

© А. В. Устинов¹

К теореме Вороного о цилиндрических минимумах трехмерных решеток

Алгоритм Вороного для поиска единиц в комплексных кубических полях основан на геометрических свойствах трехмерных решеток. Ключевую роль в алгоритме играет теорема Вороного о цилиндрических минимумах решеток общего положения. В оригинальном доказательстве теоремы Вороного и ее переизложении, данном Делоне и Фаддеевым, часть содержательных случаев не была разобрана. В предлагаемой работе дается полное доказательство теоремы Вороного. Кроме того, теорема распространяется на случай произвольных решеток.

Ключевые слова: *решетка, алгоритм Вороного.*

Введение

В 1896 году Г. Ф. Вороной защитил докторскую диссертацию [1] «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей», в которой построил алгоритмы для вычисления основных единиц общего кубического поля как для случая отрицательного, так и для случая положительного дискриминанта. Существовавшие до этого обобщения алгоритма непрерывных дробей (принадлежавшие Эйлеру, Якоби, Гурвицу, Пуанкаре, Дирихле, Эрмиту) не решали подобных задач полностью. В книге [3], где подробно рассказывается о диссертации Вороного, Б. Н. Делоне пишет: «Вороной входит во все подробности рассматриваемых вопросов и добивается наиболее совершенного их решения в смысле вычислительном, причем во второй работе (докторской диссертации, прим. А. У.) он дает замечательные геометрические теоремы о решетках».

Настоящая работа посвящена одной из теорем Вороного, а именно теореме о цилиндрических минимумах трехмерных решеток, на которой основан алгоритм для вычисления основных единиц кубического поля отрицательного дискриминанта. Наряду с оригинальным алгебраическим доказательством этой важной теоремы (см. [1]) существует его наглядный геометрический вариант (см. [3]). «... Вороной, несомненно, уже в этой диссертации мыслил и находил свои результаты геометрически. Но в то время геометрия была в Петербурге, особенно в вопросах теории чисел, не в фаворе. Марков, который был главным оппонентом Вороного, не пропустил бы в то время диссертации по теории чисел, пользующейся геометрическим методом... Вороному приходилось поэтому думать геометрически, а затем переписывать все на чисто арифметический язык, не оставляя никаких следов геометрии, что конечно, всегда можно сделать» (см. [3, стр. 213]). Оба доказательства приводят к значительному перебору. Причиной для их пересмотра стало то обстоятельство, что один

¹Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: ustinov.alexey@gmail.com

случай (по-видимому самый сложный и требующий дополнительных соображений) в обоих доказательствах опущен (см. последнюю часть доказательства теоремы 2, посвященную исследованию точки K). Кроме того, в [1] и [3] теорема Вороного доказывалась только для решеток общего положения, однако она оказывается необходимой и при изучении трехмерных целочисленных решеток (см. [4]). В предлагаемой статье доказывается, что результат Вороного остается справедливым и для произвольных решеток. По сравнению с доказательствами из [1] и [3] количество перебираемых случаев уменьшено и каждый из них разобран подробно.

Автор благодарит А. А. Илларионова за указания на недочеты в первоначальной версии статьи.

1. Постановка задачи

Будем следовать определениям и обозначениям из работы [3]. Пусть в трехмерном пространстве $Oxyz$ имеется полная решетка Λ и $M \neq 0$ есть примитивная точка решетки Λ (отрезок OM не содержит точек решетки, отличных от его концов), лежащая выше плоскости Oxy . Будем предполагать, что ортогональная проекция точки M на плоскость Oxy лежит на оси Ox и имеет положительную абсциссу. Все точки решетки лежат на прямых, параллельных OM (*параллелях*), причем на каждой параллели соседние точки решетки лежат на расстоянии OM друг от друга. Параллели пересекают плоскость Oxy в точках некоторой двумерной решетки S . Точку решетки S будем называть *основанием* соответствующей параллели. Отрезок параллели от основания до первой (лежащей не ниже плоскости Oxy) точки решетки Λ будем называть *гвоздиком*, а первую точку решетки — *шапочкой* этого гвоздика. Основание параллели будем также называть основанием соответствующего гвоздика.

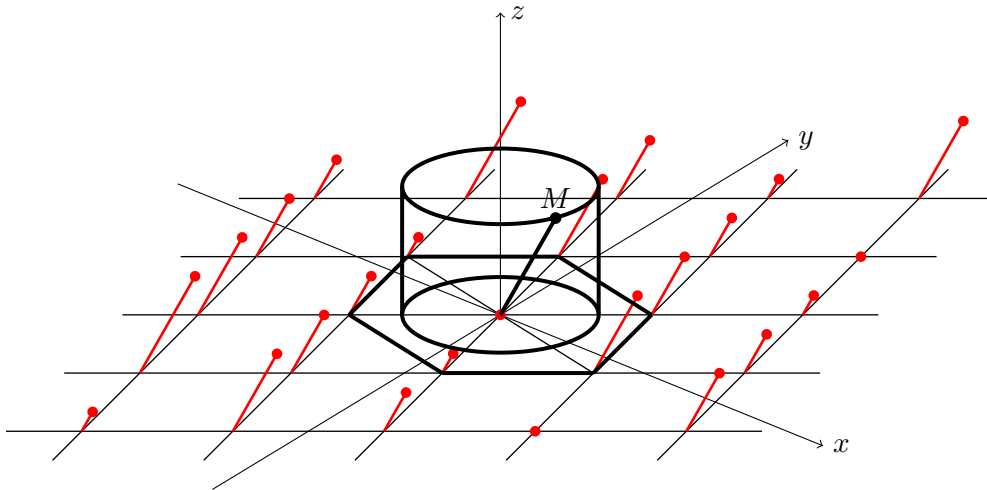


Рис. 1

Замечание 1. В работе [3] предполагалось, что Λ — решетка общего положения, т. е. что у Λ на оси Oz и на плоскости Oxy нет точек, отличных от O , и, кроме того, в решетке Λ нет точек с одинаковым значением параметра $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (кроме точек, симметричных друг другу относительно начала координат). Эти предположения справедливы в рамках задачи о построении основных единиц кубического поля отрицательного дискриминанта. Мы не накладываем никаких ограничений на решетку Λ . В частности, гвоздики могут иметь нулевую длину.

На решетке S определим *первый шестиугольник Зеллинга*, как шестиугольник, составленный из 6 остроугольных (или прямоугольных) примитивных треугольников решетки Λ , сходящихся в начале координат (второй, третий и т. д. получаются из первого с помощью гомотетии с центром в начале координат и коэффициентами $2, 3, \dots$ соответственно). Определим *основной остроугольный треугольник (приведенный треугольник Зеллинга)* как тот из 6 треугольников, сходящихся в O , который охватывает отрицательное направление оси Ox .

Существуют два случая (будем называть их вырожденными), когда возникает неоднозначность в выборе основного треугольника. Так бывает в случае прямоугольной решетки или если не существует треугольника, охватывающего отрицательное направление оси Ox (то есть два треугольника примыкают к оси Ox). Договоримся, что из возможных треугольников будет выбираться тот, у которого сторона, находящаяся напротив вершины O , является более короткой (см. рис. 11 и 13). Если и это условие не определяет основной треугольник однозначно, то будем выбирать любой из двух треугольников, удовлетворяющих указанным условиям. В дальнейшем окажется, что теорема Вороного в вырожденных случаях верна независимо от выбора основного треугольника (см. замечание 3).

Пусть вершины выбранного треугольника суть точки O, A и B . Будем называть *точками Вороного* узлы $A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 1), D(-1, 0), E(0, -1), F(1, -1)$ и $N(1, 1)$ (здесь координаты даны в базисе (\vec{OA}, \vec{OB})), а *шапочками Вороного* — шапочки семи соответствующих гвоздиком (см. рис. 1). Ту из семи шапочек Вороного, которая имеет наименьшее расстояние ρ до оси Oz , будем называть *приведенной шапочкой Вороного*.

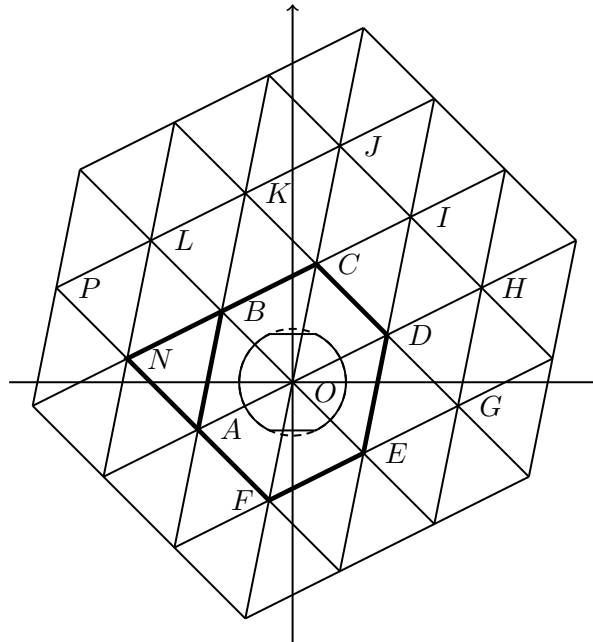


Рис. 2

Прямой круговой (замкнутый) цилиндр, ось которого совпадает с осью Oz , центр находится в начале координат O , а окружность одного из оснований проходит через данную точку M , будем называть *норменным цилиндром* точки M (см. рис. 1). Этот цилиндр представляет собой совокупность точек, у которых модули координат $x + iy$ и z не превышают модулей соответствующих координат точки M .

Точка M решетки Λ называется *относительным (цилиндрическим) минимумом*, если ее норменный цилиндр не содержит других точек решетки, отличных от O и точек на границах оснований. В дальнейшем будем предполагать, что точка M — относительный

минимум, не лежащий на плоскости Oxy . Если увеличивать радиус норменного цилиндра точки M и не менять его высоты, то боковая то боковая поверхность наткнется на некоторую точку решетки Λ , которая называется *соседним* с M относительным минимумом в сторону возрастания параметра ρ . Аналогично, если M не лежит на оси Oz , определяется соседний с M минимум в сторону убывания ρ (цилиндр вытягивается вверх).

Алгоритм Вороного для отыскания последовательных цилиндрических минимумов решетки Λ основан на следующей теореме (см. [3, стр. 211]).

Теорема 1. *Если приведенная шапочка Вороного \widetilde{M} , соответствующая примитивной точке M решетки Λ , лежит вне норменного цилиндра точки M , то M есть относительный минимум решетки и \widetilde{M} есть соседний в сторону возрастания ρ относительный минимум. Если же \widetilde{M} лежит в норменном цилиндре точки M , то M — не относительный минимум, и найдена точка \widetilde{M} , лежащая внутри норменного цилиндра точки M .*

Пусть r — радиус норменного цилиндра точки M , T_r — сам цилиндр, $R \geq r$ и T_R — цилиндр, полученный из T_r увеличением радиуса основания до R . Теорема Вороного будет доказана в следующей (эквивалентной) формулировке.

Теорема 2. *Пусть цилиндр T_R не содержит шапочек Вороного. Тогда он не содержит и других точек решетки Λ , отличных от начала координат, и точек, лежащих на границах оснований T_r .*

Для доказательства эквивалентности теорем 1 и 2 достаточно рассмотреть случай, когда приведенная шапочка лежит вне цилиндра T_r и в качестве R взять расстояние от приведенной шапочки Вороного до оси Oz .

Подчеркнем, что теоремы 1 и 2 выполняются для произвольных решеток, а не только для решеток общего положения. Сначала теорема 2 будет доказана в рамках предположений, сделанных для вырожденных случаев. Затем будет объяснено почему теорема остается справедливой, если неопределенности разрешаются произвольным образом.

2. Вспомогательные обозначения и утверждения

Для всякой точки A решетки S через \overline{A} будем обозначать шапочку гвоздика с основанием A , а через A' — ортогональную проекцию \overline{A} на плоскость Oxy . Множество проекций всех шапочек обозначим через S' . Напомним, что при ортогональной проекции на плоскость Oxy точка M проецируется в точку $(r, 0)$ ($r > 0$). Поэтому все векторы вида AA' направлены вдоль положительного направления оси Ox и имеют длину строго меньшую, чем r .

Замечание 2. Из определения множества S' следует, что вдоль каждой прямой, проходящей через точки решетки S , длины проекций гвоздиков (длины отрезков вида AA') по модулю r образуют арифметическую прогрессию. При этом для всех прямых фиксированного направления разности соответствующих арифметических прогрессий будут равны друг другу.

Через a обозначим длину кратчайшего вектора решетки S , а через h — наименьшую высоту в приведенном треугольнике Зеллинга.

Лемма. *Пусть приведенная шапочка Вороного не лежит в цилиндре T_R . Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Область (см. рис. 3)

$$Z = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, |y| \leq \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}} \right\}$$

не содержит ненулевых узлов решетки S .

2) Длина кратчайшего вектора решетки S удовлетворяет неравенству $a > \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}}$.

- 3) По крайней мере две стороны основного треугольника Зеллинга не меньше R .
- 4) Если шапочка некоторого гвоздика попадает в цилиндр T_R , то основание этого гвоздика должно лежать в области (см. рис. 4)

$$\Omega = \left\{ (x, y) \notin Z : x^2 + y^2 \leq R^2 \vee (x+r)^2 + y^2 < R^2 \vee (x, y) \in (-r, 0] \times [-R, R] \right\}.$$

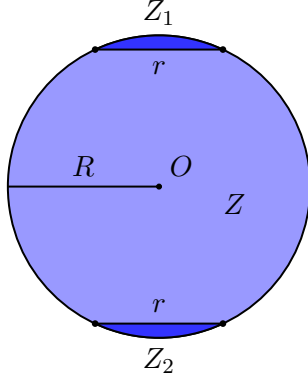


Рис. 3

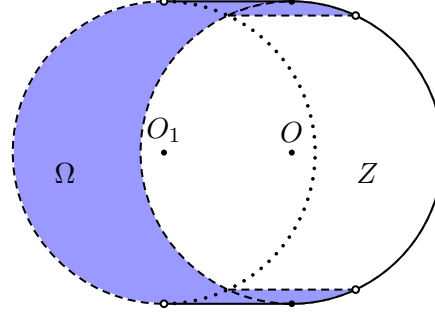


Рис. 4

Доказательство. Заметим, что первое утверждение леммы достаточно проверить только для точек первого шестиугольника Зеллинга.

Действительно, этого будет достаточно для доказательства второго утверждения леммы. (Кратчайший вектор решетки — это расстояние от начала координат до одной из вершин первого шестиугольника, а все точки за пределами области Z лежат на расстоянии большем чем $\sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}}$ от начала координат.) Тогда все точки второго шестиугольника Зеллинга (и шестиугольников с большими номерами) будут лежать не ближе, чем на расстоянии $\sqrt{2}a > \sqrt{\frac{3}{2}}R > R$ от начала координат, а значит, не смогут принадлежать Z .

Согласно замечанию 2, для всякого узла $A = (x, y)$ решетки S точки $(\pm A)'$ имеют вид $A' = (x + \theta_1 r, y)$, $(-A)' = (-x + \theta_2 r, -y)$, где $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 1$, $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \pmod{1}$. Сумма первых координат точек $(\pm A)'$ равна 0 или r . Значит, одна из этих координат не превосходит $r/2$. Поэтому если $\pm A \in Z$, то одна из точек $(\pm A)'$ (а именно точка с наименьшей абсциссой) также будет лежать в Z , что приведет к противоречию с предположением леммы.

Для доказательства третьего утверждения леммы предположим, что две стороны основного треугольника Зеллинга OAB меньше R . Тогда одна из сторон OA , OB меньше R . Без ограничения общности будем считать, что $OA < R$. Значит, точка A лежит в сегменте (см. рис. 3)

$$Z_1 = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 < R^2, y > \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}} \right\}.$$

Тогда получается, что $AB \geq R$ и $OB \geq R$, поскольку точка B лежит не выше оси Ox , находится вне Z и треугольник OAB не тупоугольный.

Четвертое утверждение леммы следует из того, что основание гвоздика не может лежать в Z , но должно попасть в круг $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ после сдвига на вектор $(r\theta, 0)$ ($0 \leq \theta < 1$).

3. Доказательство теоремы Вороного

По предположению теоремы, ни одна из шапочек Вороного не лежит в цилиндре T_R . Значит, выполняется предположение леммы и можно использовать все ее утверждения.

Так как $R \geq r$, то из второго утверждения леммы следует, что $a > R\sqrt{3}/2$. В оценках также будем пользоваться тем, что длина h кратчайшей высоты в основном треугольнике удовлетворяет неравенству $h \geq a/\sqrt{2}$.

Расстояние от начала координат до периметра четвертого шестиугольника Зеллинга (и шестиугольника с бóльшими номерами) не меньше $4h \geq 2\sqrt{2}a > 2R$. Поэтому точки всех шестиугольников, начиная с четвертого, не могут лежать в области Ω . Так же можно исключить и точки третьего шестиугольника: расстояние до вершин не меньше $3a > 2R$, а расстояния до точек на сторонах шестиугольника не меньше $\sqrt{R^2 + 4a^2} > 2R$ (достаточно применить теорему косинусов в $\triangle AOP$ и воспользоваться третьим утверждением леммы).

Остается рассмотреть точки на втором шестиугольнике Зеллинга. Из-за симметричности ситуации достаточно рассмотреть точки G, H, I, J, K, L . Точки G и H (см. рис. 2) могут лежать только в первой и четвертой координатных четвертях. Расстояние от начала координат до этих точек не меньше $2h \geq \sqrt{2}a > R$, значит, они не могут лежать в Ω . Аналогично исключаются точки I, J , если они находятся в первой координатной четверти. Если же они попадают во вторую координатную четверть, то, рассматривая $\triangle OJL$, получаем, что ордината точки J не меньше высоты, опущенной на сторону OL (см. рис. 5), т. е. не меньше $2h \geq \sqrt{2}a > R$; рассматривая $\triangle IBE$, получаем, что ордината точки I также не меньше высоты, опущенной из точки I (см. рис. 6), т. е. не меньше $2h \geq \sqrt{2}a > R$. Следовательно, находясь во второй координатной четверти, точки I, J тоже не могут лежать в Ω .

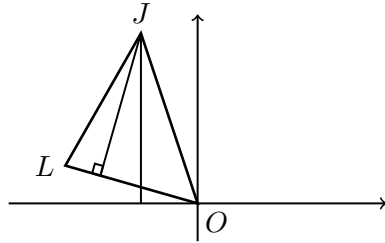


Рис. 5

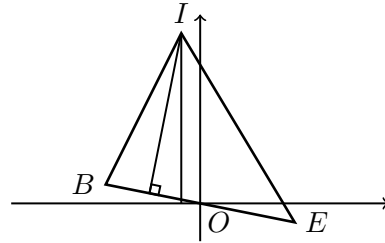


Рис. 6

Рассмотрим точку L . Если $BO \geq R$, то $LO \geq 2R$, и $L \notin \Omega$. Если же $BO < R$, то $B \in Z_1$, и ордината точки B не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}R$. Следовательно ордината точки L не меньше $\sqrt{3}R > R$, и снова получаем, что $L \notin \Omega$.

Остается рассмотреть точку K . Предположим, что $\bar{K} \in T_R$, и покажем, что одна из шапочек Вороного также будет обладать этим свойством. Заметим, что в $\triangle AOB$ только сторона AB может быть меньше R . Действительно, $K \in \Omega$, значит $B \notin Z_1$ (B — середина AK , а точка A лежит не выше оси Ox). Кроме того, $A \notin Z_2$ (Z_2 — область, симметричная Z_1 относительно начала координат, см. рис. 3), т. к. область, симметричная Z_2 относительно O_1 , не имеет общих точек с Ω . Поэтому, если предположить, что $A \in Z_2$, то получится, что точка K (симметричная точке A относительно точки B) не лежит в Ω .

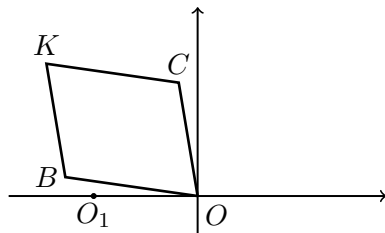


Рис. 7

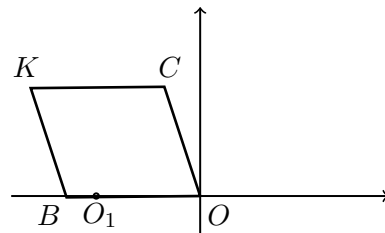


Рис. 8

Предположим сначала, что $AB \geq R$. Тогда параллелограмм $OBKC$ составлен из двух треугольников, все стороны которых не меньше R , т. е. $OK \geq \sqrt{2}R$. Расстояние O_1K не увеличится, если параллелограмм повернуть так, чтобы точка B попала на ось Ox (см. рис. 7–8). А после поворота $KO_1 \geq KB \geq R$. Из неравенств $KO_1 \geq R$, $KO \geq \sqrt{2}R$ следует, что $K \notin \Omega$.

Предположим теперь, что $AB < R$. В этом случае нельзя однозначно предъявить шапочку Вороного, которая лежала бы в T_R , но одна из шапочек \bar{B} , \bar{F} обязательно будет обладать этим свойством. Неравенство $AB < R$ означает, что $C \in Z_1$, $F \in Z_2$. Согласно замечанию 2, возможны два варианта:

$$1) BB' = KK' + FF'; \quad 2) BB' = KK' + FF' - r.$$

В первом случае $BB' \geq KK'$, $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OF'} \in Z_2$. Ордината K' не меньше ординаты C , значит, $K' \in Z_1$. Записывая вектор $\overrightarrow{OB'}$ в виде

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OK'} - \overrightarrow{KK'} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OK'} + \overrightarrow{KB} + (\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{KK'}),$$

получаем, что B' лежит в области (множества складываются по Минковскому)

$$(Z_1 + Z_2 + [0, r]) \cap \{y \geq 0, (x - r)^2 + y^2 > R^2\}, \quad (1)$$

содержащейся в Z , следовательно $\bar{B} \in T_R$ (см. рис. 9).

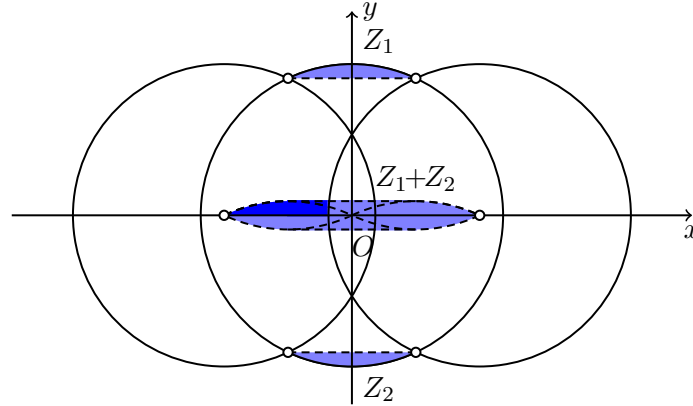


Рис. 9

На рисунке закрашена область $Z_1 + Z_2$ и дополнительно выделена подобласть, которая выделяется условиями $y \geq 0$, $(x - r)^2 + y^2 > R^2$.

Во втором случае $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OK'} + \overrightarrow{OF'} - (r, 0)$. Если предположить, что $\bar{F} \notin T_R$, то получаем, что $K' \in Z_1$, $\bar{F}' \in Z_3$, где (см. рис. 10)

$$Z_3 = \left\{ x^2 + y^2 > R, x > 0, -R \leq y < -\sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}}, (x - r)^2 + y^2 \leq R^2 \vee x \leq r \right\}.$$

Следовательно, B' лежит в области

$$(Z_1 + Z_3 + [-r, 0]) \cap \{y \geq 0, (x - r)^2 + y^2 \geq R^2\} \subset \Omega,$$

которая совпадает с областью (1). На рис. 10 закрашены области Z_1 , Z_3 , $Z_1 + Z_3$. Таким образом, и в оставшемся случае $\bar{B} \in T_R$.

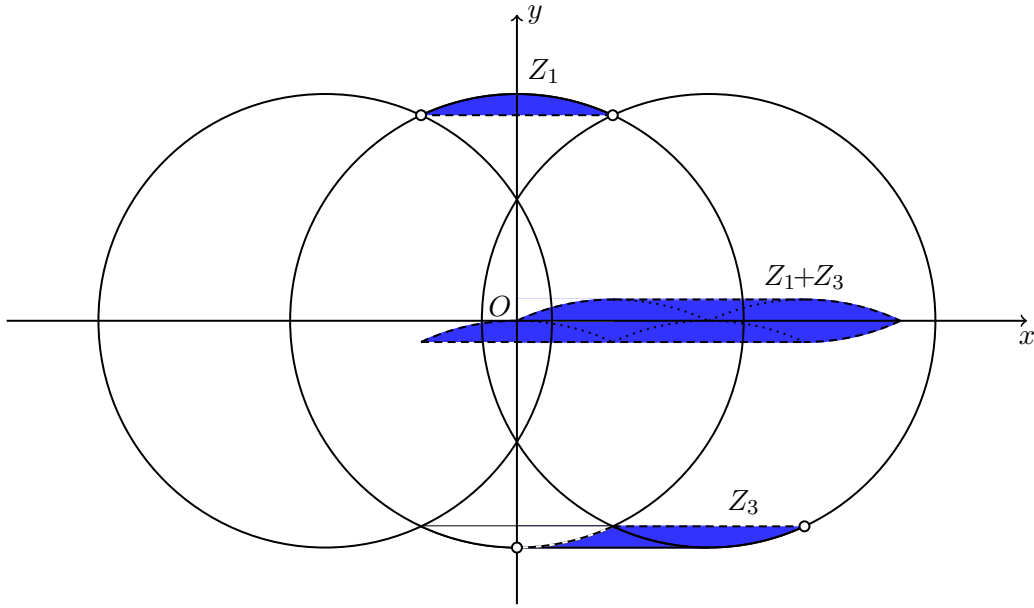


Рис. 10

Замечание 3. Оказывается, что в вырожденных случаях шапочку \bar{N} можно не рассматривать. Действительно, если решетка прямоугольная, то, согласно договоренности, ось Ox пересекает один из катетов треугольника OAB (см. рис. 11). В новом базисе (см. рис. 12) точка $N = P'$ лежит уже на третьем шестиугольнике Зеллинга и не может находиться в области Ω .

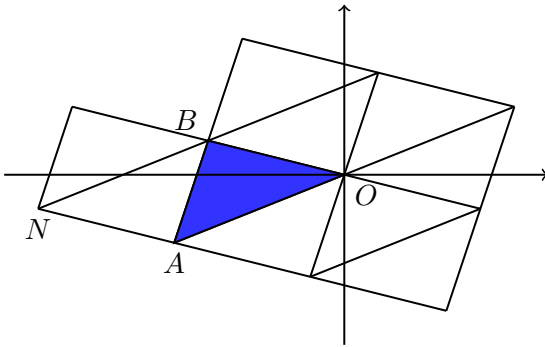


Рис. 11

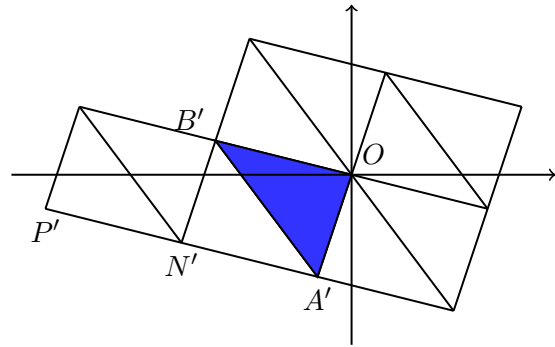


Рис. 12

Если основной треугольник остроугольный (см. рис. 13), то, согласно договоренности, кратчайшей стороной в треугольнике OAB будет либо AB либо OA . Значит, $AO \geq R$ (в первом случае согласно третьему утверждению леммы, а во втором — поскольку $A \notin Z$). Из неравенств $NA \geq R$ и $ON > \sqrt{2}R$ следует, что $N \notin \Omega$ (ситуация аналогична рассмотренной на рис. 8).

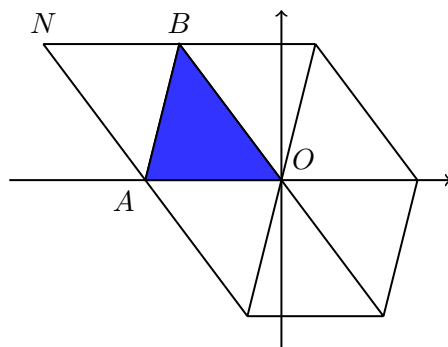


Рис. 13

Таким образом в вырожденных случаях множество точек Вороного можно сузить до вершин первого шестиугольника Зеллинга. Если же придерживаться основной формулировки теоремы Вороного, когда приведенная шапочка выбирается из 7 шапочек Вороного, то получается, что выбор основного треугольника Зеллинга можно делать произвольно.

Список литературы

- [1] Г. Вороной, *Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей*, Типография Варшавского Учебного Округа, Варшава, 1896.
- [2] Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, *Теория иррациональностей третьей степени*, изд-во АН СССР, М.–Л., 1940.
- [3] Б. Н. Делоне, *Петербургская школа теории чисел*, изд-во АН СССР, М.–Л., 1947.
- [4] А. А. Илларионов, “О цилиндрических минимумах трехмерных решеток”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1, (2011), 48–55.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 10 августа 2011 г.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МД-2339.2010.1, фонда «Династия», фонда РФФИ, гранты № 11-01-12004-офи-м-2011, 10-01-98001-р-сибирь-а, 09-01-00371-а, проекта ДВО РАН № 09-И-П4-03.

Ustinov A. V. On Voronoi’s cylindric minima theorem. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 2. P. 213–221.

ABSTRACT

Voronoi’s algorithm for computing a system of fundamental units of a complex number field is based on a geometric properties of 3-dimensional lattices. This algorithm is based on Voronoi’s theorem about cylindric minima for a lattice in general position. In the original proof and it’s refinement published by Delone and Faddeev some significant cases were skipped. In the present we give a complete proof of Voronoi’s theorem. The result is extended to arbitrary lattices.

Key words: *lattice, Voronoi algorithm.*