Вычисление дисперсии в одной задаче из теории цепных дробей

А. В. Устинов*

1 Обозначения

1. Запись $[x_0; x_1, \ldots, x_s]$ означает цепную дробь

$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \ddots + \cfrac{1}{x_s}}$$

длины s с формальными переменными x_0, x_1, …, x_s.

2. Для рационального r представление $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ есть каноническое (если не сделано дополнительных оговорок) разложение r в цепную дробь, где $t_0 = [r]$ (целая часть r), t_1, …, t_s — натуральные и $t_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$. В некоторых случаях то же число r будет записываться в виде $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s - 1, 1]$.

3. Обозначение $K_n(x_1, \ldots, x_n)$ (см. [5]) используется для континуантов, которые определяются начальными условиями

$$K_0() = 1, \quad K_1(x_1) = x_1$$

и рекуррентным соотношением

$$K_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) + K_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2}) \qquad (n \geqslant 2).$$

При этом всегда выполняется равенство

$$[x_0; x_1, \ldots, x_s] = \frac{K_{s+1}(x_0, x_1, \ldots, x_s)}{K_s(x_1, \ldots, x_s)}.$$

Нижний индекс, равный числу аргументов континуанта, в дальнейшем будет опускаться.

4. Знак звездочки в двойных суммах вида

$$\sum_n \sum_m{}^{*} \ldots$$

означает, что переменные, по которым проводится суммирование, связаны дополнительным условием $(m, n) = 1$.

*Работа выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5070, фонда РФФИ, грант № 07-01-00306 и проекта ДВО РАН 06-III-A-01-017

5. Если A — некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если A истинно, и 0 в противном случае.

6. Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q:
$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod{p}] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

7. Штрих в суммах вида
$$\sideset{}{'}\sum_{b,m=1}^{n} \delta_n(bm \pm 1) \cdot \ldots$$
означает, что при $n = 1$ из двух знаков в символе $\pm$ выбирается знак "минус", а при $n > 1$ оба знака берутся независимо.

8. Конечные разности функций одной и двух переменных:
$$\Delta a(u) = a(u+1) - a(u),$$
$$\Delta_{1,0} a(u,v) = a(u+1,v) - a(u,v), \quad \Delta_{0,1} a(u,v) = a(u,v+1) - a(u,v),$$
$$\Delta_{1,1} a(u,v) = \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0} a(u,v)) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1} a(u,v)).$$

9. Сумма степеней делителей
$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

2 Введение

Пусть $s(a/b)$ — длина цепной дроби для рационального числа $a/b = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$.

В 1968 г. Хейльбронн [12] доказал асимптотическую формулу для среднего значения величины $s(a/b)$
$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant b \\ (a,b)=1}} s(a/b) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log b + O\left(\log^4 \log b\right).$$
Позднее Портер (см. [14]) для той же суммы при любом $\varepsilon > 0$ получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами
$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant b \\ (a,b)=1}} s(a/b) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log b + C_P - 1 + O(b^{-1/6+\varepsilon}),$$
где
$$C_P = \frac{\log 2}{\zeta(2)} \left(3 \log 2 + 4\gamma - 4\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 2\right) - \frac{1}{2}$$
— константа, получившая название константы Портера (её окончательный вид был найден Ренчем, см. [13]).

Для дисперсии величины $s(a/b)$ (при фиксированном значении b) известна лишь правильная по порядку оценка, принадлежащая Быковскому [3]:

$$\frac{1}{b}\sum_{a=1}^{b}\left(s\left(\frac{a}{b}\right)-\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log b\right)^2 \ll \log b.$$

При усреднении по обоим параметрам a и b получаются более точные результаты. Так для среднего значения величины $s(a/b)$ методами из работ [6]–[7] при любом $\varepsilon > 0$ получается асимптотическая формула

$$\frac{2}{R^2}\sum_{b\leqslant R}\sum_{a\leqslant b} s(a/b) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log b + B + O(b^{-1/2+\varepsilon}),$$

где

$$B = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+C_P-\frac{3}{2}.$$

Для дисперсии также известна асимптотическая формула с двумя значащими членами (см. [11]):

$$\frac{2}{R^2}\sum_{b\leqslant R}\sum_{a\leqslant b}\left(s(a/b)-\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log b - B\right)^2 = \delta_1\cdot\log R+\delta_0+O(R^{-\gamma}) \tag{1}$$

с абсолютными константами δ_1 δ_0 и $\gamma > 0$.

В случае иррационального числа аналогом величины $s(\alpha)$ можно считать

$$N(\alpha, R) = \#\left\{j \geqslant 1 : Q_j(\alpha) \leqslant R\right\},$$

где $Q_j(\alpha)$ — знаменатель j-ой подходящей дроби к числу α. В настоящей работе для среднего значения $N(\alpha, R)$

$$N(R) = \int_0^1 N(\alpha, R)d\alpha$$

проверяется асимптотическая формула с двумя значащими членами, и для дисперсии

$$D(R) = \int_0^1 (N(\alpha, R) - N(R))^2 d\alpha = \int_0^1 N^2(\alpha, R)d\alpha - N^2(R)$$

доказывается асимптотическая формула

$$D(R) = D_1\cdot\log R + D_0 + O(R^{-1/3}\log^5 R)$$

с абсолютными константами D_1 D_0.

Методы данной работы также позволяют доказать формулу (1) с любым $\gamma > -1/4$. Автор планирует изложить этот результат в следующей статье.

Автор выражает благодарность В. А. Быковскому за поставленную задачу и полезные советы.

3 О цепных дробях

Следующее утверждение является видоизменением одной известной теоремы (см. [2, § 50, теорема 1]). Оно будет служить основой для всех дальнейших рассуждений.

Лемма 1. *Пусть P — целое неотрицательное число, P', Q, Q' — натуральные и $Q \leqslant Q'$. Предположим также, что α — действительное число из интервала $(0;1)$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(I) P/Q и P'/Q' — последовательные подходящие дроби к числу α, отличные от α, причем дробь P'/Q' имеет больший номер;

(II) $PQ' - P'Q = \pm 1$ *и* $0 < \dfrac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} < 1.$

Доказательство см. в [6, лемма 1].

Следуя работе [3], обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S) & P'(S) \\ Q(S) & Q'(S) \end{pmatrix},$$

с определителем $\det S = \pm 1$, у которых

$$1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad 0 \leqslant P \leqslant Q, \quad 1 \leqslant P' \leqslant Q'.$$

Для вещественного $R > 0$ через $\mathcal{M}(R)$ будем обозначать конечное подмножество в $\mathcal{M}$, состоящее из всех матриц S с дополнительным условием $Q' \leqslant R$.

Из леммы 1, как это было отмечено в работе [3], вытекают следующие свойства множества $\mathcal{M}$.

1°. Соответствие

$$(q_1, \ldots, q_l) \to S = S(q_1, \ldots, q_l) = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \tag{2}$$

где

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \ldots, q_{l-1}] \quad \text{и} \quad \frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \ldots, q_l]$$

определяет биекцию множества всех конечных наборов натуральных чисел на множество $\mathcal{M}$. В частности, отсюда следует, что множество $\mathcal{M}$ является полугруппой по умножению.

2°. Для вещественного $\alpha \in (0,1)$ неравенство

$$0 < \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = S^{-1}(\alpha) < 1 \quad \text{с} \quad S \in \mathcal{M}$$

имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого $j \geqslant 1$

$$S = \begin{pmatrix} P_j(\alpha) & P_{j+1}(\alpha) \\ Q_j(\alpha) & Q_{j+1}(\alpha) \end{pmatrix}$$

и $j \leqslant s(r) - 2$ для рационального $\alpha = r$.

3°. Для всякой матрицы $S \in \mathcal{M}$ неравенство $0 < S^{-1}(\alpha) < 1$ задает интервал

$$I(S) = \begin{cases} \left(\dfrac{P'}{Q'}, \dfrac{P+P'}{Q+Q'} \right), & \text{если } \det S = 1; \\ \left(\dfrac{P+P'}{Q+Q'}, \dfrac{P'}{Q'} \right), & \text{если } \det S = -1; \end{cases}$$

длины

$$|I(S)| = \frac{1}{Q'(Q+Q')}.$$

4°. Пусть $q_1, \ldots, q_l$ — натуральные числа и, в соответствии с (2), $S = S(q_1, \ldots, q_l)$. Тогда число α будет лежать в интервале $I(S)$ в том и только том случае, когда $s(\alpha) > l$ и в каноническом разложении $\alpha = [t_0; t_1, \ldots, t_l, \ldots]$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = q_1, \ldots, t_l = q_l.$$

5°. Пересечение $I(S) \cap I(S')$ непусто тогда и только тогда, когда один из интервалов содержится в другом. При этом, если $I(S) \subsetneq I(S')$, и $S' = S'(q_1, \ldots, q_{l'})$, то для некоторого $l > l'$ и натуральных $q_{l'+1}, \ldots, q_l$ будет выполняться равенство

$$S = S' \cdot S'',$$

где $S'' = S''(q_{l'+1}, \ldots, q_l)$ и $S = S(q_1, \ldots, q_l)$.

6°. Если $Q' \geqslant 2$, $1 \leqslant Q \leqslant Q'$ и $(Q, Q') = 1$, то имеются ровно две пары

$$(P, P') \quad \text{и} \quad (Q-P, Q'-P'),$$

которые в качестве первой строки могут дополнить вторую (Q, Q') до матрицы из $\mathcal{M}$. Кроме того, если

$$\frac{Q}{Q'} = [0; q_s, \ldots, q_1] = [0; q_s, \ldots, q_1 - 1, 1] \qquad (q_1 \geqslant 2),$$

то соответствующие матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(q_2, \ldots, q_{s-1}) & K(q_2, \ldots, q_s) \\ K(q_1, \ldots, q_{s-1}) & K(q_1, \ldots, q_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} K(q_1 - 1, q_2, \ldots, q_{s-1}) & K(q_1 - 1, q_2, \ldots, q_s) \\ K(1, q_1 - 1, q_2, \ldots, q_{s-1}) & K(1, q_1 - 1, q_2, \ldots, q_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q-P & Q'-P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}.$$

При $Q = Q' = 1$ существует только одна матрица $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, лежащая в множестве $\mathcal{M}$.

4 Вспомогательные утверждения

Лемма 2. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда*

$$\sum_{n \leqslant R} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \left(\log R + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + O\left(\frac{\log R}{R} \right), \tag{3}$$

$$\sum_{n \leqslant R} \frac{\varphi(n)}{n^2} \log n = \frac{1}{2\zeta(2)} \log^2 R + C_0 + O\left(\frac{\log^2 R}{R} \right),$$

где
$$C_0=\gamma\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}+\gamma_1\frac{1}{\zeta(2)}-\frac{2(\zeta'(2))^2-\zeta''(2)\zeta(2)}{2\zeta^3(2)}$$
и γ_1 *— константа Стильтьеса (см. [10, раздел 2.21]), определяемая равенством*
$$\sum_{n\leqslant T}\frac{\log n}{n}=\frac{\log^2 T}{2}+\gamma_1+O\left(\frac{\log T}{T}\right)\qquad (T\geqslant 2).\tag{4}$$

Доказательство. Для доказательства первого равенства запишем $\varphi(q)$ используя функцию Мёбиуса:
$$\sum_{n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\sum_{n\leqslant R}\frac{1}{n}\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d\leqslant R}\frac{\mu(d)}{d^2}\sum_{n\leqslant R/d}\frac{1}{n}=$$
$$=\sum_{d\leqslant R}\frac{\mu(d)}{d^2}\left(\log R-\log d+\gamma+O\left(\frac{d}{R}\right)\right).$$

Поскольку
$$\sum_{d\leqslant R}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{1}{\zeta(2)}+O\left(\frac{1}{R}\right),\qquad \sum_{d\leqslant R}\frac{\mu(d)}{d^2}\log d=\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}+O\left(\frac{\log R}{R}\right),\tag{5}$$
то
$$\sum_{n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}\left(\log R+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+O\left(\frac{\log R}{R}\right).$$

Вторую сумму преобразуем тем же способом:
$$\sum_{n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}\log n=\sum_{n\leqslant R}\frac{\log n}{n}\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d\leqslant R}\frac{\mu(d)}{d^2}\sum_{n\leqslant R/d}\frac{1}{n}(\log n+\log d).$$

Пользуясь равенством (4), находим
$$\sum_{n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}\log n=\sum_{d\leqslant R}\frac{\mu(d)}{d^2}\left(\frac{\log^2 R}{2}-\frac{\log^2 d}{2}+\gamma_1+\gamma\log d\right)+O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right).$$

Вторая формула леммы теперь следует из (5) и равенства
$$\sum_{d\leqslant R}\frac{\mu(d)}{d^2}\log^2 d=\frac{2(\zeta'(2))^2-\zeta''(2)\zeta(2)}{\zeta^3(2)}+O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right)$$

□

Лемма 3. *При* $R\geqslant 2$ *для суммы*
$$\Phi^*(R)=\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\frac{1}{Q'(Q+Q')}\tag{6}$$

справедлива асимптотическая формула
$$\Phi^*(R)=\frac{\log 2}{\zeta(2)}\left(\log R+\log 2+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)-\frac{1}{2}+O\left(\frac{\log R}{R}\right).$$

Доказательство. Найдем сначала асимптотическую формулу для суммы

$$\Phi(R) = \sum_{Q'\leqslant R} \sum_{Q\leqslant Q'} \frac{1}{Q'(Q+Q')},$$

в которой переменные суммирования Q и Q' не связаны условием взаимной простоты. Запишем $\Phi(R)$ в виде

$$\Phi(R) = \log 2 \sum_{Q'\leqslant R} \frac{1}{Q'} + \sigma_0 + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

где

$$\sigma_0 = \sum_{Q'=1}^{\infty} \frac{1}{Q'} \left(\sum_{Q=1}^{Q'} \frac{1}{Q+Q'} - \log 2 \right). \tag{7}$$

Для суммы σ_0 известно точное значение (см. [13]):

$$\sigma_0 = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{2}, \tag{8}$$

значит,

$$\Phi(R) = \log 2 \left(\log R + \log 2 + \gamma\right) - \frac{\zeta(2)}{2} + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Далее, применяя формулы

$$\Phi^*(R) = \sum_{\delta\leqslant R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \Phi\left(\frac{R}{\delta}\right), \qquad \sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \log \delta = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)},$$

приходим к утверждению леммы. □

Лемма 4. *Пусть q — натуральное число и функция $a(n)$ задана для целых n, лежащих в пределах $1 \leqslant n \leqslant q$. Предположим также, что эта функция удовлетворяет неравенствам*

$$a(n) \geqslant 0 \quad (1 \leqslant n \leqslant q), \qquad \Delta a(n) \leqslant 0 \quad (1 \leqslant n \leqslant q-1).$$

Тогда

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} a(n) = \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{n=1}^{q} a(n) + O\left(A\sigma_0(q)\right),$$

где $A = a(1)$ — наибольшее значение функции $a(n)$.

Доказательство. Применим к данной сумме преобразование Абеля:

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} a(n) = \sum_{n=1}^{q} a(n)[(n,q)=1] =$$

$$= \varphi(q)a(q) - \sum_{k=1}^{q-1} (a(k+1) - a(k)) \sum_{n=1}^{k} [(n,q)=1].$$

Далее, пользуясь равенством

$$\sum_{n=1}^{k}[(n,q)=1]=\frac{\varphi(q)}{q}k+O(\sigma_0(q))$$

(см. [4, гл. II, зад. 19]), находим

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q}a(n)=\varphi(q)a(q)-\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{k=1}^{q-1}(a(k+1)-a(k))k+O(A\sigma_0(q))=$$

$$=\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{n=1}^{q}a(n)+O\left(A\sigma_0(q)\right).$$

□

В основе следующего утверждения, в частных случаях доказанного в работе [1], лежат оценки сумм Клостермана, принадлежащие Эстерману [9].

Лемма 5. *Пусть $q\geqslant 1$ — натуральное и функция $a(u,v)$ задана в целых точках (u,v), где $1\leqslant u,v\leqslant q$. Предположим также, что эта функция удовлетворяет неравенствам*

$$a(u,v)\geqslant 0,\quad \Delta_{1,0}a(u,v)\leqslant 0,\quad \Delta_{0,1}a(u,v)\leqslant 0,\quad \Delta_{1,1}a(u,v)\geqslant 0$$

во всех точках, где эти условия определены. Тогда для суммы

$$W=\sum_{u,v=1}^{q}\delta_q(uv\pm 1)a(u,v)$$

(при любом выборе знака в символе $\pm$) справедлива асимптотическая формула

$$W=\frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{u,v=1}^{q}a(u,v)+O\left(A\psi(q)\sqrt{q}\right),$$

где $\psi(q)=\sigma_0(q)\sigma_{-1/2}(q)\log^2(q+1)$, и $A=a(1,1)$ — наибольшее значение функции $a(u,v)$.

Доказательство см. в [6, лемма 5].

5 О величинах $N(R)$ и $D(R)$

Лемма 6. *При $R\geqslant 1$ величина*

$$N(R)=\int_0^1 N(\alpha,R)d\alpha$$

может быть представлена в виде

$$N(R)=2\Phi^*(R)-\frac{1}{2},\tag{9}$$

где функция $\Phi^*(R)$ задается рядом (6).

Кроме того, для $N(R)$ справедлива асимптотическая формула

$$N(R)=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log R+\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\log 2+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)-\frac{3}{2}+O\left(\frac{\log(R+1)}{R}\right).\tag{10}$$

Доказательство. По лемме 1 для иррационального $\alpha \in (0,1)$ величина $N(\alpha, R)$ совпадает с числом решений системы

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = \pm 1, \\ 0 < S^{-1}(\alpha) < 1, \end{cases}$$

относительно неизвестных P, P', Q и Q', связанных неравенствами

$$1 \leqslant Q \leqslant Q' \leqslant R, \quad 0 \leqslant P \leqslant Q, \quad 1 \leqslant P' \leqslant Q'.$$

Отсюда

$$N(\alpha, R) = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} [0 < S^{-1}(\alpha) < 1] = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \chi_{I(S)}(\alpha), \tag{11}$$

$$N(R) = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \int_0^1 \chi_{I(S)}(\alpha) d\alpha = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \frac{1}{Q'(Q+Q')}, \tag{12}$$

где $\chi_{I(S)}(\alpha)$ — характеристическая функция интервала $I(S)$.

Пусть $Q' \geqslant 2$, $1 \leqslant Q < Q'$ и $(Q, Q') = 1$. Тогда, согласно свойству 6° множества $\mathcal{M}$, дробь $\frac{1}{Q'(Q+Q')}$ в сумме (12) появится ровно 2 раза. Для пары $(Q', Q) = (1,1)$ соответствующая дробь появится 1 раз. Следовательно, выполнено равенство (9). Применяя к нему лемму 3, приходим к асимптотической формуле для $N(R)$. □

Лемма 7. *При $R \geqslant 1$ для величины*

$$D(R) = \int_0^1 (N(\alpha, R) - N(R))^2 d\alpha = \int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha - N^2(R)$$

справедливо представление

$$D(R) = 4\sigma(R) - N^2(R) + \frac{1}{2}, \tag{13}$$

где

$$\sigma(R) = \sum_{Q' \leqslant R} \sum_{Q \leqslant Q'}{}^{*} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}} \frac{[mQ + nQ' \leqslant R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}.$$

Доказательство. По формулам (11) и (12)

$$\int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha = \int_0^1 \Big(\sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \chi_{I(S)}(\alpha) \Big)^2 d\alpha =$$

$$= \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} |I(S)| + 2 \sum_{\substack{S, S' \in \mathcal{M}(R) \\ I(S) \subsetneq I(S')}} |I(S)| = N(R) + 2 \sum_{\substack{S, S' \in \mathcal{M}(R) \\ I(S) \subsetneq I(S')}} |I(S)|.$$

Пользуясь свойством 5°, запишем матрицы S и S' в виде

$$S' = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix},$$

где матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)$ также лежит в множестве $\mathcal{M}$. Значит,

$$\int_0^1 N^2(\alpha,R)d\alpha = N(R) + 2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}} \frac{[mQ+nQ' \leqslant R]}{(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')}.$$

Рассматривая отдельно случай $Q = Q' = 1$ и пользуясь свойством 6°, находим

$$\int_0^1 N^2(\alpha,R)d\alpha = N(R) + 4\sigma(R) - 2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}} \frac{[m+n \leqslant R]}{(m+n)(a+b+m+n)}$$

Из равенства

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & n \\ a+b & m+n \end{pmatrix}$$

и свойства 6° следует, что каждая пара чисел (q,q') такая, что $1 \leqslant q < q'$ и $(q,q') = 1$ будет второй строкой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} b & n \\ a+b & m+n \end{smallmatrix}\right)$ ровно для одной матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$.

Поэтому, с учетом равенства (9),

$$2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}} \frac{[m+n \leqslant R]}{(m+n)(a+b+m+n)} = 2\left(\Phi^*(R) - \frac{1}{2}\right) = N(R) - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 N^2(\alpha,R)d\alpha = 4\sigma(R) + \frac{1}{2}, \tag{14}$$

что доказывает утверждение леммы. □

Замечание 1. Для суммы $\sigma(R)$ можно записать еще одно представление:

$$\sigma(R) = \sum_{2\leqslant Q'\leqslant R} \sum_{Q\leqslant Q'}^{*} \frac{s(Q/Q')}{Q'(Q+Q')}. \tag{15}$$

Действительно, если $S = S(q_1,\ldots,q_n)$, то матрицу $S' \in \mathcal{M}$, для которой $I(S) \subsetneq I(S')$, можно выбрать $n-1$ способом. Поэтому

$$\int_0^1 N^2(\alpha,R)d\alpha = N(R) + 2 \sum_{\substack{S\in\mathcal{M} \\ Q'\geqslant 2}} \frac{n-1}{Q'(Q+Q')}.$$

По свойству 5° множества $\mathcal{M}$ для фиксированных Q и Q' ($1 \leqslant Q < Q'$, $(Q,Q') = 1$) параметр n может принимать два значения $s(Q/Q')$ и $s(Q/Q')+1$. Таким образом

$$\int_0^1 N^2(\alpha,R)d\alpha = N(R) + 2 \sum_{2\leqslant Q'\leqslant R} \sum_{Q\leqslant Q'}^{*} \frac{2s(Q/Q')-1}{Q'(Q+Q')} =$$

$$= 4 \sum_{2\leqslant Q'\leqslant R} \sum_{Q\leqslant Q'}^{*} \frac{s(Q/Q')}{Q'(Q+Q')} + \frac{1}{2},$$

что, с учетом равенства (14), доказывает формулу (15).

Для нахождения $D(R)$ введем параметр U, лежащий в пределах $2 \leqslant U \leqslant R$. Сумму $\sigma(R)$ представим в виде

$$\sigma(R) = \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3,$$

где

$$\sigma_1 = \sum_{Q' \leqslant R} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \frac{1}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}, \tag{16}$$

$$\sigma_2 = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant R} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \frac{[mQ + nQ' > R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}, \tag{17}$$

$$\sigma_3 = \sum_{Q' \leqslant R} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M} \\ n > U}} \frac{[mQ + nQ' \leqslant R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}. \tag{18}$$

Каждую из величин σ_1, σ_2 и σ_3 исследуем отдельно.

6 Вычисление суммы σ_1

Для матрицы $S = \left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$ через $f_S(\xi)$ будем обозначать функцию

$$f_S(\xi) = \frac{1}{(m\xi + n)((a+m)\xi + (b+n))},$$

а через $J_1(a,b,m,n)$ — интеграл

$$J_1(a,b,m,n) = \int_0^1 f_S(\xi)d\xi.$$

Лемма 8. *Пусть n — натуральное число. Тогда для суммы*

$$w_1(n) = \sideset{}{'}\sum_{b,m=1}^{n} \delta_n(bm \pm 1) \cdot J_1\left(a,b,m,n\right)$$

(под a здесь и далее подразумевается дробь $\frac{bm \pm 1}{n}$) справедлива асимптотическая формула

$$w_1(n) = 2\log^2 2 \cdot \frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right),$$

где $\psi(n)$ — функция определенная в условии леммы 5.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Поэтому будем считать, что $n \geqslant 2$. Так как

$$\frac{1}{\xi(\frac{bm\pm1}{n} + m) + (b+n)} - \frac{1}{\xi(\frac{bm}{n} + m) + (b+n)} = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{19}$$

то для суммы $w_1(n)$ можно выписать более простое представление:

$$w_1(n) = \sum_{b,m=1}^{n} \delta_n(bm \pm 1) \int_0^1 \frac{d\xi}{(\frac{b}{n} + 1)(m\xi + n)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

По лемме 5,

$$w_1(n) = 2\frac{\varphi(n)}{n^2}\sum_{b,m=1}^{n}\frac{1}{b+n}\int_0^1\frac{n\,d\xi}{(m\xi+n)^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right).$$

Подставляя в последнее равенство асимптотические формулы

$$\sum_{b=1}^{n}\frac{1}{b+n} = \log 2 + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{20}$$

$$\sum_{m=1}^{n}\int_0^1\frac{n\,d\xi}{(m\xi+n)^2} = \log 2 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

приходим к утверждению леммы. □

Следствие 1. *При любом действительном $U \geqslant 2$ для суммы*

$$W_1(U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)} J_1(a,b,m,n) \tag{21}$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_1(U) = \frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + C_1 + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right), \tag{22}$$

где

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sideset{}{'}\sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm 1)\cdot J_1\left(a,b,m,n\right) - 2\log^2 2\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2}\right). \tag{23}$$

Доказательство. Запишем сумму $W_1(U)$ в виде

$$W_1(U) = \sum_{n\leqslant U}\sideset{}{'}\sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm 1)\cdot J_1\left(a,b,m,n\right).$$

По лемме 8

$$W_1(U) = \sum_{n\leqslant U}\left(\sideset{}{'}\sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm 1)\cdot J_1\left(a,b,m,n\right) - 2\log^2 2\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2}\right) +$$
$$+2\log^2 2\sum_{n\leqslant U}\frac{\varphi(n)}{n^2} = 2\log^2 2\sum_{n\leqslant U}\frac{\varphi(n)}{n^2} + C_1 + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right).$$

Подставляя в последнее равенство формулу (3), приходим к утверждению следствия. □

Замечание 2. Аналогично проверяются равенства

$$\sideset{}{'}\sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm 1)\frac{1}{(m+n)(a+b+m+n)} = \log 2\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right),$$

$$\sideset{}{'}\sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm 1)f_S'(\xi) = -\frac{2\log 2}{(\xi+1)^2}\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right),$$

и для сумм

$$A(U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \frac{1}{(m+n)(a+b+m+n)},$$

$$B(U,\xi) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} f_S'(\xi)$$

получаются асимптотические формулы

$$A(U) = \frac{\log 2}{\zeta(2)}\left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + C_2 + O\left(\frac{\log^5 R}{U^{1/2}}\right), \tag{24}$$

$$B(U,\xi) = -\frac{2\log 2}{\zeta(2)(\xi+1)^2}\left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + C_3(\xi) + O\left(\frac{\log^5 R}{U^{1/2}}\right), \tag{25}$$

где

$$C_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left({\sum_{b,m=1}^{n}}' \frac{\delta_n(bm\pm 1)}{(m+n)(a+b+m+n)} - \log 2 \cdot \frac{\varphi(n)}{n^2}\right),$$

$$C_3(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left({\sum_{b,m=1}^{n}}' \delta_n(bm\pm 1) f_S'(\xi) + \frac{2\log 2}{(\xi+1)^2}\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2}\right). \tag{26}$$

Лемма 9. *Пусть* $\rho(x) = 1/2 - \{x\}$ *и*

$$h(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\rho(qx)}{q^2}. \tag{27}$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{h(x)}{(x+1)^2}dx = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{4}.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из определения функции $\rho(x)$ и формулы (8):

$$\int_0^1 \frac{h(x)}{(x+1)^2}dx = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2}\sum_{a=0}^{q-1}\int_{a/q}^{(a+1)/q}\left(\frac{1}{2} + a - qx\right)\frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q+1} + \ldots + \frac{1}{2q} - \log 2 + \frac{1}{4q}\right) = \sigma_0 + \frac{\zeta(2)}{4} = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{4}.$$

□

Теорема 1. *Пусть* $2 \leqslant U \leqslant R$. *Тогда для суммы*

$$\sigma_1 = \sum_{Q' \leqslant R}\ \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)}\ {\sum_{Q \leqslant Q'}}^{*} \frac{1}{(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')}$$

справедлива асимптотическая формула

$$\sigma_1 = \frac{2\log^2 2}{\zeta^2(2)}\log R\log U + \frac{1}{\zeta(2)}\left(\frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + C_1\right)\log R +$$
$$+\frac{2\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{2\log 2}\right)\log U + C_1' + O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right),$$

где константа C_1 определена рядом (23) и

$$C_1' = \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\left(\frac{2\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{2\log 2}\right) + \frac{C_1}{\zeta(2)}\right) -$$
$$-\frac{1}{\zeta^2(2)}\int_0^1 h(\xi)C_3(\xi)d\xi + \frac{C_2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}. \tag{28}$$

Доказательство. Формула суммирования

$$\sum_{0<x\leqslant q} g(x) = \int_0^q g(x)dx + \frac{1}{2}\left(g(q) - g(0)\right) - \int_0^q \rho(x)g'(x)dx,$$

примененная к функции

$$g(x) = \frac{1}{(mx+nq)((a+m)x+(b+n)q)} = \frac{1}{q^2}f_S\left(\frac{x}{q}\right),$$

приводит к равенству

$$\sum_{x=1}^{q} g(x) = \frac{1}{q}J_1(a,b,m,n) + \frac{1}{2q^2}\left(\frac{1}{(m+n)(a+b+m+n)} - \frac{1}{n(m+n)}\right) -$$
$$-\frac{1}{q^2}\int_0^1 \rho(q\xi)f_S'(\xi)d\xi.$$

Отсюда

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\sum_{x=1}^{q}\frac{1}{(mx+nq)((a+m)x+(b+n)q)} = \frac{1}{q}W_1(U) +$$
$$+\frac{1}{2q^2}(A(U) - N(U)) - \frac{1}{q^2}\int_0^1 \rho(q\xi)B(U,\xi)d\xi. \tag{29}$$

Применим полученную формулу для вычисления σ_1. Для этого предварительно преобразуем сумму σ_1:

$$\sigma_1 = \sum_{Q'\leqslant R}\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\sum_{Q=1}^{Q'}\frac{1}{(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')}\sum_{\delta|(Q,Q')}\mu(\delta) =$$
$$= \sum_{Q'\leqslant R}\sum_{\delta|Q'}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\sum_{x=1}^{Q'/\delta}\frac{1}{(mx+nQ'/\delta)((a+m)x+(b+n)Q'/\delta)}.$$

По формуле (29)

$$\sigma_1 = \sum_{Q'\leqslant R}\sum_{\delta|Q'}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\left(\frac{\delta}{Q'}W_1(U)+\frac{\delta^2}{2(Q')^2}(A(U)-N(U))+\frac{\delta^2}{(Q')^2}\int\limits_0^1\rho\left(\frac{Q'\xi}{\delta}\right)B(U,\xi)d\xi\right)=$$

$$=W_1(U)\sum_{Q'\leqslant R}\frac{\varphi(Q')}{(Q')^2}+\frac{1}{2}(A(U)-N(U))-\frac{1}{\zeta(2)}\int\limits_0^1 h(\xi)B(U,\xi)d\xi+O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right),$$

где функция $h(x)$ определена равенством (27).

Подставляя в последнее равенство асимптотические формулы для входящих в нее величин (формулы (22), (24), (10), (25)) и применяя лемму 9, получаем утверждение теоремы.

□

7 Вычисление суммы σ_2

Для матрицы $S=\left(\begin{smallmatrix}a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}$ через $J_2(a,b,m,n)$ будем обозначать интеграл

$$J_2(a,b,m,n)=\int_0^1\frac{\log(m\xi+n)d\xi}{(m\xi+n)((a+m)\xi+(b+n))}.$$

Лемма 10. *Пусть n — натуральное число. Тогда для суммы*

$$w_2(n)={\sum_{b,m=1}^{n}}'\delta_n(bm\pm1)\cdot J_2\left(\frac{bm\pm1}{n},b,m,n\right)$$

справедлива асимптотическая формула

$$w_2(n)=2\log^2 2\cdot\frac{\varphi(n)\log n}{n^2}+\log^2 2\left(2+\log 2-\frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\frac{\varphi(n)}{n^2}+O\left(\frac{\psi(n)\log(n+1)}{n^{3/2}}\right),$$

где $\psi(n)$ — функция определенная в условии леммы 5.

Доказательство. При $n=1$ утверждение леммы очевидно. Поэтому будем считать, что $n\geqslant 2$. Из равенства (19) следует, что

$$w_2(n)=\int_0^1 d\xi\sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm1)\frac{\log(m\xi+n)}{(1+\frac{b}{n})(m\xi+n)^2}+O\left(\frac{\log(n+1)}{n^3}\right).$$

Применяя лемму 5, находим

$$w_2(n)=2\frac{\varphi(n)}{n^2}\int_0^1 d\xi\sum_{b=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{b}{n}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\log(m\xi+n)}{(m\xi+n)^2}+O\left(\frac{\psi(n)\log(n+1)}{n^{3/2}}\right)=$$

$$=2\log 2\frac{\varphi(n)}{n}\int_0^1 d\xi\int_0^n dm\frac{\log(m\xi+n)}{(m\xi+n)^2}+O\left(\frac{\psi(n)\log(n+1)}{n^{3/2}}\right)=$$

$$=2\log 2\frac{\varphi(n)}{n^2}\int_0^1 d\xi\int_0^1 dz\frac{\log n+\log(z\xi+1)}{(z\xi+1)^2}+O\left(\frac{\psi(n)\log(n+1)}{n^{3/2}}\right).$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться равенствами

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{d\xi\,dz}{(z\xi+1)^2} = \log 2, \quad \int_0^1\int_0^1 \frac{\log(z\xi+1)d\xi\,dz}{(z\xi+1)^2} = \frac{\log 2}{2}\left(2+\log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right).$$

□

Аналогично следствию 1, из лемм 2 и 10 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *При любом действительном $U \geqslant 2$ для суммы*

$$W_2(U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)} J_2(a,b,m,n)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_2(U) = \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(2+\log 2-\frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\log U + C_4 + O\left(\frac{\log^6 U}{U^{1/2}}\right),$$

где

$$C_4 = \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(2+\log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + 2\log^2 2\cdot C_0 + C_4',$$

C_0 — константа из леммы 2 и C_4' — сумма ряда

$$C_4' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(w_2(n) - 2\log^2 2\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2}\left(\log n + 2 + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\right). \tag{30}$$

Теорема 2. *Пусть $2 \leqslant U \leqslant R$. Тогда для суммы σ_2, заданной равенством (17), справедлива асимптотическая формула*

$$\sigma_2 = \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)}\cdot\log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(2+\log 2-\frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\log U + \frac{C_4}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right) + O\left(\frac{U\log R}{R}\right),$$

где C_4 — константа из следствия 2.

Доказательство. Применяя к внутренней сумме по переменной Q лемму 4, находим

$$\sigma_2 = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\sum_{Q'\leqslant R}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\frac{[mQ+nQ'>R]}{(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')} =$$

$$= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\sum_{Q'\leqslant R}\frac{\varphi(Q')}{Q'}\sum_{Q\leqslant Q'}\frac{[mQ+nQ'>R]}{(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')} + O\left(\frac{U\log R}{R}\right).$$

Заменяя сумму по переменной Q на интеграл и делая замену переменной $Q = \xi Q'$, получаем

$$\sigma_2 = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\sum_{Q'\leqslant R}\frac{\varphi(Q')}{(Q')^2}\int_0^1\frac{[m\xi+n>R/Q']}{(m\xi+n)((a+m)\xi+b+n)} + O\left(\frac{U\log R}{R}\right).$$

Далее так как

$$\sum_{Q'\leqslant R}\frac{\varphi(Q')}{(Q')^2}[m\xi+n>R/Q'] = \sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\sum_{Q'\leqslant R/\delta}\frac{[m\xi+n>R/(\delta Q')]}{Q'} =$$
$$= \sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\left(\log(m\xi+n)+O\left(\frac{n\delta}{R}\right)\right) = \frac{\log(m\xi+n)}{\zeta(2)}+O\left(\frac{n\log R}{R}\right),$$

то

$$\sigma_2 = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\int_0^1\frac{\log(m\xi+n)d\xi}{(m\xi+n)((a+m)\xi+(b+n))}+O\left(\frac{U\log R}{R}\right).$$

Применяя следствие 2, приходим к утверждению теоремы. □

8 Вычисление суммы σ_3

Лемма 11. *При $N\geqslant 2$ для суммы*

$$F^*(N) = \sum_{n<N}\sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant n}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right) - \sum_{n<N}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ m+n>N}}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{m+n}\right)$$

справедлива асимптотическая формула

$$F^*(N) = \frac{\log 2}{\zeta(2)}(\log N+H)+O\left(\frac{\log^2 N}{N}\right), \tag{31}$$

где

$$H = \gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}+\frac{\log 2}{2}-1. \tag{32}$$

Доказательство. Подстановка $x=1$ в лемму 10 из работы [6] приводит к равенству (31) с константой

$$H = \gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-\frac{\log 2}{2}-1+\frac{1}{\log 2}\left(\sigma_0+\frac{\zeta(2)}{2}\right),$$

где σ_0 задается рядом (7). Подставляя в последнюю формулу значение σ_0 из (8), приходим к утверждению леммы. □

Теорема 3. *Пусть $2\leqslant U\leqslant R$. Тогда для суммы σ_3, заданной равенством (18), справедлива асимптотическая формула*

$$\sigma_3 = \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)}\cdot\log\frac{R}{U}\left(\log\frac{R}{U}+2H\right)+O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right),$$

где константа H задана равенством (32).

Доказательство. Так как для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}$

$$\frac{1}{(a+m)Q+(b+n)Q'}-\frac{1}{(\frac{bm}{n}+m)Q+(b+n)Q'} \ll \frac{1}{n^3Q'}$$

и
$$\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix}a&m\\b&n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}\\ n>U}}\frac{1}{n^4(Q')^2}\ll\frac{\log R}{U^2},$$
то сумму σ_2 можно переписать в виде
$$\sigma_3=\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\sum_{n>U}\sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm 1)\frac{[mQ+nQ'\leqslant R]}{(b/n+1)(mQ+nQ')^2}+O\left(\frac{\log R}{U^2}\right).$$
Применяя лемму 5, находим
$$\sigma_3=2\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\sum_{n>U}\frac{\varphi(n)}{n}\sum_{b=1}^{n}\frac{1}{b+n}\sum_{m=1}^{n}\frac{[mQ+nQ'\leqslant R]}{(mQ+nQ')^2}+O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right).$$
Далее, по формуле (20)
$$\sigma_3=2\log 2\cdot\sigma_4+O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right), \tag{33}$$
где
$$\sigma_4=\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\sum_{n>U}\frac{\varphi(n)}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{[mQ+nQ'\leqslant R]}{(mQ+nQ')^2}=$$
$$=\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\sum_{U<n\leqslant\frac{R}{Q+Q'}}\frac{\varphi(n)}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(mQ+nQ')^2}+$$
$$+\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\sum_{\max\left\{U,\frac{R}{Q+Q'}\right\}<n\leqslant\frac{R}{Q'}}\frac{\varphi(n)}{n}\sum_{m\leqslant\frac{R-nQ'}{Q}}\frac{1}{(mQ+nQ')^2}.$$
Заменяя внутренние суммы по переменной m на соответствующие интегралы, получаем
$$\sigma_4=\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\sum_{U<n\leqslant\frac{R}{Q+Q'}}\frac{\varphi(n)}{n}\cdot\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{nQ}-\frac{1}{nQ+nQ'}\right)+$$
$$+\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\sum_{\max\left\{U,\frac{R}{Q+Q'}\right\}<n\leqslant\frac{R}{Q'}}\frac{\varphi(n)}{n}\cdot\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{nQ}-\frac{1}{R}\right).$$
Делая суммирование по n внешним, приходим к равенству
$$\sigma_4=\sum_{U<n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}\cdot F^{*}\left(\frac{R}{n}\right)+O\left(\frac{\log R}{U}\right)+O\left(\frac{\log R}{U}\right),$$
где
$$F^{*}(\xi)=\sum_{Q'<\xi}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{Q'}-\frac{1}{Q+Q'}\right)[\xi\geqslant Q+Q']+\sum_{Q'<\xi}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{Q'}-\frac{1}{\xi}\right)[\xi<Q+Q'].$$
По лемме 11
$$\sigma_4=\frac{\log 2}{\zeta(2)}\sum_{U<n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}\left(\log\frac{R}{n}+H\right)+O\left(\frac{\log^3 R}{U}\right).$$

Далее, пользуясь формулами леммы 2, получаем следующую асимптотическую формулу для суммы σ_4:
$$\sigma_4 = \frac{\log 2}{2\zeta^2(2)} \log\frac{R}{U}\left(\log\frac{R}{U} + 2H\right) + O\left(\frac{\log^3 R}{U}\right).$$
Подставляя ее в равенство (33), приходим к утверждению теоремы. □

9 Основной результат

Теорема 4. *При* $R \geqslant 2$
$$D(R) = D_1 \cdot \log R + D_0 + O(R^{-1/3}\log^5 R),$$
где
$$D_1 = \frac{8\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log 2}{2} - 1\right) + \frac{4}{\zeta(2)}\left(C_1 + \frac{3\log 2}{2}\right),$$
$$D_0 = 4\left(C_1' - \frac{C_4}{\zeta(2)}\right) - \left(\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \log 2\right) - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$
а константы C_1, C_1' *и* C_4 *определены соответственно равенствами (23), (28) и (30).*

Доказательство. Объединяя результаты теорем 1, 2 и 3, для суммы $\sigma(R) = \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3$ получаем асимптотическую формулу
$$\sigma(R) = \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)}\log^2 R + \frac{\log R}{\zeta(2)}\left(\frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \frac{\log 2}{2} - 1\right) + C_1\right) +$$
$$+ C_1' - \frac{C_4}{\zeta(2)} + O\left(\frac{U\log R}{R}\right) + O\left(\frac{\log^6 R}{U^{1/2}}\right). \qquad (34)$$
Выбирая $U = R^{2/3}\log^4 R$ и применяя леммы 6, 7 приходим к утверждению теоремы. □

Замечание 3. Компьютерные вычисления дают следующее приближенное значение константы D_1:
$$D_1 = 0.51606\ldots$$

Замечание 4. Равенство (34) из доказательства теоремы 4 дает асимптотическую формулу с тремя значащими членами для суммы из (15).

Замечание 5. Константа C_1, определенная равенством (23), возникает также при усреднении $N(\alpha, R)$ по мере Гаусса
$$d\mu(\alpha) = \frac{1}{\log 2}\frac{d\alpha}{1+\alpha}.$$
Действительно, непосредственные вычисления, основанные на представлении (11), приводят к равенству
$$\frac{1}{\log 2}\int_0^1 N(\alpha, R)\frac{d\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{\log 2}W_1(R),$$
где $W_1(R)$ — сумма определенная формулой (21). Значит, согласно следствию из леммы 8,
$$\frac{1}{\log 2}\int_0^1 N(\alpha, R)\frac{d\alpha}{1+\alpha} = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\log R + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \frac{C_1}{\log 2} + O\left(R^{-1/2+\varepsilon}\right).$$

Список литературы

[1] Авдеева, М. О. *О статистиках неполных частных конечных цепных дробей.* — Функц. анализ и его прил., 2004, т. 38, вып. 2, 1–11.

[2] Арнольд И. В. *Теория чисел.* — Госуд. учебно-педагогическое изд-во Наркомпроса РСФСР, 1939.

[3] Быковский В. А. *Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей.* — ФПМ, т. 11, вып. 6, 2005, 15–26.

[4] Виноградов И. М. *Основы теории чисел.* — М.: Наука, 1972.

[5] Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* — М.: Мир, 1998.

[6] Устинов А. В. *О статистических свойствах конечных цепных дробей.* — Записки научн. семин. ПОМИ, т. 322, СПб., 2005, 186–211.

[7] Устинов А. В. *О статистиках Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей.* — Фунд. и прикл. математика, т. 11, 2005, 195–208.

[8] Хинчин А. Я. *Цепные дроби.* — М.: Наука, 1978.

[9] Estermann T. *On Kloosterman's sum.* — Mathematika, 1961, v. 8, 83–86.

[10] Finch S. R. *Mathematical constants*, (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 94.) — Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[11] Baladi, V., Vallée, B. *Euclidean algorithms are Gaussian.* — J. Number Theory, v. 110, 2005, 331-386.

[12] Heilbronn H. *On the average length of a class of finite continued fractions.* — in Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Berlin, VEB, 1968, 89–96.

[13] Knuth D. E. *Evaluation of Porter's Constant.* — Comp. and Maths. with Appls., v. 2, 1976, 137–139.

[14] Porter J. W. *On a theorem of Heilbronn.* — Mathematika, 1975, v. 22, № 1, 20–28.

Хабаровское отделение Института прикладной математики
Дальневосточного отделения Российской академии наук
ustinov@iam.khv.ru