Школьная олимпиада. Хабаровск, октябрь 2013.

5 класс

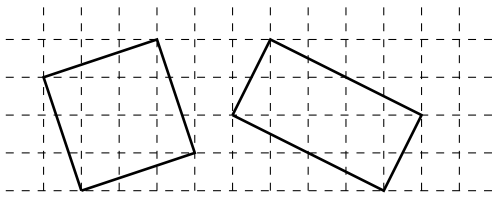
5.1. В записи 2 0 1 0 2 0 1 1 1 расставьте между некоторыми цифрами знаки +, − так, чтобы в результате получилось число 2013.

Решение. Например, так $2010+2+0+1-1+1$ или $2010+2+0+1+1-1$.

5.2. Может ли быть верным равенство
К × О × Т = У × Ч × Ё × Н × Ы × Й,
если в него вместо букв подставить цифры от 1 до 9? Разным буквам соответствуют разные цифры.

Решение. Всего в равенстве использовано 9 различных букв. Значит использованы все цифры от 1 до 9, в том числе и 7. Если 7 стоит в правой части, то левая часть не делится на 7, а если 7 находиться в левой, то правая часть не делится на 7.
Ответ: нет, не может.

5.3. На клетчатой бумаге нарисованы два четырехугольника (см. рисунок). Сравните их площади.



Решение. Режем по линиям сетки и перекладываем. Например, так: квадрат режем на квадрат 2×2 (вырезаем из середины) и 4 прямоугольных треугольника с катетами 1 и 3, попарно их складываем, получаем, что площадь всего квадрата равна $4+3+3=10$. Прямоугольник режем на 2 прямоугольника 2×1 (вырезаем из него) и 6 прямоугольных треугольников с катетами 2 и 1, попарно складываем треугольники, получаем, что площадь всего прямоугольника равна $2+2+2+2+2=10$.
Ответ: равны.

5.4. Три волшебника, Примус, Вторус и Трикус, во время неудачных опытов получили ананас, грузовик КАМАЗ и противогаз. У Вторуса капюшон красный, а борода длиннее, чем у Примуса. У того, кто получил противогаз, самая длинная борода, а капюшон синий. Волшебник с самой короткой бородой получил ананас. Кто что получил, если каждый волшебник получил один предмет? Ответ объясните.

Решение. Так как у волшебника с самой длинной бородой капюшон синий, то у Вторуса не самая длинная борода. У Примуса тоже не самая длинная борода (так как она короче чем у Вторуса). Поэтому самая длинная борода у Трикуса, средняя – у Вторуса и самая короткая – у Примуса. Значит, противогаз получил Трикус, а ананас – Примус. И значит, Вторус получил в результате опыта КАМАЗ.

Ответ: Противогаз получил Трикус, ананас – Примус, КАМАЗ – Вторус.

Школьная олимпиада. Хабаровск, октябрь 2013.

6 класс

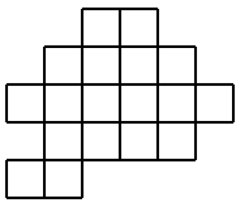
6.1. В равенстве $1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 100$ поставьте вместо звездочек знаки действий и расставьте скобки, чтобы оно стало верным.

Решение. $(1 \cdot 2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 100$.

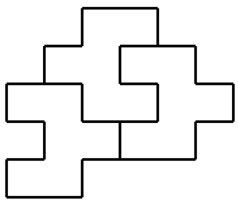
6.2. Корова вчетверо дороже собаки, а лошадь вчетверо дороже коровы. Собака, две коровы и лошадь стоят 20000 р. Сколько стоит корова?

Решение. Собака +2 коровы+лошадь= $(1 + 8 + 16)$ собак, отсюда 1 собака= $20000 : 25 = 800$ (рублей).
Ответ: 3200 рублей.

6.3.Разрежьте фигуру (по границам клеток) на три равные (одинаковые по форме и величине) части.



Решение.



6.4.Учительница математики написала на доске три числа, второе из которых на два больше третьего и на два меньше первого. Шестикласснице Кате эти числа не понравились. От какого-то из них она отняла 2, к двум другим прибавила по 1, и все три новых числа тоже написала на доске. Среди чисел, записанных Катей нет ни одного числа, записанного учительницей. На сколько самое большое из чисел Кати больше самого маленького из них?

Решение. Если от первого числа учительницы отнять 2, то пролучится второе число учительницы. А если от второго числа учительницы отнять 2, получиться третье. Значит, именно третье число учительницы, самое маленькое, Катя уменьшила на два. А первое, самое большое, которое было больше третьего на 4, Катя увеличила на 1. Разница между самым большим и самым маленьким числами Кати составляет $2 + 4 + 1 = 7$.

Ответ: на 7.

6.5. В семье Лебедевых 4 человека: папа, мама, сын и дочь. Их зовут Саша, Женя, Валя и Егор. Как-то за семейным столом некоторые из них сделали по два утверждения, причем каждый ровно единожды сказал правду:

Саша: Женя старше всех. Валя – дочь Егора.

Егор: Женя и Саша – разного пола. Это мои родители.

Женя: Я – отец Егора. Я – дочь Вали.

Восстановите имена и отчества детей.

Решение. Вторая фраза Егора истинной быть не может, значит, верна первая фраза. Поэтому Женя и Саша разного пола, но не отец и мать. С учётом Сашиных слов, они либо мать и сын, либо отец и дочь. Но в первом случае ни одна из фраз Жени не может быть истинной. Значит, Женя и Саша всё-таки отец и дочь. Если при этом Женя дочь, а Саша отец, то Саша солгал 2 раза. Значит Саша дочь Жени, и зовут её Александра Евгеньевна. При этом истинной может быть только первая фраза Жени, и сына зовут Егором.

Ответ: Александра Евгеньевна и Егор Евгеньевич.

Школьная олимпиада. Хабаровск, октябрь 2013.

7 класс

7.1. В стаде, состоящем из лошадей, двугорбых и одногорбых верблюдов, всего можно насчитать 200 горбов. Сколько животных в стаде, если число лошадей равно числу двугорбых верблюдов?

Решение. Если в стаде заменить всех лошадей и двугорбых верблюдов одногорбыми верблюдами, то количество животных в стаде и количество горбов не изменится. В новом стаде количество животных равно количеству горбов.

Ответ: 200.

7.2. Билет в кино стоил 400 рублей. После снижения цены на билет количество зрителей увеличилось на треть, а доход кинотеатра увеличился на четверть. Сколько стоил билет после снижения цены?

Решение. Пусть x – новая цена билета, тогда условие задачи можно записать в виде $\frac{4}{3}x = \frac{5}{4} \cdot 400$. Откуда $x = 375$.

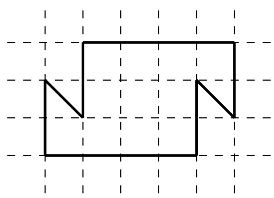
Ответ: 375.

7.3. К некоторому числу прибавили сумму его цифр, после чего получилось число 80. Чему было равно исходное число?

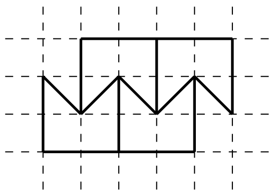
Решение. Данное число может быть только двузначным, так как для трёхзначного сумма будет больше 100, а для однозначного — не больше 18. Пусть данное число имеет вид $\overline{ab} = 10a + b$. Тогда по условию задачи $11a+2b = 80$. Переходя к остаткам от деления на 11, получаем, что $2b \equiv 3 \pmod{11}$. Это возможно только для цифры 7. При $b = 7$ из равенства $11a + 2b = 80$ следует, что $a = 6$.

Ответ: 67.

7.4. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на четыре равные части.



Решение.



7.5. На дискотеке выяснилось, что каждый юноша знаком с 8 девушками, а каждая девушка — с 5 юношами. Во сколько раз девушек на дискотеке больше чем юношей?

Решение. Пусть на дискотеке было m юношей и n девушек. Выясним количество знакомств. С одной стороны (со стороны юношей) число знакомств равно $8m$, а с другой стороны (со стороны девушек) — $5n$. Число знакомств одинаково, значит $5n = 8m$. То есть число девушек ($n = 1,6m$) в 1,6 раза больше числа юношей.

Ответ: в 1,6 раза.

Школьная олимпиада. Хабаровск, октябрь 2013.

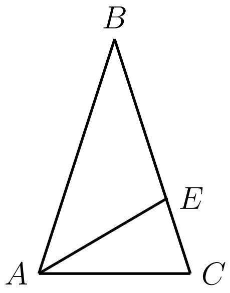
8 класс

8.1. Запишите число 2013 в виде суммы двух слагаемых, используя каждую из цифр не более одного раза.

Решение. 1968+45.

8.2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к стороне, равна основанию. Найдите углы треугольника.

Решение.



Пусть AE – биссектриса равнобедренного треугольника ABC, проведённая к стороне BC. $AE = AC$ (по условию), следовательно треугольник AEC – равнобедренный. Если $\angle CAE = x$, то $\angle BAE = x$, $\angle BCA = \angle BAC = \angle AEC = 2x$. Таким образом сумма углов в треугольнике AEC равна $x + 2x + 2x = 5x = 180°$, откуда $x = 36°$.

Ответ: $72°$, $72°$ и $36°$.

8.3. К некоторому числу прибавили сумму его цифр, после чего получилось число 80. Чему было равно исходное число?

Решение. Данное число может быть только двузначным, так как для трёхзначного сумма будет больше 100, а для однозначного — не больше 18. Пусть данное число имеет вид $\overline{ab} = 10a + b$. Тогда по условию задачи $11a+2b = 80$. Переходя к остаткам от деления на 11, получаем, что $2b \equiv 3 \pmod{11}$. Это возможно только для цифры 7. При $b = 7$ из равенства $11a + 2b = 80$ следует, что $a = 6$.

Ответ: 67.

8.4. В каком соотношении нужно смешать 35% и 50% растворы кислоты, чтобы получить 40% раствор кислоты?

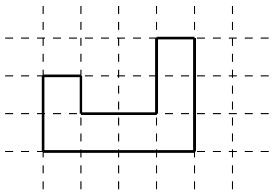
Решение. Если взято x частей первого раствора и y частей второго раствора, то доля кислоты в их смеси равна

$$\frac{x \cdot 0.35 + y \cdot 0.50}{x + y} = 0.40.$$

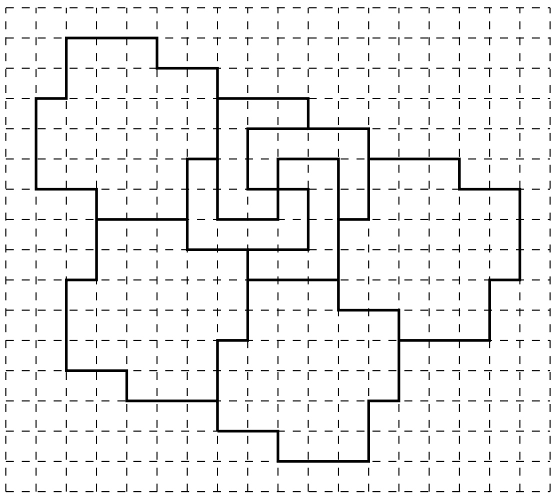
Из полученного уравнения следует, что $x = 2y$.

Ответ: Данные растворы нужно смешать в отношении $2 : 1$.

8.5. Можно ли замостить плоскость фигурами вида



Решение. Да, можно, см. рисунок



Школьная олимпиада. Хабаровск, октябрь 2013.

9 класс

9.1. Решите уравнение $6 \cdot 2^{2012} - 4 \cdot 2^{2011} = 2^x$.

Решение. $6 \cdot 2^{2012} - 4 \cdot 2^{2011} = 2^{2011}(12-4) = 2^{2014}$. **Ответ:** $x = 2014$.

9.2. В параллелограмме $ABCD$ один угол в 5 раз больше другого. Найдите площадь параллелограмма, если $AB = BC = 10$.

Решение. Если наименьший угол параллелограмма равен α, то второй угол — 5α. Из равенства $\alpha + 4\alpha = 180°$ следует, что $\alpha = 30°$. Значит, высота h, опущенная из точки B на сторону AD в два раза меньше стороны AB, то есть $h = AB/2 = 5$. Площадь параллелограмма находится по стандартной формуле $S = h \cdot AD = 50$.
Ответ: 50.

9.3. С помощью стандартных операций ($+, -, \times, /, !, \sqrt{\ }$) получите из цифр 4 и 8 (каждую цифру нужно использовать ровно один раз) число 3. (Факториал числа определяется следующим образом: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

Решение. $3 = 4!/8$.

9.4. Найдите натуральное $n > 1$ такое, что числа 120, 379 и 1008 дают одинаковые остатки при делении на n.

Решение. По условию задачи разности $1008 - 379 = 629$ и $379 - 120 = 259$ должны делиться на n. Значит, их наибольший общий делитель $(629, 259) = 37$ также должен делиться на n. Так как 37 — простое число и $n > 1$, то $n = 37$.
Ответ: $n = 37$.

9.5. Каждое из квадратных уравнений $x^2 - ax + 3 = 0$, $x^2 - 3x + a = 0$ имеет два различных корня. При каких значениях a данные уравнения имеют ровно один общий корень?

Решение. Вычитая из первого уравнения второе, приходим к равенству $(3-a)(x+1) = 0$, то есть либо $a = 3$, либо $x = 3$. Если предположить, что $a = 3$, то получим два идентичных уравнения, не имеющих корней. Поэтому должно выполняться равенство $x = 3$, которое возможно только при $a = 4$. Проверка показывает, что $a = 4$ удовлетворяет условию задачи.
Ответ: $a = 4$.

Школьная олимпиада. Хабаровск, октябрь 2013.

10 класс

10.1. Найдите наибольшее натуральное n такое, что $n^{200} < 5^{300}$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующему $n^2 < 5^3$. Наибольшим натуральным решением является число $n = 11$.

Ответ: $n = 11$.

10.2. Сумма первых четырёх членов геометрической прогрессии равна 30, а сумма следующих четырёх членов равна 480. Найдите первый член этой прогрессии.

Решение. Пусть b — первый член прогрессии, и q — её частное. Тогда условие задачи можно записать в виде

$$b\frac{q^4-1}{q-1} = 30, \tag{1}$$

$$bq^4\frac{q^4-1}{q-1} = 480. \tag{2}$$

Разделив второе равенство на первое, получаем, что $q^4 = 16$, то есть $q = \pm 2$. Из равенства (1) получаем, что $b = 2$ при $q = 2$ и $b = -6$ при $q = -2$. Проверка показывает, что обе полученные пары удовлетворяют и уравнению (2).

Ответ: 2, -6.

10.3. Сумма 15 различных натуральных чисел равна 121. Чему равны эти числа?

Решение. Сумма первых 15 натуральных чисел равна 120. Чтобы получить сумму 121 можно лишь одно из них увеличить на 1. Числа останутся различными только если увеличить последнее из них.

Ответ: 1, 2, 3, $\ldots$, 13, 14, 16.

10.4. Медиана треугольника в полтора раза больше стороны, к которой она проведена. Найдите угол между двумя другими медианами.

Решение. Пусть медиана AD, проведённая к стороне $BC = 2a$ в полтора раза больше этой стороны, то есть $AD = 3a$. Точка пересечения медиан M делит AD в отношении $2 : 1$, следовательно $BD = CD = MD = a$ и треугольник BCM прямоугольный.

Ответ: 90°.

10.5. Какого наименьшего размера должна быть квадратная шахматная доска, на которой можно было бы расставить 2013 королей, которые бы не били друг друга?

Решение. Разрежем доску 88×88 на $44^2 = 1936$ квадратов 2×2. Тогда в каждом квадрате может находится не более одного короля. Поэтому 2013 королей на такой доске разместить нельзя. На доске 89×89 можно расставить 2025 королей, которые бы не били друг друга (для этого достаточно ставить их в клетки, стоящие на пересечении строк и столбцов с нечётными номерами)

Ответ: 89×89.

Школьная олимпиада. Хабаровск, октябрь 2013.

11 класс

11.1. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 23, а сумма квадратов катетов равна 289. Чему равен периметр данного треугольника?

Решение. Пусть a и b — длины катетов данного треугольника, а c — длина гипотенузы. По теореме Пифагора $c = 17$. Из системы уравнений

$$a + b = 23, \quad a^2 + b^2 = 289,$$

следует, что $a = 8$, $b = 15$, либо $a = 15$, $b = 8$. То есть периметр равен $8 + 15 + 17 = 40$.

Ответ: 40.

11.2. График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(-5; 2)$, $(-3; -1)$, $(3; 2)$. Чему равно $f(1)$?

Решение. Так как $f(-5) = f(3)$, то ось данной параболы проходит через точку $x = -1$. Значит, $f(1) = f(-3) = -1$.

Ответ: $f(1) = -1$.

11.3. Вычислите $\operatorname{tg} 15°$.

Решение.

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 - 1/\sqrt{3}}{1 + 1/\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ответ: $2 - \sqrt{3}$.

11.4. Решите в целых числах уравнение $x^2y^2 - 10x^2 - 5y^2 = -49$.

Решение. Данное уравнение можно преобразовать к виду $(x^2-5)(y^2-10) = 1$. Поэтому возможны два варианта: либо $x^2 - 5 = y^2 - 10 = 1$, либо $x^2 - 5 = y^2 - 10 = -1$. В первом случае целочисленных решений нет. Во втором случае $x = \pm 2$, $y = \pm 3$.

Ответ: $(x; y) = (2, 3)$, $(-2, 3)$, $(2, -3)$, $(-2, -3)$.

11.5. Какой наименьшей площади должна быть прямоугольная шахматная доска, на которой можно было бы расставить 2013 королей, не бьющих друг друга?

Решение. На прямоугольной шахматной доске можно провести ломаную, которая проходит по всем клеткам этой доски. На каждом отрезке этой ломаной между двумя королями должна находится по крайней мере одна свободная клетка. Поэтому свободных клеток не менее 2012, а всего на доске не менее $2012 + 2013 = 4025$ клеток. На доске 1×4025 можно расставить 2013 королей, чередуя их с пустыми клетками.

Ответ: 4025.