Школьная олимпиада. Хабаровск, сентябрь 2015

5 класс

5.1. Дата 3 марта 2033 года может быть записана как 3.3.33. Выпишите все даты в 21 веке, при записи которых используются одна цифра. (День и месяц могут записываться как одной так и двумя цифрами, а год - ровно двумя).

Решение. Задача решается полным перебором.

Ответ. 1.1.11, 11.1.11, 1.11.11, 11.11.11, 2.2.22, 22.2.22, 3.3.33, 4.4.44, 5.5.55, 6.6.66, 7.7.77, 8.8.88, 9.9.99.

Комментарий. Снимается 1 балл за каждую потерянную или неверную.

5.2. Можно ли испечь такой пирог, который делится на 4 части прямым разрезом ножа?

Решение. Например, пирог-змея:

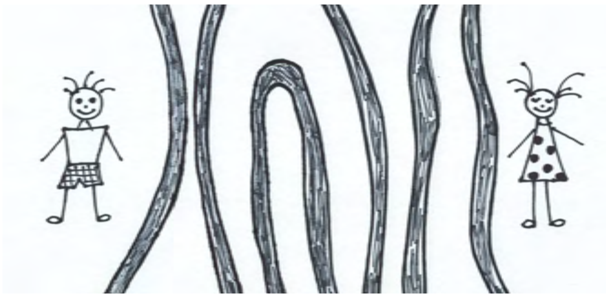
Ответ. Можно.

5.3. Одни песочные часы отмеряют 7 минут, а другие 11 минут. Можно ли с их помощью отмерить время в 15 минут?

Решение. Пусть часы начинают отсчитывать время одновременно. Через 7 минут в маленьких часах песок закончится, а в больших часах песка останется на 4 минуты. Будем считать этот момент началом отсчета необходимого времени. Первые 4 минуты считаем по оставшемуся песку в больших часах, а следующие 7 минут отмеряем маленькими часами.

Ответ. Можно.

5.4. На рисунке изображена часть карты местности, по которой протекает извилистая река.



Находятся ли мальчик и девочка на одном берегу этой реки?

Решение. Если между людьми река протекает один раз, то они находятся на разных берегах этой реки. Если же река делает петлю и протекает между людьми дважды, то они оказываются на одном и том же берегу этой реки. На рисунке к задаче между мальчиком и девочкой река протекает нечетное число раз (не считая петлю), поэтому они находятся на разных берегах реки.

Ответ. Нет.

5.5. Через 2 года мой брат будет в 2 раза старше, чем он был 2 года назад. Через 3 года моя сестра будет в 3 раза старше, чем она была 3 года назад. Кто из них старше?

Решение. Период времени между “два года назад” и “через два года” равен 4-м годам. За эти четыре года возраст брата увеличивается в два раза, т.е. 4 года составляют половину от возраста, который у него будет через два года. Значит через два года брату будет 8 лет, следовательно в настоящий момент ему 6 лет.

Период времени между “три года назад” и “через три года” равен 6-и годам. Поскольку к концу этого периода возраст сестры увеличился в три раза, то период времени в 6 лет ровно в два раза больше возраста сестры в начале этого периода. Значит 3 года назад сестре было $6 : 2 = 3$ года, а сейчас ей 6 лет.

Ответ. Брат и сестра — ровесники.

Школьная олимпиада. Хабаровск, сентябрь 2015

6 класс

6.1. Между цифрами 9 9 9 9 9 9 расставьте знаки арифметических действий так, чтобы в результате их выполнения получилось 100.

Ответ. $99 + 9/9 + 9 - 9$.

Комментарий. Возможны другие решения.

6.2. Три мышонка делят между собой три куска сыра по 5 г, 8 г и 11 г. Хомяк пытается им помочь. Он может откусывать и съедать по 1 г от любых двух кусков. Может ли хомяк сделать так, чтобы мышатам осталось 3 куска одинакового веса? Какого размера будут эти куски?

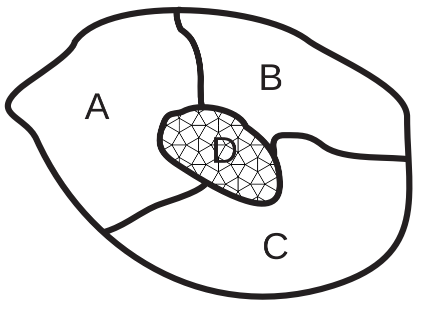
Решение. Откусив от 2-го и 3-го куска 6 раз хомяк получит куски размером в 2 г и 5 г. После этого ему останется от 1-го и 3-го куска откусить по 3 раза.

Ответ. Может, 2 г.

Комментарий. Полным решением считается приведение алгоритма действий хомяка. Только ответ — 0 баллов.

6.3. На острове располагается 4 государства. Нарисуйте возможную карту острова, если известно, что каждое государство имеет общую границу с тремя другими.

Ответ.



6.4. Через 2 года мой брат будет в 2 раза старше, чем он был 2 года назад. Через 3 года моя сестра будет в 3 раза старше, чем она была 3 года назад. Кто из них старше?

Решение. Период времени между “два года назад” и “через два года” равен 4-м годам. За эти четыре года возраст брата увеличивается в два раза, т.е. 4 года составляют половину от возраста, который у него будет через два года. Значит через два года брату будет 8 лет, следовательно в настоящий момент ему 6 лет.

Период времени между “три года назад” и “через три года” равен 6-и годам. Поскольку к концу этого периода возраст сестры увеличился в три раза, то период времени в 6 лет ровно в два раза больше возраста сестры в начале этого периода. Значит 3 года назад сестре было $6 : 2 = 3$ года, а сейчас ей 6 лет.

Ответ. Брат и сестра — ровесники.

6.5. Настольный календарь состоит из 2 кубиков, на гранях которых написано по 1 цифре. Какие цифры написаны на гранях каждого кубика, если на передней части календаря можно выставить любую дату? Приведите пример расстановки цифр.

Решение. Чтобы иметь возможность составить числа 11 и 22 на гранях каждого кубика должны быть написаны цифры 1 и 2. Оставшиеся цифры не могут разместиться на одном кубике, поэтому для составления дат от 1 до 9 нужно написать на каждом кубике цифру 0. Таким образом, по три грани на каждом кубике заполнены. Для оставшихся 7 цифр от 3 до 9 имеет только 6 пустых граней. Для обозначения чисел 6 и 9 придется использовать только одну грань кубика, переворачивая ее при необходимости.

Ответ. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\{0, 1, 2, 6, 7, 8\}$.

Комментарий. ответы могут быть другими. На каждом кубике обязательно должны быть 0, 1 и 2. Цифры 3, 4, 5, 6, 7, 8 на оставшихся местах могу располагаться произвольно.

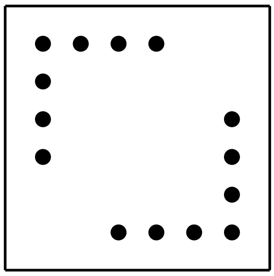
Указание в решении на наличие цифр 0, 1 и 2 на обоих кубиках оценивается 1 баллом за каждую цифру.

Школьная олимпиада. Хабаровск, сентябрь 2015

7 класс

7.1. Расставьте 14 стульев вдоль стен квадратной комнаты так, чтобы у каждой стены стояло одинаковое число стульев.

Ответ.



7.2. Мама купила пачку сахара рафинада. Пользуясь её отсутствием дети съели сначала верхний слой из 77 кубиков, затем правый слой из 55 кубиков и, наконец, передний слой кубиков. Сколько кубиков сахара осталось в коробке? Не забудьте обосновать, что других решений нет.

Решение. Заметим, что длина, ширина и высота пачки сахара больше одного слоя, поскольку в противном случае у детей ничего не осталось бы. Верхний слой состоит из 77 кубиков и $77 = 11 \cdot 7$ — единственно возможное представление числа 77 множителями большими единицы, поэтому ширина пачки сахара составляла 7 кубиков, в длина — 11. Правый слой, съеденный детьми, состоял из 55 кубиков и по этим же причинам его высота была 5 кубиков, а длина — 11. Поскольку правый слой был съеден после верхнего, то высота всей пачки рафинада была $5 + 1 = 6$ кубиков. Уменьшив все первоначальные размеры пачки $11 \times 7 \times 6$ на 1 получим оставшееся количество кубиков $10 \cdot 6 \cdot 5 = 300$.

Ответ. 300.

7.3. У мальчика поровну братьев и сестер, а у его сестры в 2 раза больше братьев чем сестер. Сколько мальчиков и девочек в семье?

Решение. Пусть у мальчика x сестер и x братьев. Это означает, что в семье $x+1$ мальчик и x девочек. Из второго утверждения задачи следует уравнение $x + 1 = 2(x - 1)$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 3$.

Ответ. 4 мальчика и 3 девочки.

7.4. Настольный календарь состоит из 2 кубиков, на гранях которых написано по 1 цифре. Какие цифры написаны на гранях каждого кубика, если на передней части календаря можно выставить любую дату? Приведите пример расстановки цифр.

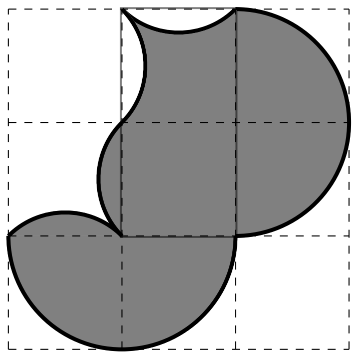
Решение. Чтобы иметь возможность составить числа 11 и 22 на гранях каждого кубика должны быть написаны цифры 1 и 2. Оставшиеся цифры не могут разместиться на одном кубике, поэтому для составления дат от 1 до 9 нужно написать на каждом кубике цифру 0. Таким образом, по три грани на каждом кубике заполнены. Для оставшихся 7 цифр от 3 до 9 имеет только 6 пустых граней. Для обозначения чисел 6 и 9 придется использовать только одну грань кубика, переворачивая ее при необходимости.

Ответ. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\{0, 1, 2, 6, 7, 8\}$.

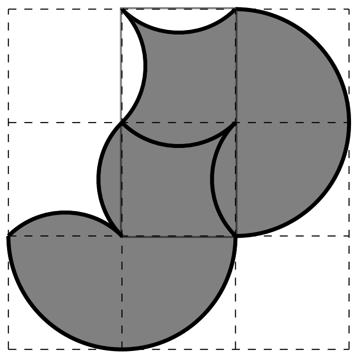
Комментарий. Ответы могут быть другими. На каждом кубике обязательно должны быть 0, 1 и 2. Цифры 3, 4, 5, 6, 7, 8 на оставшихся местах могу располагаться произвольно.

Указание в решении на наличие цифр 0, 1 и 2 на обоих кубиках оценивается 1 баллом за каждую цифру.

7.5. Разделите фигуру на две одинаковые части.



Ответ.



Школьная олимпиада. Хабаровск, сентябрь 2015

8 класс

8.1. В 20-этажном здании лифт имеет 2 кнопки. Одна поднимает лифт на 13 этажей, а другая опускает на 8. Можно ли на таком лифте доехать с 13-го этажа на 8-й?

Решение. Последовательность этажей: 13, 5, 18, 10, 2, 15, 7, 20, 12, 4, 17, 9, 1, 14, 6, 19, 11, 3, 16, 8.

Ответ. Можно.

8.2. Мама купила пачку сахара рафинада. Пользуясь её отсутствием дети съели сначала верхний слой из 77 кубиков, затем правый слой из 55 кубиков и, наконец, передний слой кубиков. Сколько кубиков сахара осталось в коробке? Не забудьте обосновать, что других решений нет.

Решение. Заметим, что длина, ширина и высота пачки сахара больше одного слоя, поскольку в противном случае у детей ничего не осталось бы. Верхний слой состоит из 77 кубиков и $77 = 11 \cdot 7$ — единственно возможное представление числа 77 множителями большими единицы, поэтому ширина пачки сахара составляла 7 кубиков, в длина — 11. Правый слой, съеденный детьми, состоял из 55 кубиков и по этим же причинам его высота была 5 кубиков, а длина — 11. Поскольку правый слой был съеден после верхнего, то высота всей пачки рафинада была $5 + 1 = 6$ кубиков. Уменьшив все первоначальные размеры пачки $11 \times 7 \times 6$ на 1 получим оставшееся количество кубиков $10 \cdot 6 \cdot 5 = 300$.

Ответ. 300.

8.3. В непрозрачном мешке находятся 15 красных, 20 синих и 25 зеленых шаров. Какое наименьшее число шаров нужно вытащить, чтобы среди них было по крайней мере 3 синих и 4 зеленых шара?

Решение. Среди 42 вытащенных шаров может не оказаться 3-х синих. Например, если вытащить 15 красных, 25 зеленых и 2 синих шара.

Если же вытащить 43 шара, то среди них окажется по крайней мере 3 синих ($15 + 25 + 2 = 42 < 43$) и 4 зеленых ($15 + 20 + 3 = 38 < 43$).

Ответ. 43.

Комментарий. за правильный ответ без обоснования ставится 3 балла.

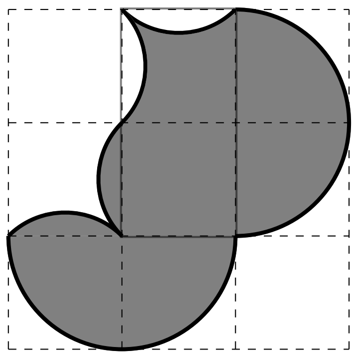
8.4. Какой угол образуют стрелки часов в 14:48?

Решение. За 48 минут минутная стрелка делает поворот на $4/5$ окружности, т.е. на $4 \cdot 360^\circ : 5 = 288^\circ$. За это же время часовая стрелка поворачивается на $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{15}$ окружности, т.е. на $360^\circ : 15 = 24^\circ$. Учитывая, что за каждый полный час часовая стрелка поворачивается на 30 градусов, вычислим угол между стрелками: $288^\circ - 30^\circ - 30^\circ - 24^\circ = 288^\circ - 84^\circ = 204^\circ$ — градусная мера внешней области угла, образованного стрелками часов. Следовательно, угол между стрелками часов равен $360^\circ - 204^\circ = 156^\circ$.

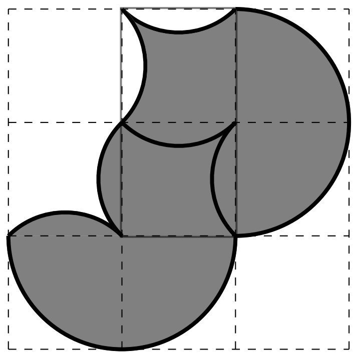
Ответ. 156°.

Комментарий. За правильное определение какого-нибудь вспомогательного угла (например, между минутной стрелкой и ее положением в 12 часов) ставится 2 балла.

8.5. Разделите фигуру на две одинаковые части.



Ответ:



Школьная олимпиада. Хабаровск, сентябрь 2015

9 класс

9.1. Замените знак $\star$ наименьшим числом так, чтобы число $\overline{8\star8} > 88$ делилось на 88. Не забудьте обосновать ответ.

Решение. Поскольку, $88 = 11 \cdot 8$ и НОД$(8,11) = 1$, то число $\overline{8\star8}$ должно делиться на 11 и на 8.

Пусть $\star$ — однозначное число. По признаку делимости на 11 (число делится на 11 тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма цифр этого числа делится на 11) должно выполняться равенство $16 - \star = 11$, т.е. $\star = 5$ единственно возможная цифра. Однако, число 858 не делится на 8 (без остатка).

Наименьшее двузначное число 00 удовлетворяет условию задачи.

Ответ. 8008.

Комментарий. Если найдено число $\overline{8\star8} > 88$, делящееся на 88, — ставится 1 балл. Доказательство полным перебором — 7 баллов.

9.2. Три мышонка делят между собой три куска сыра по 5г, 8г и 11г. Хомяк пытается им помочь. Он может откусывать и съедать по 1г от любых двух кусков. Может ли хомяк сделать так, чтобы мышатам осталось 3 куска одинакового веса? (Хомяк не любит сыр, поэтому он хочет, чтобы мышатам достались куски как можно большего размера.) Какого размера будут эти куски?

Решение. Общая масса всех кусков сыра $5 + 8 + 11 = 24$ (г) есть четное число. Поскольку хомяк откусывает по 2 г, то свойство четности общей массы сыра остается неизменной и, следовательно, кусок сыра доставшийся каждому из трех мышат также имеет четную массу, которая не превосходит 5 г.

Наибольшие куски, удовлетворяющие этим условиям имеют массу 4 г каждый. Чтобы получить такие куски хомяк должен съесть 12 г сыра, что он делает за 6 раз. При этом от куска третьего мышонка хомяк успеет откусить не более 6 г, т.е. кусок третьего мышонка будет не меньше 5 г.

Получить куски сыра по 2 г хомяк может следующим образом. Откусив от 2-го и 3-го куска 6 раз он получает куски размером в 2 г и 5 г, а затем откусывает по 3 раза от 1-го и 3-го кусков.

Ответ. Может, 2 г.

Комментарий. За правильный ответ без обоснования его минимальности ставится 3 балла.

9.3. Может ли существовать класс из 23 школьников, в котором каждый ученик имеет ровно 13 друзей-одноклассников?

Решение. Предположив, что такой класс существует, посчитаем в нем количество пар друзей-одноклассников $23 \cdot 13 : 2$. Поскольку полученное число не целое, то такого класса быть не может.

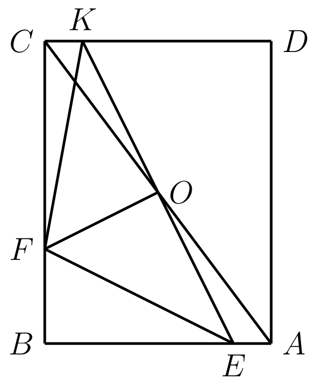
Ответ. Нет.

9.4. Пусть O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. На сторонах AB и BC отмечены соответственно точки E и F, причем $\angle EOF$ — прямой. Докажите, что $AE^2 + CF^2 = EF^2$.

Решение. Пусть K — точка прямоугольника, симметричная точке E относительно центра симметрии прямоугольника O. Тогда $OK = OE$ и $\triangle OKE = \triangle OEA$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно $AE = CK$.

$\triangle KOF = \triangle EOF$ — прямоугольные с равными катетами OK и OE и общим катетом OF. Следовательно, $KF = FE$.

Для прямоугольного $\triangle CKF$ по теореме Пифагора $CK^2 + CF^2 = KF^2$. Отсюда, учитывая полученные ранее $AE = CK$ и $KF = FE$, следует необходимое утверждение.



9.5. Прямая с уравнением $y = px + q$ на координатной плоскости называется *хорошей*, если она имеет ровно одну общую точку с графиком квадратного трехчлена $y = x^2 + qx + p$. Можно ли подобрать два различных числа p и q так, чтобы и прямая с уравнением $y = px + q$, и прямая с уравнением $y = qx + p$ были хорошими прямыми?

Решение. Уравнение $px + q = x^2 + qx + p$ сводится к уравнению $x^2 + (q - p)x + (p - q) = 0$. Меняя p и q местами, получаем уравнение $x^2 + (p - q)x + (q - p) = 0$. Если у каждого из этих уравнений дискриминант равен нулю, то $p = q$.

Ответ. Нет.

Школьная олимпиада. Хабаровск, сентябрь 2015

10 класс

10.1. Какой угол образуют стрелки часов в 14:48?

Решение. За 48 минут минутная стрелка делает поворот на $4/5$ окружности, т.е. на $4 \cdot 360^\circ : 5 = 288^\circ$. За это же время часовая стрелка поворачивается на $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{15}$ окружности, т.е. на $360^\circ : 15 = 24^\circ$. Учитывая, что за каждый полный час часовая стрелка поворачивается на 30 градусов, вычислим угол между стрелками: $288^\circ - 30^\circ - 30^\circ - 24^\circ = 288^\circ - 84^\circ = 204^\circ$ — градусная мера внешней области угла, образованного стрелками часов. Следовательно, угол между стрелками часов равен $360^\circ - 204^\circ = 156^\circ$.

Ответ. 156°.

Комментарий. За правильное определение какого-нибудь вспомогательного угла (например, между минутной стрелкой и ее положением в 12 часов) ставится 2 балла.

10.2. Найдите число вида $\overline{3\ldots3}$, которое делится на 7.

Решение. Заметим, что $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и $111\,111 = 111 \cdot 1001$. Тогда $333\,333 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 111$.

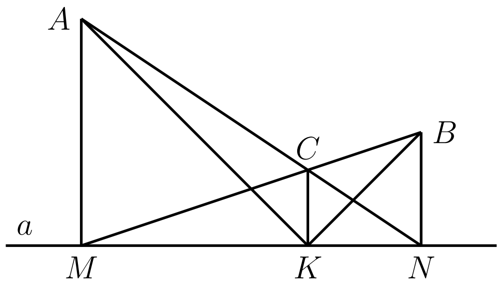
Ответом является любое число, в котором количество троек делится на 6.

Ответ. $333\,333$.

Комментарий. Если в ответе указано большее число (например, из 12 или 18 троек), то ставится 7 баллов.

10.3. Из точек A и B, расположенных по одну сторону от прямой a, опущены на эту прямую перпендикуляры AM и BN. Точка C — точка пересечения AN и BM, а точка K — её проекция на a. Докажите, что $\angle AKC = \angle BKC$.

Решение. При пересечении прямых $AM \parallel BN$ секущими AN и BM образованы накрест лежащие углы $\angle AMC = \angle CBN$ и $\angle MAC = \angle CNB$. Из этих равенств, по признаку подобия треугольников, следует, что $\triangle AMC \sim \triangle NBC$. Поскольку отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведенных к этим сторонам, то $\frac{AM}{BN} = \frac{MK}{NK}$. При этом $\angle AMK = \angle BNK = 90^\circ$, следовательно $\triangle AMK \sim \triangle BNK$ и $\angle MKA = \angle BKN$. Окончательно получаем $\angle AKC = \angle MKC - \angle MKA = 90^\circ - \angle MKA = 90^\circ - \angle BKN = \angle NKC - \angle BKN = \angle BKC$.



10.4. Может ли конь пройти из левого нижнего угла шахматной доски в правый верхний угол, побывав в каждой клетке ровно по одному разу? (Конь ходит “буквой Г”: на два поля в одном направлении и на одно - в перпендикулярном.)

Решение. Конь перемешается в любом из четырех направлений (вверх, вниз, вправо, влево) на 1 клетку вперед и одну по диагонали, поэтому при любом ходе он оказывается на поле противоположного цвета по отношению к полю на котором он находится в начале хода. Чтобы переместиться из левого нижнего угла шахматной доски в правый верхний угол коню необходимо сделать 63 хода, т.е. нечетное число ходов. Значит, после 63 хода конь окажется на клетке цвета противоположного тому, что был вначале. Это противоречит тому, что клетки расположенные в левом нижнем и в правом верхнем углах шахматной доски имеют одинаковый цвет.

Ответ. Нет.

Комментарий. Замечено, что при каждом ходе коня меняется цвет клетки — 2 балла.

10.5. Известно, что три положительных числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Докажите, что любой корень x_0 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (если таковой существует) удовлетворяет неравенству $x_0 < -2$.

Решение. Пусть t — разность прогрессии, x — корень многочлена. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$ax^2 + (a+t)x + (a+2t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x^2 + x + 1) = -t(x+2).$$

По условию параметры a, t положительные, и при любом x выполняется $x^2 + x + 1 > 0$. Поэтому $x + 2 < 0$.

Школьная олимпиада. Хабаровск, сентябрь 2015

11 класс

11.1. $a + b + c = 0$. Докажите, что $ab + bc + ac \leq 0$.

Решение. Необходимое утверждение следует из $0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$ и $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$.

11.2. Найдите число вида $\overline{9\ldots9}$, которое делится на 13.

Решение. Заметим, что $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и $111\,111 = 111 \cdot 1001$. Тогда $999\,999 = 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 111$.

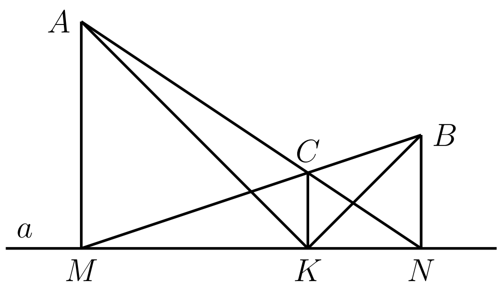
Ответом является любое число, в котором количество девяток делится на 6.

Ответ. $999\,999$.

Комментарий. Если в ответе указано большее число (например, из 12 или 18 девяток), то ставится 7 баллов.

11.3. Из точек A и B, расположенных по одну сторону от прямой a, опущены на эту прямую перпендикуляры AM и BN. Точка C — точка пересечения AN и BM, а точка K — её проекция на a. Докажите, что $\angle AKC = \angle BKC$.

Решение. При пересечении прямых $AM \parallel BN$ секущими AN и BM образованы накрест лежащие углы $\angle AMC = \angle CBN$ и $\angle MAC = \angle CNB$. Из этих равенств, по признаку подобия треугольников, следует, что $\triangle AMC \sim \triangle NBC$. Поскольку отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведенных к этим сторонам, то $\frac{AM}{BN} = \frac{MK}{NK}$. При этом $\angle AMK = \angle BNK = 90^\circ$, следовательно $\triangle AMK \sim \triangle BNK$ и $\angle MKA = \angle BKN$. Окончательно получаем $\angle AKC = \angle MKC - \angle MKA = 90^\circ - \angle MKA = 90^\circ - \angle BKN = \angle NKC - \angle BKN = \angle BKC$.



11.4. Может ли конь пройти из левого нижнего угла шахматной доски в правый верхний угол, побывав в каждой клетке ровно по одному разу?

Решение. Конь перемешается в любом из четырех направлений (вверх, вниз, вправо, влево) на 1 клетку вперед и одну по диагонали, поэтому при любом ходе он оказывается на поле противоположного цвета по отношению к полю на котором он находится в начале хода. Чтобы переместиться из левого нижнего угла шахматной доски в правый верхний угол коню необходимо сделать 63 хода, т.е. нечетное число ходов. Значит, после 63 хода конь окажется на клетке цвета противоположного тому, что был вначале. Это противоречит тому, что клетки расположенные в левом нижнем и в правом верхнем углах шахматной доски имеют одинаковый цвет.

Ответ. Нет.

Комментарий. Замечено, что при каждом ходе коня меняется цвет клетки — 2 балла.

11.5. Десять мышат делят между собой десять кусков сыра весом 101 г, 102 г и т.д. до 110 г. Хомяк пытается им помочь. Он может откусывать и съедать по 1 г от любых девяти кусков. Может ли хомяк сделать так, чтобы всем мышатам остались куски одинакового веса?

Решение. Обозначим через x_k ход, при котором хомяк откусывает по 1 г от всех кусков сыра кроме k-того. Этот ход можно понимать так: от всех кусков откусывается по 1 г, а затем к k-тому куску добавляется 1 г. Все куски станут равными, если хомяк сделает (в любом порядке) 9 ходов x_1, 8 ходов $x_2, \ldots$, 2 хода x_8 и ход x_9. Всего будет сделано 45 ходов. За каждый из этих ходов масса последнего куска уменьшается на 1 г, поэтому после 45-го хода последний и вместе с ним все остальные куски станут по 65 г. При этом, ситуации, когда хомяк должен откусывать от пустого куска сыра, не возникнет.

Ответ. Может.

Комментарий. Если хомяк перестарается, то равные куски могут иметь и меньший вес. За группу ходов $x_1, x_2, \ldots, x_9, x_{10}$ вес каждого кусков уменьшается на 9 г, поэтому могут получиться куски по 56 г, 47 г и т.д. За это баллы не снимаются.