Цепные дроби вокруг нас

• Всякое рациональное число p/q можно представить в виде конечной *цепной дроби*

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}} = [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

Числа, входящие в цепную дробь, называются *неполными частными*, из них $a_1, \ldots, a_n$ – натуральные, a_0 – целое. Иррациональные числа разлагаются в бесконечные цепные дроби.

• Обрывая цепную дробь, можно получать очень хорошие рациональные приближения к данному числу, которые называются *подходящими дробями* (нумерация подходящих дробей, как и неполных частных, начинается с нуля). Для числа

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ldots]$$

с древних времен известны приближения

$$\frac{22}{7} = [3; 7] \text{ и } \frac{355}{113} = [3; 7, 15, 1].$$

При этом

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < 2 \cdot 10^{-2}, \quad \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < 3 \cdot 10^{-7}.$$

• *Квадратичные иррациональности* (иррациональные корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами), и только они, раскладываются в *периодические* цепные дроби. Например (черта отмечает период),

$$\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, \ldots] = [2; \overline{4}],$$

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}].$$

• Если, разорвав прямоугольный лист бумаги пополам, мы хотим получить два новых листа с тем же отношением сторон, то стороны исходного листа должны относиться друг к другу как $\sqrt{2}:1$. Именно таким свойством обладают форматы бумаги серии А (А0,А1,...). Размеры стандартного листа бумаги А4 – 210×297 мм. Их отношение

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70} = [1; 2, 2, 2, 2, 2]$$

есть пятая подходящая дробь к числу $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$. Разница между ними на глаз не заметна:

$$\left|\sqrt{2} - \frac{297}{210}\right| < 10^{-4}.$$

Произведение сторон листа (в метрах) мало отличается от $1/16$:

$$\left|0,297 \cdot 0,210 - \frac{1}{16}\right| < 2 \cdot 10^{-4}.$$

Это связано с тем, что лист А4 составляет $1/2^4 = 1/16$ от ватманского листа А0, площадь которого равна 1 м^2.

• Отношение напряжений в трехфазных электрических сетях

$$\frac{380}{220} = \frac{19}{11} = [1; 1, 2, 1, 2],$$

$$\frac{220}{127} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 3, 2]$$

– это хорошие приближения к числу

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1; \overline{1, 2}].$$

• Подходящие дроби к длине солнечного года, измеренного в солнечных сутках, –

$$365,24219 \ldots = [365; 4, 7, 1, 3, 5, \ldots]$$

– позволяют строить календарные стили.

Первая подходящая дробь $365\frac{1}{4}$ соответствует *юлианскому стилю*, в котором каждый четвертый год – високосный. В средние века от него отказались, поскольку он дает заметную ошибку: 11 минут 14 секунд в год.

Третья подходящая дробь [365; 4, 7, 1] = $365\frac{8}{33}$ лежала в основе *персидского календаря*, который в 1079 году предложил математик, астроном и поэт Омар Хайям. Такой календарь за год ошибается на 19 секунд. В нем все годы разбиты на 33-летние циклы, внутри цикла семь раз високосным считается каждый четвертый год, а на восьмой раз – пятый.

Календарь, основанный на следующем (четвертом) приближении [365; 4, 7, 1, 3] = $365\frac{31}{128}$, предлагался астрономом Иоганном Генрихом Медлером в 1864 году. Он не был принят, хотя за год давал бы ошибку всего в одну секунду.

Мы живем по *григорианскому стилю*, использующему приближение $365\frac{97}{400}$. Этот календарь ошибается примерно на 27 секунд в год.

• Голландский ученый Христиан Гюйгенс в 1862 году построил один из первых механических планетариев. Теорию цепных дробей он применил при проектировании зубчатых колес, что обеспечило высокую точность во взаимном движении моделей планет.

• В ботанике известно явление *филлотаксиса* – спиралевидного расположения листьев, колючек, чешуек, семян, ... Если посчитать количество спиралей, закручивающихся в одну и в другую стороны, то, как правило, получатся два соседних *числа Фибоначчи*, т.е. числа из последовательности

$$\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\},$$

в которой

$$F_0 = 0\,,\ F_1 = 1\,,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\quad (n \ge 1)\,.$$

Так, на сосновой шишке есть 3 спирали, закручивающиеся в одну сторону, и 5 – в другую. На еловой – 5 и 8 спиралей соответственно, на кедровой – 8 и 13. Отношения соседних чисел Фибоначчи раскладываются в очень простые цепные дроби, например,

$$\frac{5}{3} = [1;1,1,1]\,,\ \frac{8}{5} = [1;1,1,1,1]\,.$$

Это подходящие дроби к числу, называемому *золотым сечением*:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1+\ddots}} = [\bar{1}]\,.$$

Расположение листьев по таким спиралям позволяет растениям получать наибольшее количество солнечных лучей.

• На рисунках 1 и 2 изображен «чертеж» сосновой шишки.

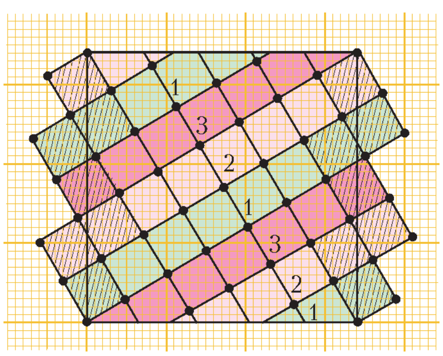

Рис. 1

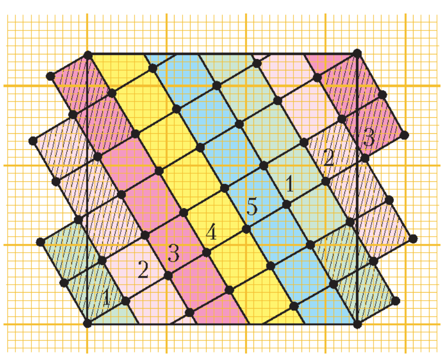

Рис. 2

Представьте, что эти квадраты вырезаны из бумаги и склеены в цилиндры (левая сторона склеена с правой, а заштрихованные квадраты одного цвета наклеены друг на друга). Тогда повернутые квадраты будут располагаться на цилиндре так же, как располагаются чешуйки на сосновой шишке. На рисунке 1 видно 3 спирали, закрученные в одну сторону, а на рисунке 2 – 5 спиралей, закрученных в другую. Попробуйте нарисовать «чертеж» еловой шишки с 5 и 8 спиралями. Воспользуйтесь для этого миллиметровой бумагой, вам понадобится квадрат 89×89.

• Со времен Баха в музыке используется *равномерно темперированная шкала*, содержащая 12 полутонов в каждой октаве. Если струна длины l (при заданном натяжении) издает звук «*до*» первой октавы, соответствующий частоте f, равной 512 колебаниям в секунду, то струна длиной $\frac{2}{3}l$ (на струнных инструментах эта длина получается нажатием пальца в соответствующем месте) издает звук, имеющий частоту $\frac{3}{2}f$ (натуральная квинта), а струна длиной $\frac{1}{2}l$ издает звук, имеющий частоту $2f$ (октава). Наше ухо при сравнении двух звуков улавливает не отношение их частот, а логарифм этого отношения. Естественней всего брать двоичный логарифм, чтобы интервал в одну октаву измерялся как единица:

$$\log_2 \frac{2f}{f} = 1\,.$$

Почему же возникло деление октавы именно на 12 интервалов? Чтобы октава и натуральная квинта по возможности более точно укладывались в одну и ту же *равномерную* темперацию (деление октавы на равные по слуху интервалы), октаву нужно поделить на столько частей, чтобы число $\log_2 \frac{3}{2}$ хорошо приближалось дробью с выбранным знаменателем. Подходящими дробями к числу

$$\log_2 \frac{3}{2} = [0;1,1,2,2,3,1,\ldots]$$

будут дроби

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{7}{12},\ldots$$

Приближения 1 и $1/2$ слишком грубые. Приближение $3/5$ соответствует *пентатонике*, существовавшей у народов Востока, а приближение $7/12$ – самое удачное. Погрешность

$$\left|\log_2 \frac{3}{2} - \frac{7}{12}\right| < 2 \cdot 10^{-3}$$

на слух неразличима.

Что читать в «Кванте» о цепных дробях

1. А.Бендукидзе. *Золотое сечение*. – №8 за 1973 г.
2. Н.Бескин. *Бесконечные цепные дроби*. – №8 за 1970 г.
3. Н.Бескин. *Цепные дроби*. – №1 за 1970 г.
4. А.Бялко. *Физика музыкальной гармонии*. – №5 за 1987 г.
5. Ю.Нестеренко, Е.Никишин. *Очерк о цепных дробях*. – №5–6 за 1983 г.
6. А.Прохоров. *Золотая спираль*. – №9 за 1984 г.
7. Ж.Раббот. *Знаете ли вы, что* $\frac{220}{127} \approx \sqrt{3}$? – №11 за 1978 г.
8. Д.Фукс, М.Фукс. *О наилучших приближениях*. – №6 за 1971 г.

Материал подготовил А.Устинов