Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера

Устинов А. В.*

УДК 511.217

В работе доказывается дискретный аналог формулы суммирования Эйлера. Отличие от классического варианта формулы Эйлера заключается в том, что производные заменяются на конечные разности, интегралы — на конечные суммы. Вместо чисел и полиномов Бернулли в формуле появляются специальные числа P_n и специальные полиномы $P_n(x)$, введенные Н. М. Коробовым в 1996 году.

1 Введение

В работе [2] Н. М. Коробовым были введены специальные числа P_n и специальные полиномы $P_n(x)$, которые можно назвать дискретными аналогами чисел Бернулли B_n и полиномов Бернулли $B_n(x)$. Аналогия заключается в том, что свойства полиномов $B_n(x)$ превращаются в свойства полиномов $P_n(x)$ при замене непрерывных объектов на дискретные: производных — на конечные разности, интегралов — на конечные суммы, рядов Фурье — на конечные ряды Фурье.

Одним из важных приложений полиномов Бернулли является формула суммирования Эйлера, которая устанавливает связь между суммой значений достаточно гладкой функции $f(x)$ в точках равномерной сетки

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \tag{1}$$

и определенным интегралом от этой функции по соответствующему отрезку:

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B_\nu}{\nu!} f^{(\nu-1)}(x)\Big|_a^b - R_n[f], \tag{2}$$

где

$$R_n[f] = \int\limits_a^b \frac{B_n(1-\{x\})}{n!} f^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n \int\limits_a^b \frac{B_n(\{x\})}{n!} f^{(n)}(x)\,dx.$$

Другим приложением полиномов Бернулли является формула для представления произвольной функции $f(x)$ на отрезке $[0;1]$:

$$f(x) = \int\limits_0^1 f(y)\,dy + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k(x)}{k!} \left(f^{(k-1)}(y)\big|_0^1 \right) - R_n, \tag{3}$$

где

$$R_n = \int\limits_0^1 \frac{B_n(\{x-y\})}{n!} f^{(n)}(y)\,dy = (-1)^n \int\limits_0^1 \frac{B_n(1-\{x-y\})}{n!} f^{(n)}(y)\,dy$$

*Работа выполнена при частичной поддержке фонда РФФИ, гранд N 01-01-00738

(см., например, [3]).

При использовании формул (2) и (3) в прикладных задачах возникает неудобство, связанное с необходимостью знать производные функции $f(x)$.

В настоящей работе доказываются дискретные аналоги формул (2) и (3) (теоремы 2 и 1). В дискретном аналоге формулы Эйлера сумма (1) приближается не интегралом, а суммой значений той же функции в узлах более густой равномерной сетки:

$$\frac{1}{p}\sum_{y=ap}^{bp-1} f\left(\frac{y}{p}\right). \tag{4}$$

В задаче о нахождении суммы (1) такая формула может оказаться более удобной, если сумма (4) подсчитывается точнее, чем интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

С другой стороны дискретный аналог формулы суммирования Эйлера представляется более удобным для использования в задачах приближенного анализа: эта формула связывает сумму (4), близкую к интегралу (5) с более короткой суммой (1). Причем в отличие от обычной формулы суммирования Эйлера для применения ее дискретного аналога не требуется знать значения производных функции, а нужны лишь значения самой функции в конечном наборе точек.

2 Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера

Пусть $n \geq 0$, $p \geq 2$ — целые числа. При любом действительном x числа P_n и полиномы $P_n(x)$ определяются равенствами

$$P_0 = 1, \qquad C_p^1 P_n + \ldots + C_p^{n+1} P_0 = 0 \qquad (n \geq 1);$$

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = P_0 C_x^n + \ldots + P_{n-1} C_x^1 + P_n \qquad (n \geq 1).$$

Пользуясь определением, нетрудно вычислить первые специальные числа и специальные полиномы

$$P_1 = -\frac{p-1}{2}, \quad P_2 = \frac{p^2-1}{12}, \quad P_3 = -\frac{p^2-1}{24},$$

$$P_1(x) = x - \frac{p-1}{2}, \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{p}{2}x + \frac{p^2-1}{12},$$

$$P_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{p+1}{4}x^2 + \frac{p^2+3p}{12}x - \frac{p^2-1}{24}.$$

Определим действие оператора взятия конечной разности Δ при помощи равенств

$$\Delta^0 f\left(\frac{x}{p}\right) = f\left(\frac{x}{p}\right), \qquad \Delta^1 f\left(\frac{x}{p}\right) = f\left(\frac{x+1}{p}\right) - f\left(\frac{x}{p}\right).$$

Конечную разность порядка $n \geq 1$ определим с помощью рекуррентного соотношения

$$\Delta^n f\left(\frac{x}{p}\right) = \Delta^1\left(\Delta^{n-1} f\left(\frac{x}{p}\right)\right).$$

Отметим два свойства специальных полиномов, доказанные в работе [2]:

1°. $P_n(0) = P_n \qquad (n \geq 0)$;

2°. При целом $x \in [0;\ p+n-2]$

$$P_n(x) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}} \qquad (n \geq 0).$$

Докажем сначала дискретный аналог формулы (3).

Теорема 1 *Пусть n, k — целые числа, $n \geq 1$, и функция $f\left(\frac{z}{p}\right)$ определена во всех точках промежутка $k \leq \frac{z}{p} < k+1+\frac{n}{p}$. Тогда для всех целых x из интервала $0 \leq x < p$ справедливо равенство*

$$f\left(k+\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p-1} f\left(k+\frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu(x)\Delta^{\nu-1} f\left(k+\frac{y}{p}\right)\Bigg|_{y=0}^{p} - R_n, \tag{6}$$

где остаток R_n может быть записан двумя способами:

$$R_n = \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p-1} \Delta^n f\left(k+\frac{y}{p}\right) P_n\left(p\left\{\frac{p+x-y-1}{p}\right\}\right), \tag{7}$$

$$R_n = \frac{(-1)^n}{p}\sum_{y=0}^{p-1} \Delta^n f\left(k+\frac{y}{p}\right) P_n\left(p\left\{\frac{y-x-n-1}{p}\right\}\right). \tag{8}$$

Доказательство. Докажем сначала формулы (6) с остаточным членом (7). При $n = 1$ необходимо проверить равенство

$$f\left(k+\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p-1} f\left(k+\frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p}\left(x - \frac{p-1}{2}\right)[f(k+1) - f(k)] - R_1. \tag{9}$$

Для этого преобразуем остаток R_1:

$$\begin{aligned} R_1 = &\ \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p-1} \Delta f\left(k+\frac{y}{p}\right) P_1\left(p\left\{\frac{p+x-y-1}{p}\right\}\right) = \\ &= \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{x-1} \Delta f\left(k+\frac{y}{p}\right)\left(x-y-1-\frac{p-1}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{p}\sum_{y=x}^{p-1} \Delta f\left(k+\frac{y}{p}\right)\left(p+x-y-1-\frac{p-1}{2}\right) = \\ &= f(k+1) - f\left(k+\frac{x}{p}\right) + \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{x-1} \Delta f\left(k+\frac{y}{p}\right)\left(x-y-1-\frac{p-1}{2}\right). \end{aligned}$$

К последней сумме применим преобразование Абеля

$$\sum_{y=0}^{p-1} F(y)\varphi(y) = F(p)\sum_{y=0}^{p-1}\varphi(y) - \sum_{y=0}^{p-1}(F(y+1) - F(y))\sum_{z=0}^{y}\varphi(z), \tag{10}$$

положив $\varphi(y) = \Delta f\left(k+\frac{y}{p}\right)$ и $F(y) = x-y-1-\frac{p-1}{2}$:

$$R_1 + f\left(k+\frac{x}{p}\right) = f(k+1) + \frac{1}{p}\left(x-p-1-\frac{p-1}{2}\right)[f(k+1) - f(k)] +$$
$$+ \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p-1}\left[f(k+\frac{y+1}{p}) - f(k)\right] = \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p-1} f\left(k+\frac{y}{p}\right) + [f(k+1) - f(k)]\left(x - \frac{p-1}{2}\right).$$

Тем самым равенство (9) доказано.

Далее применим индукцию. Предположим, что равенства (6), (7) справедливы для некоторого $n \geq 1$.

Из свойства 2° следует, что для всех целых x выполняется равенство

$$P_n\left(p\left\{\frac{x}{p}\right\}\right) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}} \qquad (n \geq 0). \tag{11}$$

Суммируя это равенство, приходим к соотношениям

$$\sum_{y=0}^{p-1} P_n\left(p\left\{\frac{p+x-y-1}{p}\right\}\right) = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{z=0}^{y} P_n\left(p\left\{\frac{x+x-z-1}{p}\right\}\right) = P_{n+1}\left(p\left\{\frac{x}{p}\right\}\right) - P_{n+1}\left(p\left\{\frac{p+x-y-1}{p}\right\}\right). \tag{13}$$

Вновь применим преобразование Абеля (10) к остатку R_n, выбирая

$$F(y) = \Delta^n f\left(k + \frac{y}{p}\right) \quad \text{и} \quad \varphi(y) = P_n\left(p\left\{\frac{p+x-y-1}{p}\right\}\right).$$

С учетом формул (12) и (13), приходим к нужному равенству:

$$R_n = -\frac{1}{p}\, P_{n+1}(x)\Delta^n f\left(k + \frac{y}{p}\right)\bigg|_0^p + R_{n+1}.$$

Что доказывает формулу (6) с остаточным членом в первой форме (7).

Для доказательства второго представления остатка (8) достаточно воспользоваться равенством

$$P_n\left(p\left\{\frac{p-1-x}{p}\right\}\right) = (-1)^n P_n\left(p\left\{\frac{x+n-1}{p}\right\}\right) \qquad (n \geq 0), \tag{14}$$

которое является прямым следствием формулы (11). Теорема доказана.

Докажем теперь дискретный аналог формулы суммирования Эйлера (2).

Теорема 2 *Пусть $b > a$ и $n \geq 1$ — целые числа, и функция $f\left(\frac{z}{p}\right)$ определена во всех точках промежутка $a \leq \frac{z}{p} < b + \dfrac{n}{p}$. . Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \frac{1}{p}\sum_{y=ap}^{bp-1} f\left(\frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \Delta^{\nu-1} f\left(\frac{y}{p}\right)\bigg|_{ap}^{bp} - R_n[f], \tag{15}$$

где остаток $R_n[f]$ может быть записан двумя способами:

$$R_n[f] = \frac{1}{p}\sum_{y=ap}^{bp-1} \Delta^n f\left(\frac{y}{p}\right) P_n\left(p\left\{\frac{p-y-1}{p}\right\}\right), \tag{16}$$

$$R_n[f] = \frac{(-1)^n}{p}\sum_{y=ap}^{bp-1} \Delta^n f\left(\frac{y}{p}\right) P_n\left(p\left\{\frac{y+n-1}{p}\right\}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Если в равенстве (6) положить $x = 0$ и просуммировать его по k от a до $b-1$, то получится формула (15) с остатком $R_n[f]$ в форме (16). Вторая форма записи остатка (17), как и в теореме 1, является следствием формулы (14). Теорема доказана.

Замечание. Существуют различные оценки остаточного члена в формуле суммирования Эйлера (2), зависящие от поведения производных функции $f(x)$ (см. [1]). Эти оценки основываются на геометрических свойствах многочленов Бернулли. Например, всегда справедливо неравенство

$$|R_{2n-1}| \leq \frac{(b-a)|B_{2n}|}{(2n)!} \max_{\xi\in[a;b]} \left| f^{(2n)}(\xi) \right|.$$

По аналогии можно доказать, что для остаточного члена формулы (15) выполняется оценка

$$|R_{2n-1}[f]| \leq 2(b-a)p^{2n} \left(\frac{|B_{2n}|}{(2n)!} + \frac{1}{p^2} \right) \max_{y\in[ap;bp-1]} \left| \Delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right) \right|.$$

Автор планирует посвятить отдельную статью изучению геометрических свойств специальных полиномов и различным оценкам остаточного члена формулы суммирования (15).

3 Символический вывод дискретного аналога формулы суммирования Эйлера

Известно, что формула Эйлера допускает нестрогий символический вывод, основанный на формальной связи между опрераторами сдвига, дифференцирования и оператором конечной разности (см., например, [1]). Ее дискретный аналог также может быть получен при помощи формальных рассуждений. Приведенные ниже выкладки, естественно, нельзя считать доказательством. Они являются лишь аргументом в пользу существования такой формулы. Для символического вывода формулы воспользуемся производящей функцией последовательности специальных чисел. Как отмечалось в работе [2], эта функция имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n = \frac{pt}{(t+1)^p - 1}.$$

Будем обозначать через E оператор сдвига, действие которого определяется равенством

$$Ef\left(\frac{y}{p}\right) = f\left(\frac{y+1}{p}\right).$$

Пусть $Q = b - a$. Левая часть формулы (15) может быть записана в виде

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \left(1 + E^p + E^{2p} + \ldots + E^{(Q-1)p}\right) f\left(\frac{ap}{p}\right) = \frac{E^{Qp}-1}{E^p-1} f\left(\frac{ap}{p}\right).$$

Сумма значений функции в рациональных точках со знаменателем p примет вид

$$\frac{1}{p}\sum_{y=ap}^{bp-1} f\left(\frac{y}{p}\right) = \frac{1}{p}\left(1 + E + E^2 + \ldots + E^{Qp-1}\right) f\left(\frac{ap}{j}\right) = \frac{1}{p}\cdot\frac{E^{Qp}-1}{E-1} f\left(\frac{ap}{p}\right).$$

Если воспользоваться операторным равенством $E - 1 = \Delta$, то разность операторов, которые применяются в первом и во втором случае будет иметь следующее символическое представление:

$$\frac{E^{Qp}-1}{p}\left(\frac{p}{E^p-1} - \frac{1}{E-1}\right) = \frac{E^{Qp}-1}{p\Delta}\left(\frac{p\Delta}{(\Delta+1)^p-1} - 1\right).$$

В правой части оказалась производящая функция специальных чисел с аргументом Δ. Раскладывая ее в ряд по степеням Δ, приходим к равенству

$$\frac{E^{Qp}-1}{p}\left(\frac{p}{E^p-1}-\frac{1}{E-1}\right)=\frac{E^{Qp}-1}{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}P_\nu\Delta^{\nu-1}.$$

Применяя найденное операторное равенство к $f\left(\frac{ap}{p}\right)$, получаем дискретный аналог формулы суммирования Эйлера без остаточного члена:

$$\sum_{k=a}^{b-1}f(k)-\frac{1}{p}\sum_{y=ap}^{bp-1}f\left(\frac{y}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}P_\nu\Delta^{\nu-1}f\left(\frac{y}{p}\right)\bigg|_{ap}^{bp}.$$

Список литературы

[1] Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей.* — М.: Наука, 1967.

[2] Коробов Н. М. *Специальные полиномы и их приложения.* — Диофантовы приближения. Матем. записки, 1996, т. 2, с. 77–89.

[3] Коробов Н. М. *Теоретикочисловые методы в приближенном анализе.* — М.: Физматгиз, 1963.