка основного результата

Если

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) : \begin{array}{c} (b_1, c_1) \in W_1 \cdot a_1, \\ (a_2, c_2) \in W_2 \cdot b_2, \\ (a_3, b_3) \in W_3 \cdot c_3, \end{array} \right\},$$

где W_i — измеримые по Жордану множества из $\mathbb{R}^2$, то

$$\mu(\Omega) = \int_{W_1 \times W_2 \times W_3} \frac{db_1\, dc_1\, da_2\, dc_2\, da_3\, db_3}{|\det M(a,b,c)|^3}, \quad M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & 1 & c_2 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что μ инвариантна относительно действия группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Введем следующие множества матриц

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} : \quad a_1 < b_1 + c_1 \right\}, \\
\Omega_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} : \quad \begin{matrix} a_2 > c_2 \\ \text{либо} \\ c_1 > b_1 \end{matrix} \right\}, \\
\Omega_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right\}, \\
\Omega_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} : \quad \begin{matrix} b_2 < a_2 + c_2, \\ b_1 > c_1 \end{matrix} \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}_+, \quad i = 1, 2, 3, \\
&a_1 > b_1, c_1, \quad b_2 > a_2, c_2, \quad c_3 > a_3 > b_3,
\end{aligned}$$

Основной результат настоящей работы заключается в следующем.

Теорема 1.1 *Для любого натурального N справедлива формула*

$$E_3(N) = \frac{4C}{\zeta(2)\zeta(3)} \ln^2 N + O(\ln N + 1),$$

где $C = \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) + 2\mu(\Omega_3) + 2\mu(\Omega_4)$.

З а м е ч а н и е. По-видимому, постоянная C не выражается через известные. Нахождение $\mu(\Omega_i)$ сводится к вычислению 6-мерных интегралов, которые два раза интегрируются явно. Приближенные вычисления дают следующий результат:

$$\begin{aligned}
&\mu(\Omega_1) \approx 0.0442, \quad \mu(\Omega_2) \approx 0.0922, \quad \mu(\Omega_3) \approx 0.1119, \quad \mu(\Omega_4) \approx 0.0268, \\
&C \approx 0.4120, \quad C(3) = \frac{4C}{\zeta(2)\zeta(3)} \approx 0.8335.
\end{aligned}$$

Отметим, что $C(2) \approx 1,6855$.

В следующем параграфе приводятся некоторые вспомогательные сведения, в третьем доказывается, что вычисление $E_3(N)$ сводится к подсчету количества целочисленных матриц специального вида. В разделе 4 выводится формула для нахождения числа целочисленных матриц в заданной области. В последнем разделе завершается доказательство теоремы 1.1.

2 Предварительные сведения

Матрицу, столбцы которой образуют базис решетки Γ, будем называть базисной.

Лемма 2.1 *Для любой решетки* $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; n)$ *существует единственная базисная матрица вида*

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1s} \\ 0 & m_2 & m_{23} & \dots & m_{2s} \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & m_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_s \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $0 < m_{ij} \leqslant m_i$, $i = \overline{i+1, s}$, $j = \overline{1, s}$, $m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_s = n$.

Доказательство. Существование хорошо известно (см., например, [17, глава 1]). Докажем единственность. Пусть таких матриц две: M и M'. Тогда существует целочисленная унимодулярная S для которой $M = M' \cdot S$ и нетрудно последовательно доказать, что

$$s_{ij} = 0 \text{ при } i > j \implies s_{ii} = 1 \implies m_i = m_i', \ i = \overline{1, s} \implies$$
$$m_{ij} \equiv m_{ij}' \pmod{m_i} \ \forall j \neq i \implies m_{ij} = m_{ij}, \ i, j = \overline{1, s}.$$

□

Лемма 2.2 *Для любых* $s \geqslant 2$, $N \in \mathbb{N}$ *справедлива формула*

$$\sum_{n=1}^{N} \#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; n) = \frac{\zeta(2)\zeta(3) \cdot \ldots \cdot \zeta(s)}{s} N^s + O_s\left(N^{s-1} \ln N + 1\right). \tag{7}$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1 число решеток из $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};n)$ равно количеству целочисленных матриц вида (6). Значит,

$$\#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};n) = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s\in\mathbb{N},\\ m_1\cdot\ldots\cdot m_s=n}} m_1^{s-1}m_2^{s-2}\cdot\ldots\cdot m_{s-1},$$

$$\sum_{n=1}^{N}\#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};n) = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s\in\mathbb{N},\\ m_1\cdot\ldots\cdot m_s\leqslant N}} m_1^{s-1}m_2^{s-2}\cdot\ldots\cdot m_{s-1} =$$

$$= \frac{N^s}{s}\sum_{\substack{m_2,\ldots,m_s\in\mathbb{N},\\ m_2\cdot\ldots\cdot m_s\leqslant N}} \frac{1}{m_2^2m_3^3\cdot\ldots\cdot m_s^s} + O_s\left(\sum_{\substack{m_2,\ldots,m_s\in\mathbb{N},\\ m_2\cdot\ldots\cdot m_s\leqslant N}} \frac{N^{s-1}}{m_2m_3^2\cdot\ldots\cdot m_s^{s-1}}\right) =$$

$$= \frac{N^s}{s}\zeta(2)\zeta(3)\cdot\ldots\cdot\zeta(s) + O_s\left(N^{s-1}\ln N + 1\right).$$

□

Для полноты изложения приведем вывод асимптотики среднего числа относительных минимумов двумерных решеток, хотя в дальнейшем этот результат использоваться не будет. Обозначим

$$\sigma(N) = \sum_{d|N} d, \quad \Lambda(N) = \begin{cases}\ln p, & \text{если } N = p^k, \quad p \text{ — простое},\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

— сумма делителей натурального N и функция фон Мангольдта.

Лемма 2.3 *Для любого целого $N \geqslant 2$ справедливы формулы*

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_2(\mathbb{Z};N)} \#\mathfrak{M}(\Gamma) = \frac{4\ln 2}{\zeta(2)}\sum_{d\backslash N} d\left(\ln d - \sum_{r\backslash d}\frac{\Lambda(r)}{r}\right) + O\left(\sigma(N)\right), \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_2(\mathbb{Z};n)} \#\mathfrak{M}(\Gamma) = 2\ln(2)\cdot N^2\ln N + O(N^2), \tag{9}$$

$$E_2(N) = \frac{4\ln 2}{\zeta(2)}\ln N + O(1). \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим $l_d(a)$ — длина разложения $\frac{a}{d}$ в непрерывную дробь; $\Gamma(a,d)$ — решетка с базисом $(d,0)$, $(a,1)$ $(a,d\in\mathbb{N})$. Из формулы (1) вытекает, что

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma(a,d)) = 2l_d(a) + 2 \quad \text{при } 0 < a < d, \ \ a \neq \frac{d}{2}.$$

Так как $\#\mathfrak{M}(\Gamma(a,d))=O(1), \quad l_d(a)=O(1) \quad$ при $d\in\{a,2a\}$, то

$$\sum_{a=1}^{d}\#\mathfrak{M}(\Gamma(a,d))=2\sum_{a=1}^{d}l_d(a)+O(d). \tag{11}$$

Из известного результата Портера [12] вытекает (см. [13, раздел 4.5.3])

$$\sum_{a=1}^{d}l_d(a)=\frac{2\ln 2}{\zeta(2)}d\left(\ln d-\sum_{r\backslash d}\frac{\Lambda(r)}{r}\right)+O\left(d\right). \tag{12}$$

По лемме 2.1 любая решетка из $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z};N)$ имеет единственный базис вида

$$(d,0), \quad (a,d'), \tag{13}$$

где $dd'=N$, $1\leqslant a\leqslant d$. Преобразование узлов $(\gamma_1,\gamma_2)\to(\gamma_1,\gamma_2/d')$ переводит решетку с базисом (13) в решетку $\Gamma(a,d)$. Поэтому,

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_2(\mathbb{Z};N)}\#\mathfrak{M}(\Gamma)=\sum_{d\backslash N}\sum_{a=1}^{d}\#\mathfrak{M}(\Gamma(a,d))$$

и используя (11), (12), получаем (8).

Формула (9) получается суммированием (8). Достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{d\backslash n}d\ln d&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{d\backslash n}\frac{n}{d}\cdot\ln(n/d)=\sum_{d=1}^{N}\sum_{\substack{d\leqslant n\leqslant N,\\ n\equiv 0 \pmod d}}\frac{n}{d}\cdot\ln(n/d)=\\
&=\sum_{d=1}^{N}\left(\frac{1}{d}\int_d^N\frac{t}{d}\cdot\ln(t/d)\,dt+O\left(\frac{N}{d}\ln(N/d)\right)\right)=\\
&=\sum_{d=1}^{N}\left(\frac{N^2}{2d^2}\ln(N/d)+O\left(\frac{N^2}{d^2}+\frac{N}{d}\ln(N/d)\right)\right)=\\
&=\frac{N^2\ln N}{2}\zeta(2)+O(N^2),
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{d\backslash n}d\sum_{r\backslash d}\frac{\Lambda(r)}{r}=\sum_{d=1}^{N}\sum_{r\backslash d}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N,\\ n\equiv 0 \pmod d}}d\cdot\frac{\Lambda(r)}{r}=O(N^2),$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sigma(n)=O(N^2).$$

Соотношение (9) доказано. Формула (10) вытекает из (9) и (7). $\square$

Перейдем к рассмотрению трехмерных решеток. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(N) &= \{(\gamma,\Gamma):\quad \Gamma\in\mathcal{L}_3(\mathbb{Z};N),\ \ \gamma\in\mathfrak{M}(\Gamma)\}\quad \forall N\in\mathbb{N},\\ \mathcal{U}_+(N) &= \{(\gamma,\Gamma)\in\mathcal{U}(N):\quad \gamma_{1,2,3}>0\}. \end{aligned}$$

Используя оценку (2) нетрудно показать (подробнее см. в [8]), что для любой решетки из $\mathcal{L}_3(\mathbb{Z};n)$ с $n\geqslant 2$, число относительных минимумов, у которых хотя бы одна из координат равна нулю оценивается, как $O(\ln n)$. Поэтому из (4) вытекает

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(\mathbb{Z};n)}\#\mathfrak{M}(\Gamma)\equiv\#\mathcal{U}(n)=2^3\cdot\#\mathcal{U}_+(n)+O\left(\ln n\cdot\#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z};n)\right)$$

и, учитывая (7), получаем

$$E_3(N)=\frac{24}{N^3\zeta(2)\zeta(3)}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}_+(n)+O(\ln N). \tag{14}$$

Для двумерных решеток подсчет количества элементов множества

$$\mathcal{U}_+^{(2)}(N)=\{(\gamma,\Gamma):\quad \Gamma\in\mathcal{L}_2(\mathbb{Z};N),\ \ \gamma\in\mathfrak{M}(\Gamma),\ \ \gamma_{1,2}>0\}$$

основан на следующем наблюдении. Пусть $(\gamma,\Gamma)\in\mathcal{U}_+^{(2)}(N)$. Выберем узел $b\in\mathfrak{M}(\Gamma)\setminus\{a\}$ из условий:

$$|b_1|\leqslant a_1,\quad 0\leqslant b_2\to\min. \tag{15}$$

Тогда $b_1\leqslant 0$, $b_2\geqslant a_2$ и вектора a, b образуют базис Γ. Следовательно, любой паре $(a,\Gamma)\in\mathcal{U}_+^{(2)}(N)$ можно поставить в соответствие матрицу

$$A\in\omega(N)=\left\{\begin{pmatrix}a_1 & -b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z};N):\quad 0\leqslant b_1\leqslant a_1,\quad 0<a_2\leqslant b_2\right\}$$

Справедливо и обратное. Если $[a,b]\in\omega(N)$, Γ — решетка с базисом a, b, то $a\in\mathfrak{M}(\Gamma)$ и выполняются (15). Поэтому существует взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathcal{U}_+^{(2)}(N)$ и $\omega(N)$. Следовательно, $\#\mathcal{U}_+^{(2)}(N)=\#\omega(N)$.

Подобные рассуждения впервые были использованы в классической работе Хейльбронна [9] для вычисления средней длины цепной дроби. В следующем разделе мы получим аналогичное соответствие для трехмерных решеток.

3 Аналог соответствия Хейльбронна

Помимо определенных ранее множеств матриц Ω_i ($i=\overline{1,4}$) будем также использовать $\partial\Omega_i$ — множество матриц, лежащих на границе Ω_i и $\overline{\Omega}_i = \Omega_i \cup \partial\Omega_i$.

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$, то $\omega(N) = \Omega \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}; N)$. В частности,

$$\overline{\omega}_i(N) = \overline{\Omega}_i \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}; N), \quad \partial\omega_i(N) = \partial\Omega_i \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}; N).$$

Цель данного раздела — доказательство следующего результата.

Лемма 3.1 *Для любого натурального N справедлива формула*

$$\begin{aligned}\#\mathcal{U}_+(N) \quad &= \quad \#\omega_1(N) + \#\omega_2(N) + 2\cdot\#\omega_3(N) + 2\cdot\#\omega_4(N) + \\ &\quad + O\left(\sum_{i=1}^{4} \#\partial\omega_i(N)\right) + O_\epsilon(N^{1+\epsilon}) \quad \forall\epsilon > 0. \qquad (16)\end{aligned}$$

Лемма будет доказана в конце раздела. Доказательство основывается на следующих соображениях. Пусть $(a,\Gamma) \in \mathcal{U}_+(N)$. Выберем узлы $b \in \mathfrak{M}(\Gamma) \setminus \{a\}$, $c \in \mathfrak{M}(\Gamma) \setminus \{a,b\}$ из следующих условий

$$\begin{gathered}|b_i| \leqslant a_i, \quad i = 1,3, \quad 0 \leqslant b_2 \to \min, \\ |c_1| \leqslant a_1, \quad |c_2| \leqslant b_2, \quad 0 \leqslant c_3 \to \min.\end{gathered}$$

Тогда, если отбросить некоторые «плохие» случаи (число которых оценивается остаточным членом формулы (16)), а также не учитывать некоторые «симметричные» варианты (множества $V_2(N)$ и $V_3(N)$ ниже), то мы получим, что a,b,c — базис Γ, причем матрица $[a,b,c]$ принадлежит объединению множеств $\omega_i(N)$.

Будем использовать, так называемые, минимальные множества. Напомним определение.

Определение 1 *Множество $M \subset \Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$ называется минимальным, если $M \subset \mathfrak{M}(\Gamma)$ и не существует ненулевого узла $\gamma \in \Gamma$ такого, что*

$$|\gamma_i| < \max_{(\eta_1,\ldots,\eta_s)\in M} |\eta_i| \quad i = \overline{1,s}.$$

Понятие минимального множества впервые появилось в работах Вороного [2] и Минковского [14] в связи с методами построения единиц в кубических числовых полях. Ими были исследованы различные свойства минимальных систем двух и трехмерных решеток общего положения (в трехмерном случае без доказательства). Довольно исчерпывающее исследование минимальных множеств трехмерных решеток общего положения проведено в [15]. Минимальные системы решеток из $\mathcal{L}_3(\mathbb{Z})$ изучались в [16].

В настоящей работе нам будет достаточно следующего результата. Обозначим через $\tilde{\mathcal{L}}_3(\mathbb{Z};N)$ — множество решеток $\Gamma\in\mathcal{L}_3(\mathbb{Z};N)$, обладающих следующим свойством: если множество $\{a,b,c\}\subset\Gamma$ минимально и состоит из линейно независимых узлов, то a,b,c — базис Γ. Решеток, не обладающих этим свойством, достаточно мало, а именно имеет место

Лемма 3.2 *Для любого натурального N справедлива оценка*

$$\#(\mathcal{L}_3(\mathbb{Z};N)\setminus\tilde{\mathcal{L}}_3(\mathbb{Z};N))\ll_\epsilon N^{1+\epsilon}\quad\forall\epsilon>0. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\Gamma\in\mathcal{L}_3(\mathbb{Z};N)\setminus\tilde{\mathcal{L}}_3(\mathbb{Z};N)$. Тогда согласно [16, теорема 2] существует базис Γ, который с точностью до порядка следования координат и знаков, имеет вид

$$(a_1,a_2,a_3),\quad(0,a_2,c_3),\quad(0,0,2c_3), \tag{18}$$

где $a_1,a_2,c_3>0$, $a_3\geqslant 0$. Обозначим через $L(N)$ — множество решеток из $\mathcal{L}_3(\mathbb{Z};N)$, порожденных векторами вида (18). Используя лемму 2.1 нетрудно заметить, что для каждой решетки из $L(N)$ существует единственный базис вида (18), удовлетворяющий дополнительному условию $a_3\in[1,2c_3]$. Следовательно,

$$\#L(N)=\sum_{2c_3a_2|N}2c_3\ll_\epsilon N^{1+\epsilon}.$$

$\square$

Нетрудно проверить, что

$$a_1b_2c_3\leqslant\det A\quad\forall A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\in\bigcup_{i=1}^{4}\overline{\Omega}_i. \tag{19}$$

Положим

$$\tilde{\mathcal{U}}_+(N)=\{(\gamma,\Gamma)\in\mathcal{U}_+(N):\ \ \Gamma\in\tilde{\mathcal{L}}_3(\mathbb{Z};N)\}.$$

Из оценок (2) и (17) вытекает, что при $N \geqslant 2$

$$\#\left(\mathcal{U}_+(N) \setminus \tilde{\mathcal{U}}_+(N)\right) \ll \ln^2 N \cdot \#\left(\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; N) \setminus \tilde{\mathcal{L}}_3(\mathbb{Z}; N)\right) \ll_\epsilon N^{1+\epsilon} \quad (20)$$

для любого $\epsilon > 0$. Таким образом нам достаточно получить формулу для числа элементов множества $\#\tilde{\mathcal{U}}_+(N)$. Для оценки мощности подмножеств из $\tilde{\mathcal{U}}_+(N)$ будем использовать следующий результат.

Лемма 3.3 *Пусть выполняются условия:*

(а) $U \subset \tilde{\mathcal{U}}_+(N)$, $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^4 \overline{\Omega}_i$, $\omega(N) = \Omega \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}; N)$;

(б) существует инъекция $F : \mathbb{Z}^{3\times 3} \to \mathbb{Z}^{3\times 3}$, *которая не меняет модуль определителя матрицы;*

(в) для каждой пары $(a, \Gamma) \in U$ *существуют узлы* $b, c \in \Gamma$ *такие, что множество* $\{a, b, c\}$ *минимально,* $F([a, b, c]) \in \Omega$.

Тогда

$$\#U \leqslant \#\omega(N). \quad (21)$$

Доказательство. Введем отображение $\Phi : U \to \Omega$, которое каждой паре $(a, \Gamma) \in U$ ставит в соответствие матрицу $F([a, b, c])$. Из (19) и условия

$$F([a, b, c]) \in \bigcup_{i=1}^{4} \tilde{\Omega}_i$$

вытекает $\det F([a, b, c]) > 0$, значит, $\det[a, b, c] \neq 0$, т.е. узлы a, b, c линейно независимы и поэтому они образуют базис Γ (т.к. $\Gamma \in \tilde{\mathcal{L}}_3(\mathbb{Z}; N)$). Тогда $|\det[a, b, c]| = N$, $\det \Phi(a, \Gamma) = N$, следовательно, $\Phi(a, \Gamma) \in \omega(N)$. Нетрудно проверить, что

$$\Phi(a, \Gamma) = \Phi(a', \Gamma') \quad \Longleftrightarrow \quad (a, \Gamma) = (a', \Gamma').$$

Следовательно, отображение $\Phi : U \to \omega(N)$ является инъекцией и поэтому выполняется (21). $\square$

Пусть $(a, \Gamma) \in \tilde{\mathcal{U}}_+(N)$. Обозначим

$$H_2(a, \Gamma) = \{\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma) \setminus \{\pm a\} : \qquad |\gamma_i| \leqslant a_i, \ \ i = 1, 3\}.$$

Сразу отметим, что множество $H_2(a,\Gamma)$ не пусто. Оно содержит узел вида $(0,n,0)$. Кроме того,

$$|\gamma_2| \geqslant a_2 \quad \forall \gamma \in H_2(a,\Gamma).$$

В противном случае нарушается минимальность a.

Для любой пары $(a,\Gamma) \in \tilde{\mathcal{U}}_+(N)$ определим также

$$\begin{aligned}\tilde{H}_2(a,\Gamma) \;\; &= \;\; \{\gamma \in \Gamma \setminus \{0,\pm a\} : \quad |\gamma_i| \leqslant a_i, \;\; i=1,3\} \setminus \\ &\quad \setminus \{\gamma \in \Gamma : \quad |\gamma_i| = a_i, \;\; i=1,3, \;\; |\gamma_2| > a_2\}.\end{aligned}$$

Лемма 3.4 *Пусть $(a,\Gamma) \in \tilde{\mathcal{U}}_+(N)$, узел $b \in H_2(a,\Gamma)$ удовлетворяет неравенствам*

$$0 < b_2 \leqslant |\gamma_2| \quad \forall \gamma \in H_2(a,\Gamma). \tag{22}$$

Тогда

$$b_2 \leqslant |\gamma_2| \quad \forall \gamma \in \tilde{H}_2(a,\Gamma), \tag{23}$$

множество $\{a,b\}$ минимально, причем $b_1 \leqslant 0$ либо $b_3 \leqslant 0$.

Доказательство. Докажем (23). Пусть $\gamma \in \Gamma \setminus \{0,\pm a\}$,

$$|\gamma_1| \leqslant a_1, \;\; |\gamma_2| < b_2, \;\; |\gamma_3| \leqslant a_3, \;\; \gamma \neq \pm a.$$

Так как $\gamma \neq \pm a$, то $\gamma \notin \mathfrak{M}(\Gamma)$ (иначе нарушается (22)), поэтому существует узел $\eta \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ для которого

$$\begin{aligned}&|\eta_i| \leqslant |\gamma_i|, \quad i=1,2,3, \quad \sum_{i=1}^{3} |\eta_i| < \sum_{i=1}^{3} |\gamma_i| \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad |\eta_1| \leqslant a_1, \;\; |\eta_2| < b_2, \;\; |\eta_3| \leqslant a_3.\end{aligned}$$

В силу (22) это возможно только при $\eta = \pm a$. Поэтому

$$a_i = |\eta_i| \leqslant |\gamma_i| \leqslant a_i \;\; \Longrightarrow \;\; |\gamma_i| = a_i, \quad i=1,3.$$

Значит, $a_2 < |\gamma_2|$. Неравенство (23) доказано. Минимальность множества $\{a,b\}$ вытекает из (23). Если $b_{1,3} > 0$, то узел $\gamma = a - b$ нарушает минимальность $\{a,b\}$. □

Обозначим $V(N)$ — множество $(a,\Gamma) \in \tilde{\mathcal{U}}_+(N)$, для которых узел $b \in H_2(a,\Gamma)$, удовлетворяющий (22) единственен. Докажем, что что элементов не принадлежащих $V(N)$ «достаточно» мало.

Лемма 3.5 *Справедлива формула*

$$\#\tilde{\mathcal{U}}_+(N) = \#V(N) + O(\#\partial\omega_2(N) + \#\partial\omega_4(N)). \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $(a,\Gamma) \in \tilde{\mathcal{U}}_+(N)\backslash V(N)$. Тогда существуют $b, b' \in H_2(a,\Gamma)$, удовлетворяющие (22). Очевидно, что $b_2 = b'_2 > 0$. Если $b_1 b'_1 \geqslant 0$, $b_3 b'_3 \geqslant 0$, то узел $b - b'$ нарушает минимальность a. Поэтому $b_1 b'_1 < 0$ либо $b_3 b'_3 < 0$. Значит, с точностью до перемены b и b' местами, возможны только такие варианты

$$b = (-b_1, b_2, -b_3), \quad b' = (-b'_1, b_2, b'_3), \tag{25}$$

$$b = (-b_1, b_2, -b_3), \quad b' = (b'_1, b_2, -b'_3), \tag{26}$$

$$b = (-b_1, b_2, b_3), \quad b' = (b'_1, b_2, -b'_3), \tag{27}$$

где $b_{1,3}, b'_{1,3} \geqslant 0$. Введем множества X_1, X_2, X_3, состоящие из $(a,\Gamma) \in (\mathcal{U}_+(N) \setminus V(N))$, для которых узлы b, b' имеют вид (25), (26), (27) соответственно. Очевидно, что

$$\#X_1 = \#X_2,$$

т.к. преобразование, меняющее местами 1-ю и 3-ю координаты узлов, осуществляет биекцию множеств X_1 и X_2. Осталось доказать, что

$$\#X_1 \ll \#\partial\omega_2(N), \quad \#X_3 \ll \#\partial\omega_4(N). \tag{28}$$

Сразу отметим, что множество $\{a, b, b'\}$ минимально, причем

$$b_1 + b'_1 > a_1 \qquad \text{при } (a,\Gamma) \in X_1, \tag{29}$$

$$b_1 + b'_1 > a_1 \quad \text{либо} \quad b_3 + b'_3 > a_3 \qquad \text{при } (a,\Gamma) \in X_3. \tag{30}$$

Если это не так, то узел $b - b'$ нарушает минимальность a. Введем множество $X_{31} \subset X_3$ ($X_{32} \subset X_3$), состоящее из (a,Γ), для которых узлы b, b' удовлетворяют неравенствам $b_1 + b'_1 > a_1$ ($b_3 + b'_3 > a_3$). Тогда

$$\#X_{31} = \#X_{32}, \quad \#X_3 \leqslant 2 \cdot \#X_{31}.$$

Пусть $(a,\Gamma) \in X_1$. Докажем, что $b'_3 \geqslant b_3$. Положим

$$\gamma = a - b' + b = (a_1 - b'_1 - b_1, \;\; a_2, \;\; a_3 + b'_3 - b_3).$$

Так как $a_1 \leqslant b_1 + b'_1 \leqslant 2a_1$, то $|\gamma_1| \leqslant a_1$. Так как $b_3 \leqslant a_3$, то при $b'_3 < b_3$ узел γ нарушает минимальность a. Значит, $b'_3 \geqslant b_3$. В силу

(29) и условий на b, b' матрица $[a, b, b' - b]$ принадлежит $\partial\Omega_2$. Значит, выполняется первое неравенство из (28) (см. лемму 3.3).

Пусть $(a, \Gamma) \in X_{31}$. Тогда $[a, b, (a - b')] \in \partial\Omega_4$ и, согласно лемме 3.3, выполняется второе неравенство из (28). $\square$

На множестве $V(N)$ можно ввести отображение Φ_2, которое каждой паре $(a, \Gamma) \in V(N)$ ставит в соответствие узел $b \in H_2(a, \Gamma)$, удовлетворяющий (22). Отметим, что для $b = \Phi_2(a, \Gamma)$, $(a, \Gamma) \in V(N)$

$$b_2 < |\gamma_2| \quad \forall \gamma \in \tilde{H}_2(a, \Gamma), \;\; \gamma \neq \pm b. \tag{31}$$

Для доказательства достаточно повторить рассуждения, использованные при обосновании (23).

Определим множество

$$H_3(a, \Gamma) = \{\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma) \setminus \{\pm a, \pm b\} : \quad |\gamma_1| \leqslant a_1, \;\; |\gamma_2| \leqslant b_2\}.$$

Оно не пусто (например, содержит узел вида $(0, 0, n)$). Кроме того

$$|\gamma_3| > a_3 \quad \forall \gamma \in H_3(a, \Gamma),$$

так как в противном случае γ нарушает неравенство (31).

Будем также использовать множество $C(a, \Gamma)$, состоящее из узлов c, удовлетворяющих условиям

$$c \in H_3(a, \Gamma), \quad 0 < c_3 \leqslant |\gamma_3| \;\; \forall \gamma \in H_3(a, \Gamma). \tag{32}$$

и

$$\Pi_1(a) = \{x \in \Gamma : \;\; |x_1| = a_1, \;\; |a_i| \leqslant |x_1|, \;\; i = 2, 3, \;\; |a_2| + |a_3| < |x_2| + |x_3|\},$$
$$\Pi_2(b) = \{x \in \Gamma : \;\; |x_2| = b_1, \;\; |b_i| \leqslant |x_i|, \;\; i = 1, 3, \;\; |b_1| + |b_3| < |x_1| + |x_3|\},$$
$$\tilde{H}_3(a, \Gamma) = \left\{\gamma \in \Gamma \setminus \{0, \pm a, \pm b\} : \;\; |\gamma_1| \leqslant a_1, \;\; |\gamma_2| \leqslant b_2, \;\; \gamma \notin \Pi_1(a) \cup \Pi_2(b)\right\}.$$

Лемма 3.6 *Пусть* $(a, \Gamma) \in V(N)$, $b = \Phi_1(a, \Gamma)$, $c \in C(a, \Gamma)$. *Тогда*

$$c_3 \leqslant |\gamma_3| \;\; \forall \gamma \in \tilde{H}_3(a, \Gamma), \tag{33}$$

множество $\{a, b, c\}$ *минимально, причем* $c_1 \leqslant 0$ *либо* $c_2 \leqslant 0$.

Доказательство аналогично лемме 3.4.

Докажем, что случаев, когда $b_1 = 0$ или $b_3 = 0$ «достаточно» мало. Положим

$$V_0(N) = \{(a, \Gamma) : \quad b_1 = 0 \text{ либо } b_3 = 0\},$$

где $b = \Phi_1(a, \Gamma)$.

Лемма 3.7 *Справедлива оценка*

$$\#V_0(N) \ll \sum_{i=2}^{4} \#\partial\omega_i(N). \tag{34}$$

Доказательство. Так как $b_1 \leqslant 0$ либо $b_3 \leqslant 0$ (лемма 3.4), то множество $V_0(N)$ можно представить в виде

$$\begin{array}{rcl} V_0(N) & = & V_{01} \cup V'_{01} \cup V_{02} \cup V'_{02}, \\ V_{01} & = & \{(a,\Gamma) \in V(N): \;\; b = (0, b_2, b_3), \;\; b_3 \geqslant 0\}, \\ V'_{01} & = & \{(a,\Gamma) \in V(N): \;\; b = (b_1, b_2, 0), \;\; b_1 \geqslant 0\}, \\ V_{02} & = & \{(a,\Gamma) \in V(N): \;\; b = (-b_1, b_2, 0), \;\; b_1 > 0\}, \\ V'_{02} & = & \{(a,\Gamma) \in V(N): \;\; b = (0, b_2, -b_3), \;\; b_3 > 0\}. \end{array}$$

где $b = \Phi_1(a,\Gamma)$. Во всех случаях $b_2 > 0$. Сразу отметим, что

$$\#V_{01} = \#V'_{01}, \quad \#V_{02} = \#V'_{02}$$

(преобразование меняющее местами 1-ю и 3-ю координаты узлов осуществляет биекцию V_{01} на V'_{01}, а также V_{02} на V'_{02}). Поэтому достаточно оценить количество элементов множеств V_{01} и V_{02}.

Оценим $\#V_{01}$. Пусть $(a,\Gamma) \in V_{01}$. Тогда $b = (0, b_2, b_3)$, $a_3 \geqslant b_3 \geqslant 0$, $b_2 \geqslant a_2 > 0$. Узел $\gamma = a - b$ удовлетворяет соотношениям

$$|\gamma_1| = a_1, \quad |\gamma_2| = b_2 - a_2 < b_2, \quad |\gamma_3| = a_3 - b_3 \leqslant a_3.$$

Поэтому из (31) вытекает $\gamma \in \Pi_1(a)$ либо $\gamma = \pm a$. Значит,

$$\gamma_2 \geqslant a_2, \;\; |\gamma_3| \geqslant a_3 \implies b_2 \geqslant 2a_2, \;\; b_3 = 0.$$

Таким образом, $b = (0, b_2, 0)$, $b_2 \geqslant 2a_2$. Выберем любой $c \in C(a,\Gamma)$. Тогда $c_1 \leqslant 0$ либо $c_2 \leqslant 0$ (лемма 3.6). Докажем, что вариант, когда $c = (c_1, -c_2, c_3)$, $c_{1,3} > 0$, $c_2 \geqslant 0$ невозможен. Действительно в этом случае узел $\gamma = a - c - b$ удовлетворяет соотношениям

$$|\gamma_1| = a_1 - c_1 < a_1, \quad |\gamma_2| = |a_2 + c_2 - b_2| < b_2, \quad |\gamma_3| = c_3 - a_3 < c_3.$$

(второе неравенство вытекает из оценок $a_2 > 0$; $2a_2, c_2 \leqslant b_2$). Согласно минимальности $\{a, b, c\}$ это возможно только при $\gamma = 0$. Однако в этом случае узел $-c = b - a$ противоречит выбору b. Значит, возможны следующие два случая.

1) $c = (-c_1, c_2, c_3)$, $c_{1,2,3} \geqslant 0$. Тогда $[a, b, c] \in \partial\Omega_2$.

2) $c = (-c_1, -c_2, c_3)$, $c_{1,2,3} \geqslant 0$. Тогда то $[a, b, c] \in \partial\Omega_3$.

Таким образом, доказали (лемма 3.3), что

$$\#V_{01} = \#V'_{01} \leqslant \#\partial\omega_2(N) + \#\partial\omega_3(N).$$

Оценим $\#V_{02}$. Пусть $(a, \Gamma) \in V_{02}$. Тогда $b = (-b_1, b_2, 0)$, $b_{1,2} > 0$. Выберем любой узел $c \in C(a, b)$. Возможны следующие случаи.

Если $c = (-c_1, -c_2, c_3)$, $c_{1,2} \geqslant 0$, то $[a, b, c] \in \partial\Omega_3$.

Пусть $c = (-c_1, c_2, c_3)$, $c_{1,2} \geqslant 0$. Тогда узел $\gamma = a+b-c$ удовлетворяет соотношениям

$$|\gamma_1| = a_1 - b_1 + c_1, \quad |\gamma_2| = b_2 + a_2 - c_2, \quad |\gamma_3| = c_3 - a_3 < c_3.$$

Поэтому $c_1 \geqslant b_1$ либо $a_2 \geqslant c_2$ (иначе $0 < |\gamma_1| < a_1$, $|\gamma_2| < b_2$ и нарушается минимальность $\{a, b, c\}$). Тогда $[a, b, c] \in \partial\Omega_2$.

Пусть $c = (c_1, -c_2, c_3)$, $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$. Тогда узел $\gamma = a - c$ удовлетворяет соотношениям

$$|\gamma_1| = a_1 - c_1 < a_1, \quad |\gamma_2| = a_2 + c_2, \quad |\gamma_3| = c_3 - a_3 < c_3$$

и из минимальности $\{a, b, c\}$ вытекает $a_2+c_2 = b_2$. Положим $\eta = a-b-c$. Тогда

$$|\eta_1| = a_1 + b_1 - c_1 > 0, \quad |\eta_2| = a_2 + c_2 - b_2 = 0, \quad |\eta_3| = c_3 - a_3 < c_3.$$

Поэтому $b_1 \geqslant c_1$ (иначе нарушается минимальность $\{a, b, c\}$), $[a, b, c] \in \partial\Omega_4$.

Доказали, что

$$\#V_{02} = \#V'_{02} \ll \sum_{i=2}^{4} \#\partial\omega_i(N).$$

□

Множество $V(N) \setminus V_0(N)$ разобьем на непересекающиеся части:

$$\begin{aligned}
V_1(N) &= \{(a, \Gamma) \in V(N) : \quad \Phi_1(a, \Gamma) = (-b_1, b_2, -b_3)\}, \\
V_2(N) &= \{(a, \Gamma) \in V(N) : \quad \Phi_1(a, \Gamma) = (-b_1, b_2, b_3)\}, \\
V_3(N) &= \{(a, \Gamma) \in V(N) : \quad \Phi_1(a, \Gamma) = (b_1, b_2 - b_3)\},
\end{aligned}$$

где $b_{1,2,3} > 0$. Тогда

$$V(N) = \bigcup_{i=0}^{3} V_i(N).$$

Так как $\#V_2(N) = \#V_3(N)$ (преобразование, меняющее местами 1-ю и 3-ю координаты узлов, осуществляет биекцию $V_2(N)$ на $V_3(N)$), то из (24), (34) вытекает

$$\#\tilde{\mathcal{U}}_+(N) = \#V_1(N) + 2\#V_2(N) + O\left(\sum_{i=2}^{4} \#\partial\omega_i(N)\right). \tag{35}$$

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1(N) &= \{(a,\Gamma) \in V_1(N): \;\; c_1 < 0 \;\; \forall c \in C(a,\Gamma)\}, \\ \tilde{V}_2(N) &= \{(a,\Gamma) \in V_2(N): \;\; c_2 < 0 \;\; \forall c \in C(a,\Gamma)\} \end{aligned}$$

и докажем, что элементов, не принадлежащих этим множествам, «достаточно» мало.

Лемма 3.8 *Справедливы формулы*

$$\#V_1(N) = \#\tilde{V}_1(N) + O\left(\#\partial\omega_1(N) + \#\partial\omega_2(N)\right), \tag{36}$$

$$\#V_2(N) = \#\tilde{V}_1(N) + O\left(\#\partial\omega_3(N)\right). \tag{37}$$

Доказательство. Пусть $(a,\Gamma) \in V_1(N) \setminus \tilde{V}_1(N)$, $b = \Phi_1(a,\Gamma)$. Тогда

$$b = (-b_1, b_2, -b_3), \quad b_{1,2,3} > 0$$

и существует узел $c \in C(a,\Gamma)$ такой, что $c_1 \geqslant 0$, причем по лемме 3.6 $c_1 = 0$ либо $c_2 \leqslant 0$. Значит, возможны следующие пять вариантов.

1. Если $c = (0,0,c_3)$, то $[a,b,c] \in \partial\Omega_2$.

2. Если $c = (0,-c_2,c_3)$, $c_2 > 0$, то узел $\gamma = b + c$ удовлетворяет соотношениям

$$|\gamma_1| = b_1 \leqslant a_1, \quad |\gamma_2| = b_2 - c_2 < b_2, \quad |\gamma_3| = c_3 - b_3 < c_3.$$

и, значит, $a_1 = b_1$ (в противном случае нарушается минимальность $\{a,b,c\}$), $[a,b,c] \in \partial\Omega_1$.

3. Пусть $c = (0,c_2,c_3)$, $c_{2,3} > 0$. Тогда узел $\gamma = a - c$ удовлетворяет соотношениям

$$|\gamma_1| = a_1, \quad |\gamma_2| = |a_2 - c_2| < b_2, \quad |\gamma_3| = c_3 - a_3 < c_3.$$

и из (33) следует, что

$$a_2 \leqslant |\gamma_2|, \;\; a_3 \leqslant |\gamma_3| \quad \Longrightarrow \quad c_2 \geqslant 2a_2, \;\; c_3 > 2a_3.$$

Положим $\eta = a + b - c$. Тогда

$$|\eta_1| = a_1 - b_1 < a_1, \quad |\eta_2| = a_2 + b_2 - c_2 < b_2, \quad |\eta_3| = c_3 + b_3 - a_3 \leqslant c_3.$$

Значит, $b_3 = a_3$ и матрица $[a, b, c - a]$ принадлежит $\partial\Omega_2$.

4. Пусть $c = (c_1, 0, c_3)$, $c_1 > 0$. Узел $\gamma = a - c$ удовлетворяют соотношениям

$$|\gamma_1| = a_1 - c_1 < a_1, \quad |\gamma_2| = a_2, \quad |\gamma_3| = c_3 - a_3 < c_3,$$

В силу (33) это возможно только при $\gamma \in \Pi_2(b)$, то есть

$$b_i \leqslant |\gamma_i|, \;\; i = 1, 3, \;\; |\gamma_2| = b_2 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = b_2, \quad a_3 + b_3 \leqslant c_3.$$

Далее рассмотрим узел $\theta = a - b - c$. Он удовлетворяет соотношениям

$$0 < |\theta_1| = a_1 + b_1 - c_1, \;\; |\theta_2| = 0, \;\; |\theta_3| = c_3 - (a_3 + b_3) < c_3.$$

Поэтому $b_1 > c_1$ (в противном случае нарушается (33)). Тогда узел $\eta = b + c$ противоречит (33). Следовательно, этот случай невозможен.

5. Вариант $c = (c_1, -c_2, c_3)$, $c_{1,2} > 0$ также невозможен, т.к. в этом случае узел $b + c$ нарушает минимальность $\{a, b, c\}$.

Применяя лемму 3.3, получаем

$$\#(V_1(N) \setminus \tilde{V}_1(N)) \ll \#\partial\omega_1(N) + \#\partial\omega_2(N).$$

Формула (36) доказана.

Докажем теперь (37). Пусть $(a, \Gamma) \in V_2(N) \setminus \tilde{V}_2(N)$, $b = \Phi_1(a, \Gamma)$, $b = (-b_1, b_2, b_3)$, $b_{1,2,3} > 0$. Тогда существует $c \in C(a, \Gamma)$ такой, что $c_2 \geqslant 0$, причем либо $c_2 = 0$ либо $c_1 \leqslant 0$ (по лемме 3.6). Возможны следующие четыре случая.

1. Если $c = (-c_1, 0, c_3)$, $c_1 \geqslant 0$, то $[a, b, c] \in \partial\Omega_3$.

2. Если $c = (-c_1, c_2, c_3)$, $c_{1,2} > 0$, то узел $b - c$ нарушает минимальность $\{a, b, c\}$.

3. Пусть $c = (c_1, 0, c_3)$, $c_1 > 0$. Тогда узел $\gamma = a - c$ удовлетворяет соотношениям

$$|\gamma_1| = a_1 - c_1 < a_1, \quad |\gamma_2| = a_2, \quad |\gamma_3| = c_3 - a_3 < c_3.$$

Поэтому $c_3 \geqslant 2a_3$ (иначе $a \notin \mathfrak{M}(\Gamma)$) и $[a, b, c - b] \in \partial\Omega_3$.

4. Осталось рассмотреть последний случай $c = (0, c_2, c_3)$, $c_2 > 0$. Узлы $\gamma = a - c$ и $\eta = b - c$ удовлетворяют соотношениям

$$|\gamma_1| = a_1, \quad |\gamma_2| = |a_2 - c_2| < b_2, \quad |\gamma_3| = c_3 - a_3 < c_3,$$
$$|\eta_1| = |b_1|, \quad |\eta_2| = b_2 - c_2 < b_2, \quad |\eta_3| = c_3 - b_3 < c_3.$$

Согласно (33) это возможно только при $\eta, \gamma \in \Pi_1(a)$, то есть

$$a_i \leqslant |\gamma_i|, |\eta_i| \;\; i = 2,3, \quad |\eta_1| = |\gamma_1| = a_1 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a_2 \geqslant 2c_2, \quad c_3 \geqslant 2a_3, \quad a_1 = b_1, \quad b_2 \geqslant a_2 + c_2, \quad c_3 \geqslant a_3 + b_3$$

и матрица $[a, b, c-a]$ принадлежит $\partial\Omega_3$.

Применяя лемму 3.3, получаем

$$\#(V_2(N) \setminus \tilde{V}_2(N)) \ll \#\partial\omega_3(N).$$

Формула (37) доказана. □

Пусть $(a, \Gamma) \in \tilde{V}_1(N) \cup \tilde{V}_2(N)$. Если существуют узлы $c, c' \in C(a, \Gamma)$ такие, что $c_i c_i' \geqslant 0$, $i = 1,2$, то $\gamma = c - c'$ удовлетворяет соотношениям

$$|\gamma_1| \leqslant a_1, \quad |\gamma_2| \leqslant b_2, \quad \gamma_3 = 0.$$

Противоречие с (31). Поэтому множество $C(a, \Gamma)$ либо состоит из одного элемента, либо из двух, одним из которых является узел вида $c = (-c_1, -c_2, c_3)$, $c_{1,2} > 0$. Значит, мы можем ввести отображение $\Phi_2 : \tilde{V}_1(N) \cup \tilde{V}_2(N) \to \mathbb{Z}^3$, действующее по правилу: $\Phi_2(a, \Gamma) = c$, где $c \in C(a, \Gamma)$. Если таких элементов два, то в качестве c выбираем узел вида $c = (-c_1, c_2, -c_3)$, $c_{1,2,3} > 0$.

Лемма 3.9 *Справедливы оценки*

$$\#\tilde{V}_1(N) \leqslant \#\overline{\omega}_1(N) + \#\overline{\omega}_2(N), \quad \#\tilde{V}_2(N) \leqslant \#\overline{\omega}_3(N) + \#\overline{\omega}_4(N), \qquad (38)$$

Доказательство. Пусть $(a, \Gamma) \in \tilde{V}_1(N)$, $b = \Phi_1(a, \Gamma)$, $c = \Phi_2(a, \Gamma)$. Тогда $b = (-b_1, b_2, -b_3)$, $b_{1,2,3} > 0$. Возможны два случая.

1. Пусть $c = (-c_1, -c_2, c_3)$, $c_{1,2,3} > 0$. Положим $\gamma = b + c$. Тогда

$$|\gamma_1| = |b_1 + c_1|, \quad |\gamma_2| = |b_2 - c_2| < b_2, \quad |\gamma_3| = c_3 - b_3 < c_3.$$

Значит, $a_1 \leqslant b_1 + c_1$ (иначе γ нарушает минимальность $\{a, b, c\}$) и $[a, b, c] \in \overline{\Omega}_1$.

2. Пусть $c = (-c_1, c_2, c_3)$, $c_{1,3} > 0$, $c_2 \geqslant 0$. В это случае множество $C(a, \Gamma)$ состоит из одного элемента и также, как в лемме 3.4 доказывается, что

$$c_3 < |\gamma_3| \;\; \forall \gamma \in \tilde{H}_3(a, \Gamma), \;\; \gamma \neq \pm c. \qquad (39)$$

Положим $\gamma = -b - a + c$. Тогда

$$|\gamma_1| = |a_1+(c_1-b_1)|, \quad |\gamma_2| = |b_2+(a_2-c_2)|, \quad 0 < |\gamma_3| = c_3+(b_3-a_3) \leqslant c_3.$$

Поэтому $c_1 \geqslant b_1$ либо $a_2 \geqslant c_2$ (иначе γ нарушает (39)) и $[a,b,c] \in \overline{\Omega}_2$. Согласно лемме 3.3 выполняется первая оценка из (38).

Пусть $(a,\Gamma) \in \tilde{V}_2(N)$, $b = \Phi_1(a,\Gamma)$, $c = \Phi_2(a,\Gamma)$. Тогда $b = (-b_1, b_2, b_3)$, $b_{1,2,3} > 0$. Возможны два случая.

1. Пусть $c = (-c_1, -c_2, c_3)$, $c_{1,2,3} > 0$. Тогда $[a,b,c] \in \overline{\Omega}_3$.

2. Пусть $c = (-c_1, c_2, c_3)$, $c_{1,3} > 0$, $c_2 \geqslant 0$. Тогда множество $C(a,\Gamma)$ состоит из одного элемента и выполняется (39). Положим $\gamma = -a + c$,

$$|\gamma_1| = |a_1 - c_1| < a_1, \quad |\gamma_2| = |a_2 + c_2|, \quad |\gamma_3| = c_3 - a_3 < c_3.$$

Следовательно, $a_2+c_2 \geqslant b_2$ (иначе γ нарушается минимальность $\{a,b,c\}$). Докажем, что $b_1 \geqslant c_1$. Для этого рассмотрим узел $\eta = -a + b + c$.

$$|\eta_1| = |a_1 + (b_1 - c_1)|, \quad |\eta_2| = a_2 + c_2 - b_2 \leqslant b_2 \quad (\text{т.к. } a_2 + c_2 \leqslant 2b_2),$$
$$|\eta_3| = c_3 + (b_3 - a_3) \leqslant c_3 \quad (\text{т.к. } b_3 \leqslant a_3).$$

Если $a_2 + c_2 < 2b_2$, то $|\eta_2| < b_2$ и поэтому $b_1 \geqslant c_1$ (иначе η нарушает условие (39)). Пусть $a_2 + c_2 = 2b_2$. Тогда $a_2 = b_2 = c_2$, следовательно, $|a_1| = |b_1|$, $|a_3| = |b_3|$ (иначе b нарушает минимальность a) и $b_1 = a_1 \geqslant c_1$. Значит, $[a,b,c] \in \overline{\Omega}_4$. Применяя лемму 3.3, получаем второе неравенство из (38). □

Докажем теперь, что существуют инъекции

$$\omega_1(N) \cup \omega_2(N) \to \tilde{V}_1(N), \quad \omega_3(N) \cup \omega_4(N) \to \tilde{V}_2(N). \tag{40}$$

Лемма 3.10 *Пусть решетка Γ порождена векторами a, b, c, матрица $A = [a,b,c]$. Тогда*

если $A \in \omega_1(N) \cup \omega_2(N)$, то $(a,\Gamma) \in \tilde{V}_1(N)$,

если $A \in \omega_3(N) \cup \omega_4(N)$, то $(a,\Gamma) \in \tilde{V}_2(N)$,

причем в обоих случаях $b = \Phi_1(a,\Gamma)$, $c = \Phi_2(a,\Gamma)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что не существует целых m, n, k таких, что узел

$$\gamma = ma + nb + kc,$$

удовлетворяет условиям

$$|\gamma_1| \leqslant a_1, \quad |\gamma_2| \leqslant b_2, \quad |\gamma_3| \leqslant c_3, \qquad \gamma \notin \{0, \pm a, \pm b, \pm c\}.$$

Числа m, n, k будем называть коэффициентами.

Если два коэффициента равны нулю, а оставшийся по модулю больше единицы, то $|\gamma_1| > b_1$, либо $|\gamma_2| > b_2$, либо $|\gamma_3| > c_3$.

Пусть ровно один из коэффициентов равен нулю. Тогда,

если $m \cdot n > 0$, $k = 0$, то $|\gamma_2| = |ma_2| + |nb_2| > |b_2|$;

если $m \cdot n < 0$, $k = 0$, то $|\gamma_1| = |ma_1| + |nb_1| > |a_1|$;

если $m \cdot k > 0$, $n = 0$, то $|\gamma_3| = |ma_3| + |kc_3| > |c_3|$;

если $m \cdot k < 0$, $n = 0$, то

$$\begin{array}{ll} |\gamma_1| = |ma_1| + |kc_1| > |a_1| & \text{при } A \in \bigcup_{i=1}^{3} \omega_i(N); \\ |\gamma_2| = |ma_2| + |kc_2| \geqslant |a_2| + |c_2| > |b_2| & \text{при } A \in \omega_4(N); \end{array}$$

если $m = 0$, $n \cdot k > 0$, то

$$\begin{array}{lll} |\gamma_1| = |nb_1| + |kc_1| \geqslant |b_1| + |c_1| > a_1 & \text{при} & A \in \omega_1(N); \\ |\gamma_2| = |nb_2| + |kc_2| > b_2 & \text{при} & A \in \omega_2(N); \\ |\gamma_3| = |nb_3| + |kc_3| > c_3 & \text{при} & A \in \omega_3(N) \cup \omega_4(N). \end{array}$$

если $m = 0$, $n \cdot k < 0$, то

$$\begin{array}{ll} |\gamma_3| = |nb_3| + |kc_3| > c_3 & \text{при } A \in \omega_1(N) \cup \omega_2(N); \\ |\gamma_2| = |nb_2| + |kc_2| > b_2 & \text{при } A \in \omega_3(N) \cup \omega_4(N). \end{array}$$

Осталось рассмотреть варианты $m, n, k \neq 0$. Не умаляя общности считаем, что $m > 0$. Возможны четыре случая.

1. Пусть $n, k > 0$.

Если $A \in \omega_1(N)$, то

$$\begin{array}{ll} |\gamma_3| = |ma_3| - |nb_3| + |kc_3| \geqslant ||kc_3| - |(n-1)b_3| > c_3 & \text{при } k \geqslant n, \\ |\gamma_2| = |ma_2| + |nb_2| - |kc_2| > b_2 & \text{при } k < n. \end{array}$$

Если $A \in \omega_2(N)$, то $|\gamma_2| = |ma_2| + |nb_2| + |kc_2| > |b_2|$.

Если $A \in \omega_3(N) \cup \omega_4(N)$, то $|\gamma_3| = |ma_3| + |nb_3| + |kc_3| > |c_3|$.

2. Пусть $n, k < 0$.

Если $A \in \omega_1(N) \cup \omega_2(N) \cup \omega_3(N)$, то $|\gamma_1| = |ma_1| + |nb_1| + |kc_1| > |a_1|$.

Если $A \in \omega_4(N)$, то

$$\begin{aligned} |\gamma_1| = |ma_1| + |nb_1| - |kc_1| > a_1 \qquad & \text{при } m > k \text{ либо } n \geqslant k, \\ |\gamma_3| = -|ma_3| + |nb_3| + |kc_3| > c_3 \qquad & \text{при } m < k, \\ |\gamma_2| = |ma_2| - |nb_2| + |mc_2| > b_2 \qquad & \text{при } k = m > n. \end{aligned}$$

3. Пусть $n < 0$, $k > 0$.
Если $A \in \omega_1(N) \cup \omega_2(N)$, то $|\gamma_3| = |ma_3| + |nb_3| + |kc_3| > |c_3|$.
Если $A \in \omega_3(N)$, то

$$\begin{aligned} |\gamma_2| = -|ma_2| + |nb_2| + |kc_2| > b_2 \qquad & \text{при } n > m, \\ |\gamma_3| = |ma_3| - |nb_3| + |kc_3| > c_3 \qquad & \text{при } n \leqslant m. \end{aligned}$$

Если $A \in \omega_4(N)$, то $|\gamma_1| = |ma_1| + |nb_1| + |kc_1| > |a_1|$.
4. Пусть $n > 0$, $k < 0$.
Если $A \in \omega_1(N) \cup \omega_3(N) \cup \omega_4(N)$, то $|\gamma_2| = |ma_2| + |nb_2| + |kc_2| > |b_2|$.
Если $A \in \omega_2(N)$, то

$$\begin{aligned} |\gamma_1| = |ma_1| - |nb_1| + |kc_1| > a_1 \qquad & \text{при } m > n, \\ |\gamma_2| = |ma_2| + |nb_2| - |kc_2| > b_2 \qquad & \text{при } n > k, \\ |\gamma_3| = -|ma_3| + |nb_3| + |kc_3| > c_3 \qquad & \text{при } k > m, \\ |\gamma_1| > a_1 \text{ либо } |\gamma_2| > b_2 \qquad & \text{при } k = m = n. \end{aligned}$$

$\square$

Доказательство леммы 3.1. Согласно формулам (20), (35), (36), (37) достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} \#\tilde{V}_1(N) &= \#\omega_1(N) + \#\omega_2(N) + O\Big(\#\partial\omega_1(N) + \#\partial\omega_2(N)\Big), \\ \#\tilde{V}_2(N) &= \#\omega_3(N) + \#\omega_4(N) + O\Big(\#\partial\omega_3(N) + \#\partial\omega_4(N)\Big). \end{aligned} \tag{41}$$

Из (38) вытекает

$$\begin{aligned} \#\tilde{V}_1(N) &\leqslant \#\omega_1(N) + \#\omega_2(N) + O\Big(\#\partial\omega_1(N) + \#\partial\omega_2(N)\Big), \\ \#\tilde{V}_2(N) &\leqslant \#\omega_3(N) + \#\omega_4(N) + O\Big(\#\partial\omega_3(N) + \#\partial\omega_4(N)\Big). \end{aligned} \tag{42}$$

Согласно лемме 3.10 существуют инъекции (40) (они действуют по формуле $A \to (a, \Gamma)$, где a — первый столбец матрицы A, решетка Γ порождена столбцами A), поэтому учитывая, что

$$\omega_1(N) \cap \omega_2(N) = \emptyset, \quad \omega_3(N) \cap \omega_4(N) = \emptyset,$$

получаем

$$\#\omega_1(N) + \#\omega_2(N) \leqslant \#\tilde V_1(N), \quad \#\omega_3(N) + \#\omega_4(N) \leqslant \#\tilde V_2(N). \quad (43)$$

Из оценок (42), (43) вытекают (41). $\square$

4 Количество целочисленных матриц в заданной области

Согласно лемме 3.1 наша исходная задача свелась к вычислению количества целочисленных матриц, лежащих в некоторой области Ω_i (не зависящей от N) с определителем из отрезка $[1, N]$. Нетрудно заметить, что она эквивалентна задаче о количестве точек с целыми координатами в фиксированной области. В двумерном случае хорошо известно, что для любой конечной области U с границей ∂U справедлива формула

$$\#(U \cap \mathbb{Z}^2) = \operatorname{mes} U + O(\operatorname{mes} \partial U + 1),$$

где mes — мера Лебега. Для выпуклой области это вытекает из неравенства Ярника. Доказательство для невыпуклой см., например, в [18]. Нетрудно заметить, что для s-мерных областей при $s \geqslant 3$ эта формула уже неверна. Для этого достаточно рассмотреть цилиндр вида

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 < L^{-4}, \quad 0 < z < L\},$$

при $L \to +\infty$. В настоящей работе нам хватит следующего результата. Положим

$$\begin{aligned}
&\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |x_i| \quad \forall x \in \mathbb{R}^s,\\
&\rho_\infty(X, Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} \|x - y\|_\infty \quad \forall X, Y \subset \mathbb{R}^s,\\
&B(S, r) = \{x \in \mathbb{R}^s : \ \rho_\infty(x, S) < r\} \quad \forall S \subset \mathbb{R}^s, \ r > 0.
\end{aligned}$$

Лемма 4.1 *Пусть U — ограниченное связное, измеримое по Лебегу множество из $\mathbb{R}^s$ $(s \geqslant 2)$. Тогда*

$$|\#(U \cap \mathbb{Z}^s) - \operatorname{mes} U| \leqslant 2^s \cdot \operatorname{mes} B(\partial U, 1).$$

Доказательство. Положим

$$\Pi(x)=\{y\in\mathbb{R}^s:\quad y_i=x_i+t_i,\ \ t_i\in[0,1),\ \ i=\overline{1,s}\}\quad \forall x\in\mathbb{Z}^s,$$
$$X=\{x\in\mathbb{Z}^s:\quad \Pi(x)\subset U\}\,,\quad X'=(U\cap\mathbb{Z}^s)\setminus X.$$

Очевидно, что

$$0\leqslant \operatorname{mes}U-\#X\leqslant \operatorname{mes}\{x\in U:\quad \rho_\infty(x,\partial U)<1\}\leqslant \operatorname{mes}B(\partial U,1).$$

Так как

$$\#X'\leqslant 2^s\cdot\#\{x\in\mathbb{Z}^s:\ \Pi(x)\cap\partial U\neq\emptyset\}\leqslant 2^s\operatorname{mes}B(\partial U,1),$$

то

$$|\operatorname{mes}U-\#(U\cap\mathbb{Z}^s)|=\left|(\operatorname{mes}U-\#X)-\#X'\right|\leqslant 2^s\operatorname{mes}B(\partial U,1).$$

□

Любой матрице $A\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ с элементами a_{ij} можно поставить в соответствие точку

$$A=(a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33})\in\mathbb{R}^9. \tag{44}$$

Если $\Omega\subset\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, то $\operatorname{mes}\Omega$ — мера Лебега множества Ω,

$$\begin{aligned}\Omega([1;N]) &= \{A\in\Omega:\quad 1\leqslant a_{ii},\ \ i=1,2,3,\ \ \det A\in[1,N]\}\,,\\ \omega([1;N]) &= \Omega([1;N])\cap\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Будем говорить, что поверхность $L\subset\mathbb{R}^s$ принадлежит классу $\tilde C^1$, если $L\subset\tilde L$, где $\tilde L$ — график функции $f\in C^1(\mathbb{R}^{s-1})$ производные которой равномерно ограничены на $\mathbb{R}^{s-1}$.

Будем говорить, что поверхность $L\subset\mathbb{R}^s$ кусочно-гладкая, если она состоит из из фиксированного числа поверхностей класса $\tilde C^1$,

Лемма 4.2 *Пусть Ω — связное (не зависящее от N) множество из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ с кусочно-гладкой границей, причем существует постоянная $C=C(\Omega)$ такая, что*

$$\begin{aligned}&|a_{ij}|<C\cdot a_{ii},\quad i,j=1,2,3,\\ &\det A\geqslant C\cdot a_{11}a_{22}a_{33}\quad \forall A=((a_{ij}))\in\Omega.\end{aligned}\tag{45}$$

Тогда для любого $N>1$

$$\#\omega([1;N])=\operatorname{mes}\Omega([1;N])+O_\Omega(N^3\ln N). \tag{46}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $D_{ij} = D_{ij}(A)$ обозначаем определитель матрицы, полученной из квадратной матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца; $D(A) = \det A$.

Используя условия (45) нетрудно проверить, что Ω можно представить в виде объединения трех непересекающихся множеств $\Omega^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) с кусочно-гладкими границами, так что

$$|D_{ii}(A)| \gg |a_{11}a_{22}a_{33}a_{ii}^{-1}| \quad \forall A \in \Omega^{(i)}.$$

Здесь и далее (в этом доказательстве) постоянные, входящие в оценки $\gg$ и $O(...)$ зависят от Ω и не зависят от N.

Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что

$$|D_{33}(A)| \gg |a_{11}a_{22}| \quad \forall A \in \Omega. \tag{47}$$

Согласно лемме 4.1 достаточно показать, что

$$\operatorname{mes} P(N) = O(N^3 \ln N), \tag{48}$$

где $P(N) = B(\partial\Omega([1; N]), 1)$. Положим

$$K_s(N) = \left\{ x \in \mathbb{R}^s : \quad 1 \leqslant x_i, \ \ i = \overline{1, s}, \ \ \prod_{i=1}^{s} x_i \leqslant N \right\} \quad \text{при } s \geqslant 2,$$
$$\underline{P}(N) = \left\{ A \in P(N) : \ \ 1 \leqslant a_{ii}, \ \ i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Из условий (45), (47) вытекает, что

$$\begin{gathered} a_{11}a_{22}a_{33}, \ a_{11}a_{22}, \ a_{11}a_{33}, \ a_{22}a_{33}, \ a_{ii} \in [0, cN], \quad c = c(\Omega), \\ |a_{ij}| \ll a_{ii} + 1 \quad i, j = 1, 2, 3 \end{gathered} \tag{49}$$

для любой точки $A \in P(N)$. Учитывая это, получаем

$$\operatorname{mes}(P(N) \backslash \underline{P}(N)) \ll 1 + \int_0^N (x+1)^2 \, dx + \int_{K_2(cN)} (x+1)^2 (y+1)^2 \, dx dy \ll N^3 \ln N$$

(первое слагаемое соответствует случаю, когда все a_{ii} меньше 1, второе — ровно два элемента вида a_{ii} меньше 1, третье — ровно один элемент вида a_{ii} меньше 1).

Осталось оценить меру $\underline{P}(N)$. Обозначим $\tilde{P}(N)$ — множество $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, удовлетворяющих условиям

$$|a_{ij}| \ll a_{ii}, \ \ i, j = 1, 2, 3, \quad (a_{11}, a_{22}, a_{33}) \in K_3(cN). \tag{50}$$

Тогда (в силу (49)) $\underline{P}(N) \subset \tilde{P}(N)$. По условиям леммы множество $\partial\Omega([1;N])$ содержится в объединении фиксированного числа поверхностей класса $\tilde{C}^1$ и $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R};N)$, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R};1)$. Поэтому достаточно оценить меры следующих множеств

$$\begin{aligned} P_1(N) &= \{A \in \tilde{P}(N): \ \rho_\infty(A, L) < 1\}, \\ P_2(N) &= \{A \in \tilde{P}(N): \ \rho_\infty(A, \mathrm{GL}_3(\mathbb{R};N)) < 1\}, \\ P_3(N) &= \{A \in \tilde{P}(N): \ \rho_\infty(A, \mathrm{GL}_3(\mathbb{R};1)) < 1\}, \end{aligned}$$

где поверхность $L \in \tilde{C}^1$ не зависит от N.

Оценим $P_1(N)$. Пусть L задается уравнением $a_{kl} = f(A')$, где A' — набор $(a_{11}, \ldots, a_{33})$ с вычеркнутой переменной a_{kl}; функция $f \in C^1(\mathbb{R}^8)$ имеет равномерно ограниченные в $\mathbb{R}^8$ производные. Не умаляя общности считаем, что $k = 3$. Тогда нетрудно проверить, что из $\rho_\infty(A, L) < 1$ вытекает

$$|a_{3l} - f(A')| \ll 1. \tag{51}$$

Из условий (50) вытекает

$$|a_{3j}| \ll a_{33} \ll \frac{N}{a_{11}a_{11}}, \quad j = 1,2,3 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{mes} P_1(N) \ll \int_{K_2(N)} a_{11}^2 a_{22}^2 \left(\frac{N}{a_{11}a_{22}}\right)^2 da_{11}\, da_{22} = O(N^3 \ln N).$$

Оценим $\operatorname{mes} P_2(N)$. Пусть $A \in P_2(N)$. Тогда существует точка B такая, что $\rho_\infty(A, B) < 1$, $D(B) = N$. Раскладывая функцию $B \to D(B)$ в ряд Тейлора (в окрестности точки A), учитывая, что производные 4-го порядка равны нулю, а также используя (50), получаем

$$\begin{aligned} |N - D(A)| &= |D(B) - D(A)| \ll \sum_{i,j=1}^{3} (|D_{ij}(A)| + |a_{ij}|) + 1 \ll \\ &\ll a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} + a_{11}a_{22} \ll a_{11}a_{22} + \frac{N}{a_{11}} + \frac{N}{a_{22}}. \end{aligned}$$

Значит, преобразование

$$b_{33} = N - D(A), \ \ b_{ij} = a_{ij} \ \ i,j = 1,2,3, \ \ (i,j) \neq (3,3)$$

переводит $P_2(N)$ в множество $\tilde{P}_2(N)$, точки B которого удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &(b_{11}, b_{22}) \in K_2(cN), \quad |b_{ij}| \ll b_{ii} \ \ j \neq i, \ i = 1,2, \\ &|b_{3j}| \ll \frac{N}{b_{11}b_{22}}, \ \ j = 2,3, \quad |b_{33}| \ll \left(b_{11}b_{22} + \frac{N}{b_{11}} + \frac{N}{b_{22}}\right). \end{aligned}$$

Модуль якобиана преобразования равен $|D_{33}(a)| = |D_{33}(b)| \gg b_{11}b_{22}$. Поэтому

$$\operatorname{mes} P_2(N) = \int_{\tilde{P}_2(N)} \frac{db_{11}\dots db_{33}}{|D_{33}(b)|} \ll$$
$$\ll \int_{K_2(cN)} b_{11}^2 b_{22}^2 \frac{N^2}{b_{11}^3 b_{22}^3}\left(b_{11}b_{22} + \frac{N}{b_{11}} + \frac{N}{b_{22}}\right) db_{22}db_{33} = O(N^3 \ln N).$$

Мера $P_3(N)$ оценивается аналогичным образом. Доказали, что

$$\operatorname{mes} P_i(N) = O(N^3 \ln N),$$

поэтому выполняется (48). $\square$

Напомним, что мера μ введена в § 1.

Теорема 4.1 *Пусть W_i — ограниченное связное множество из $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂W_i ($i = 1, 2, 3$),*

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) : \begin{array}{ll} (a_{12}, a_{13}) \in W_1 \cdot a_{11}, & a_{11} \in \mathbb{R}_+ \\ (a_{21}, a_{22}) \in W_2 \cdot a_{22}, & a_{23} \in \mathbb{R}_+ \\ (a_{31}, a_{32}) \in W_3 \cdot a_{33}, & a_{33} \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\},$$

причем существует постоянная $C = C(W_1, W_2, W_3)$ такая, что

$$a_{11}a_{22}a_{33} \leqslant C \cdot \det A \quad \forall A \in \Omega.$$

Тогда для любого $N > 1$

$$\#\omega([1; N]) = N^3 \left(\frac{\mu(\Omega)}{6} \cdot \ln^2 N + O_\Omega(\ln N)\right).$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что множество Ω удовлетворяет условиям леммы 4.2. Поэтому достаточно доказать, что

$$\operatorname{mes} \Omega([1; N]) = \frac{\mu(\Omega)}{6} N^3 \left(\ln^2 N + O(\ln N)\right).$$

Для этого сделаем в интеграле

$$\operatorname{mes} \Omega([1; N]) = \int_{\Omega([1;N])} da_{11} \dots da_{33}$$

замену

$$a_{ij} = b_{ij} \cdot a_{ii} \text{ при } i \neq j, \quad a_{ii} = b_{ii}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Напомним, что $D(A) = \det A$. Так как

$$\frac{D(A)}{a_{11}a_{22}a_{33}} = D'(B), \quad D'(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 1 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 1 \end{pmatrix},$$

то множество $\Omega([1;N])$ переходит в

$$W([1;N]) = \left\{ B \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \quad \begin{matrix} (b_{12}, b_{13}) \in W_1, \\ (b_{21}, b_{23}) \in W_2, \\ (b_{31}, b_{32}) \in W_3, \end{matrix} \quad \frac{1}{D'(B)} \leqslant b_{11}b_{22}b_{33} \leqslant \frac{N}{D'(B)} \right\}.$$

Отметим, что $D'(B) \asymp 1$ при $B \in W([1;N])$ (вытекает из условий теоремы). Поэтому (интегрируя по b_{ii}), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}\Omega([1;N]) &= \int_{W([1;N])} b_{11}^2 b_{22}^2 b_{33}^2 \, db_{11} \dots db_{33} = \\ &= \int_{W_1 \times W_2 \times W_3} \frac{N^3}{6(D'(B))^3} (\ln^2 N + O(\ln N)) \, db_{12} \, db_{13} \, db_{21} \, db_{23} \, db_{31} \, db_{32} = \\ &= \frac{N^6}{6} \left(\ln^2 N + O(\ln N)\right) \cdot \mu(\Omega). \end{aligned}$$

$\square$

5 Доказательство теоремы 1.1

Положим

$$\omega_i([1,N]) = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_i(n), \quad \partial\omega_i([1,N]) = \bigcup_{n=1}^{N} \partial\omega_i(n), \quad i = \overline{1,4}.$$

Множества Ω_i определены в § 1. Так как Ω_i, $\partial\Omega_i$ удовлетворяют условиям теоремы 4.1, то

$$\#\omega_i([1,N]) = \frac{\mu(\Omega_i)}{6} N^3 \ln^2 N + O(N^3 \ln N), \quad \#\partial\omega_i([1,N]) = O(N^3 \ln N).$$

Из этих формул, а также (14) и (16) вытекает утверждение теоремы 1.1.

Список литературы

[1] Klein F. *Uber eine geometrische Auffassung der gewohlichen Kettenbruchentwichlung*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingem. 1895. № 3, 357-359.

[2] Вороной Г.Ф. *Собрание сочинений в 3-х томах.* Т. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1952..

[3] Minkowski H. *Generalisation de la theorie des fraction continues*, Ann. Sci. Ècole Norm. Sup. **13** (1896), Ser. 3, № 2, 41-60.

[4] Быковский В.А. *О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул*, ДАН **382** (2003), № 2, 154-155.

[5] Быковский В.А. *О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул*, Чебышевский сборник. Тула, **3** (2002), вып. 2(4), 27-33.

[6] Коробов Н.М. *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе.* М.: МЦНМО, 2004.

[7] Горкуша О.А., Добровольский Н.М. *Об оценках гиперболической дзета-функции решеток*, Чебышевский сборник. Тула, **6** (2005), вып. 2.

[8] Илларионов А.А. *Оценка количества относительных минимумов неполных целочисленных решеток произвольного ранга*, ДАН **418** (2008), № 2.

[9] Heilbronn H. *On the average length of a class of finite continued fractions*, Number Theory and Analysis, Papers in Honor of Edmund Landau, Plenum, New York, 1969, 87-96.

[10] Авдеева М.О. *О нижних оценках количества локальных минимумов целочисленных решеток*, Фундамент. и прикл. матем. **11** (2005), № 6, 9-14.

[11] Lochs G. *Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmässigen Kettenbrüche.*, Monatsh. Math. **65** (1961), 27–52.

[12] Porter J. W. *On a theorem of Heilbronn*, Mathematika, **22** (1975), № 1, 20–28.

[13] Кнут Д.Е. *Искусство программирования.* Т.2. М.: Изд.дом «Вильямс», 2001.

[14] Minkowski H. *Zur Theorie der Kettebrühe*, Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1911, 278–292.

[15] Быковский В.А., Горкуша О.А. *Минимальные базисы трехмерных полных решеток*, Матем. сб. **192** (2001), № 2, 57–66.

[16] Горкуша О.А. *Минимальные базисы трехмерных полных решеток*, Матем. заметки, **69** (2001), вып. 3, 353–362.

[17] Касселс Дж.В. *Введение в геометрию чисел.* М.: Мир, 1995.

[18] Устинов А.В. *Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами*, Матем. сб. **200** (2009), № 4, 131–160.