Городская олимпиада по математике
г. Хабаровск, 2002 год

9 КЛАСС

Задача 1. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, разность которых равна одному из катетов треугольника. Найти углы треугольника.

Решение. Пусть ABC прямоугольный треугольник с прямым углом B и высотой BH. На отрезке HC отметим точку K так, что $AH = HK$.

Из условия задачи следует, что $KC = AB = BK$. Поэтому $\angle BAC = \angle AKB = 2\angle ACB$. Отсюда находим, что $\angle ACB = 30°$, $\angle BAC = 60°$.

Задача 2. Пусть a_1, a_2, a_3 – произвольные вещественные числа, а b_1, b_2, b_3 они же, но взятые в другом порядке. Доказать, что

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Решение. Заметим, что

$$a_1b_1 \leq \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}b_1^2, \quad a_2b_2 \leq \frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}b_2^2, \quad a_3b_3 \leq \frac{1}{2}a_3^2 + \frac{1}{2}b_3^2.$$

Складывая почленно эти три неравенства, получим

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + \frac{1}{2}a_3^2 + \frac{1}{2}b_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Задача 3. В вершинах правильного восьмиугольника расставлены знаки $+$ и $-$. Каждой вершине сопоставляется тройка знаков (типа $(+,\ -,\ +)$), на первом месте которой стоит знак из соседней вершины справа, на втором из самой вершины, а на третьем из соседней слева. Сколько имеется вариантов расстановки знаков при условии: все 8 возникающих троек (для каждой вершины) попарно различны?

Решение. Общее количество всех возможных троек знаков равно 8. Из условия задачи следует, что каждая из них соответствует некоторой вершине. Группа из трех подряд идущих плюсов должна соседствовать с минусами справа и слева. То же самое верно и в отношении трех подряд идущих минусов. Это возможно только в случае, если за группой из трех плюсов сразу же идет группа из трех минусов (справа или слева). Поэтому общее количество вариантов равно $2 \times 8 = 16$.

Задача 4. Натуральные числа от 1 до 9 раскрашены в два цвета. Доказать, что найдутся три различных числа одного цвета, одно из которых равно сумме двух других.

Решение. Пусть цвета есть белый и черный. При этом 9 имеет черный цвет. Предположим, что утверждение неверно. Для пары (1, 2) возможны четыре варианта раскрашивания: (Б, Б), (Б, Ч), (Ч, Б), (Ч, Ч). Рассматривая каждый из них легко приходим к противоречию. Например, для пары (Б, Ч) рассуждения выглядят так:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Ч							Ч

Так как $2+7=9$, то $7 \to$ Б и

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Ч					Б		Ч

Так как $1+7=8$, то $8 \to$ Ч и

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Ч					Б	Ч	Ч

Так как $1+6=7$, то $6 \to$ Ч и

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Ч				Ч	Б	Ч	Ч

Получено противоречие, поскольку $2+6=8$.

Задача 5. Пусть m и n натуральные числа, для которых $n > m$. С их помощью построена последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{2k}$ по правилу: $a_0 = n$, $a_1 = m$, a_{i+2} есть остаток от деления a_i на a_{i+1}. Доказать, что $2^k < n$.

Решение. Заметим, что для некоторого натурального k_i (неполное частное)

$$a_i = k_i a_{i+1} + a_{i+2},$$

где $0 < a_{i+2} < a_{i+1}$. Поэтому

$$a_i = k_i a_{i+1} + a_{i+2} = k_i(k_{i+1}a_{i+2} + a_{i+3}) + a_{i+2} = (k_i k_{i+1} + 1)a_{i+2} + k_i a_{i+3} > 2a_{i+2}.$$

Отсюда находим, что

$$n = a_0 > 2a_2 > 2^2 a_4 > \cdots > 2^i a_{2i} > \cdots > 2^k a_{2k}.$$

Следовательно,

$$2^k < n/a_{2k} \le n.$$

10 КЛАСС

Задача 1. В круг радиуса 1 помещено два треугольника, площадь каждого из них больше 1. Доказать, что эти треугольники пересекаются.

Решение. Легко проверить, что если площадь треугольника больше 1, то центр круга лежит внутри треугольника. Значит, два треугольника имеют общую точку – центр.

Задача 2. Натуральные числа от 1 до 9 раскрасили в два цвета. Доказать, что найдутся среди них три различных числа одного цвета, составляющие арифметическую прогрессию.

Решение. Выберем для раскраски белый и черный цвета так, что 9 имеет белый цвет. Предположим, что наше утверждение неверно. Рассмотрим случай, когда 1 и 3 имеют белый цвет:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б		Б						Б

Тогда 2, 5, 6 – черные:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Ч	Б		Ч	Ч			Б

Значит 4 и 7 – белые:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Ч	Б	Б	Ч	Ч	Б		Б

Мы пришли к противоречию, поскольку 8 не может быть ни черным, ни белым из-за прогрессий: 7, 8, 9; 2, 5, 8. Точно также приводят к противоречию оставшиеся три случая (1, 3): (Б, Ч), (Ч, Б), (Ч, Ч).

Задача 3. Доказать, что при любых положительных a и b выполняется неравенство

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 \geq 64ab\,(a+b)^2\,.$$

Решение. Положим $a = x^2$ и $b = y^2$. Извлекая корень квадратный из обеих частей неравенства, получим

$$(x+y)^4 \geq 8xy\left(x^2+y^2\right)\,.$$

После очевидных преобразований получаем эквивалентное неравенство

$$(x-y)^4 \geq 0,$$

справедливое при всех x и y.

Задача 4. Доказать, что расстояние от одной из вершин (какой-то!) выпуклого четырехугольника до противоположной диагонали не превосходит половины этой диагонали.

Решение. Пусть $ABCD$ выпуклый четырехугольник и $AC \leq BD$. Опустим из вершин A и C перпендикуляры AA_1 и CC_1 на диагональ BD. Тогда $AA_1 + CC_1 \leq AC \leq BD$, а значит $AA_1 \leq BD/2$ или $CC_1 \leq BD/2$.

Задача 5. Из натуральных чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Доказать, что среди них найдутся два, одно из которых делится на другое.

Решение. Если среди выбранных чисел есть два одинаковых, то утверждение очевидно. Предположим теперь, что все они попарно различны. Любое натуральное число от 1 до $2n$ однозначно записывается в виде

$$(2k-1)\cdot 2^l \tag{*}$$

с некоторым натуральным $k \in 1,\dots,n$ и целым $l \geq 0$. Поэтому множество всех натуральных от 1 до $2n$ разбивается на n непересекающихся подмножеств M_k $(k = 1,\dots,n)$ с числами вида (*) для фиксированного k. Так как выбранных чисел ровно $n+1$ и все они попарно различны, то по принципу Дирихле хотя бы два из них попадут в одно из множеств M_k. Пусть это будут числа

$$(2k-1)2^l, \quad (2k-1)2^{l'}, \quad (l < l').$$

Первое есть делитель второго. А это и требовалось доказать.

11 КЛАСС

Задача 1. Можно ли квадрат разрезать на три не равных, но подобных прямоугольника?

Решение. Разрежем единичный квадрат на три прямоугольника следующим способом. Если стороны большого прямоугольника 1 и x, то стороны второго по величине (с учетом подобия) есть $1/x - 1$ и $1 - x$. Следовательно, стороны третьего будут $1 - x$ и $2 - 1/x$. Для подобия всех трех необходимо равенство $x(1 - x) = 2 - 1/x$, или

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Левая часть уравнения при $x = 0$ и $x = 1$ имеет разные знаки. Значит, оно имеет решение на интервале $(0, 1)$ и разрезание возможно.

Задача 2. Доказать, что если a, b, c положительные числа и $a + b = c$, то

$$a^{2/3} + b^{2/3} > c^{2/3}.$$

Решение. Так как $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$, $0 < \frac{a}{c}, \frac{b}{c} < 1$, то

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{2/3} + \left(\frac{b}{c}\right)^{2/3} > \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1.$$

Следовательно, $a^{2/3} + b^{2/3} > c^{2/3}$.

Задача 3. Внутри правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $AO^2 + BO^2 = CO^2$. Найти $\angle AOB$.

Решение. Выберем точку O_1 так, чтобы BOO_1 был правильным треугольником и точки O_1 с C находились по разные стороны относительно прямой, проходящей через B и O. Треугольники BOC и ABO_1 равны, так как $AB = BC$ (по опр.), $BO = BO_1$ (по постр.), $\angle OBC = \angle O_1BA$ (дополняются одним и тем же углом до $60°$). Следовательно $AO_1 = OC$. Но по условию $AO^2 + OO_1^2 = AO^2 + BO^2 = CO^2 = AO_1^2$. Поэтому AOO_1 прямоугольный треугольник и $\angle AOB = 90° + 60° = 150°$.

Задача 4. Пусть $a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \ldots$ бесконечная последовательность натуральных чисел. Доказать, что в ней существует либо бесконечная подпоследовательность, любые два члена которой не кратны друг другу, либо бесконечная подпоследовательность, каждый член которой кратен предыдущему.

Решение. Рассмотрим те члены заданной последовательности, которые не являются делителями других членов последовательности.

Если их число бесконечно, то они образуют бесконечную подпоследовательность, любые два члена которой не кратны друг другу и утверждение задачи доказано.

Если их число конечно, то вычеркнув их и все их делители из исходной последовательности, мы получим бесконечную последовательность, в которой каждый член является делителем по крайней мере еще одного члена последовательности. Из последней мы можем выбрать подпоследовательность, в которой каждый последующий член будет кратен предыдущему.

А это и требовалось доказать.

Задача 5. Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 2002 можно выбрать так, чтобы для любых различных трех из них сумма двух не равнялась третьему?

Решение. Пусть M наибольшее из выбранных чисел. По условию, из любой пары чисел

$$\{k, M-k\} \quad 1 \leq k \leq \frac{M}{2}$$

хотя бы одно из двух не входит в список выбранных. Число последних не менее $\left[\frac{M-1}{2}\right]$ (целая часть). Поэтому число выбранных не более

$$M - \left[\frac{M-1}{2}\right] = \left[\frac{M}{2}\right] + 1 \leq \left[\frac{2002}{2}\right] + 1 = 1002.$$

Заметим, что последовательность натуральных от 1001 до 2002 из 1002 чисел удовлетворяет условию.