Задачник «Кванта»

Задача 1. Пусть m — натуральное число и M — множество целых чисел от 0 до $2m-1$. Доказать, что для натурального n M можно разбить на два непересекающихся m-элементных подмножества M_1 и M_2, где M_2 состоит из чисел вида $a+n$ с $a \in M_1$, тогда и только тогда, когда m делится на n.

Решение. Пусть $M_1 = a_1, \dots, a_m$. Тогда, в соответствии с условиями на M_1 и $M-2$,

$$(2^{a_1} + \dots + 2^{a_m})(2^n + 1) = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^i + \dots + 2^{2m-1} = 2^{2m} - 1.$$

Разделив $2m$ на n с остатком, получим $2m = nt + r$, где r и t — целые, а также $0 \leqslant r < n$. Так как

$$2^r 2^{n(i+1)} - (-1)^{t-(i+1)} = 2^r 2^{ni}(2^n + 1) - \bigl(2^r 2^{ni} - (-1)^{t-1}\bigr),$$

то числа $2^r \cdot 2^{ni} - (-1)^{t-1}$ делятся на 2^n+1 для $i = t, \dots, 0$. В частности, $2^r - (-1)^t$ $(< 2^n + 1)$ делится на $2^n + 1$. Поэтому $r = 0$ и t — четное. Отсюда находим, что m делится на n. При этом M_1 состоит из показателей в двоичном разложении

$$\frac{2^{2m}-1}{2^n+1} = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1})\bigl((2^{2n})^0 + (2^{2n})^1 + \dots + (2^{2n})^{\frac{m}{n}-1}\bigr) = \\ = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_m}.$$

Задача 2. Пусть k — натуральное число и $A\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ — некоторое множество натуральных чисел. Сопоставим каждому подмножеству $M = \{b_0, \cdots, b_{l-1}\} \subset A$ целое $F_k(M)$, совпадающее с остатком от деления суммы $b_1 + \dots + b_{l-1}$ на $2k$. Значение F_k на пустом множестве равно нулю. Доказать,что F_k реализует взаимно однозначное соответствие между множеством всех подмножеств A и целыми числами от 0 до 2^k-1 тогда и только тогда, когда наибольшие показатели степеней — двойки, на которые делятся a_i, различные целые от 0 до $k-1$.

Решение. Пусть для целого $a\neq 0$ $ord_2(a)$— наибольший показатель степени двойки, на которую делится a. Удобно положить $ord_2(0)=k$. Для целого a остаток от деления a на 2^k обозначим через $a(\mathrm{mod} 2^k)\in[0,2^k-1]$. Каждое подмножество $M\subset A$ однозначно определяется набором $(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_i,\dots,\varepsilon_{k-1})$ с $\varepsilon_1=1$ для $a_i\in M$ и $\varepsilon_i=0$ в случае $a_i\notin M$. Тогда

$$F_k(M)=(\varepsilon_0a_0+\dots+\varepsilon_{k-1}a_{k-1})(\mathrm{mod} 2^k).$$

Предположим, что $ord_2(a_i)$ — различные целые числа от 0 до $k-1$. Без ограничения общности можно считать, что $ord_2(a_i)=i$ для $i=0,\dots,k-1$. Для $M\neq M'$ найдется индекс i с $\varepsilon_i\neq\varepsilon_i'$. Выберем наименьшее такое i. Тогда

$$\begin{gathered}\big(F_k(M)-F_k(M')\big)(\mathrm{mod} 2^k)=\\ =\big((\varepsilon_i-\varepsilon_i')a_i+\dots+(\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_{k-1}')a_{k-1}\big)(\mod 2^k).\end{gathered}$$

Так как

$$ord_2\big((\varepsilon_i-\varepsilon_i')a_i\big)=ord_2(a_i)=i,$$

а для $i<j<k$

$$i<j=ord_2(a_j)\leqslant ord_2\big((\varepsilon_j-\varepsilon_j')a_j\big),$$

то

$$\big(F_k(M)-F_k(M')\big)(\mathrm{mod} 2^k)\geqslant 2^i.$$

Следовательно, $F_k(M)\neq F_k(M')$. Поскольку $0\leqslant F_k(M)<2^k$ и общее число всех подмножеств M (число всех наборов $(\varepsilon_0,\dots\varepsilon_{k-1})$ из нулей и единиц) равно 2^k, то все целые от 0 до 2^k-1 встречаются среди значений $F_k(M)$.

Теперь индукцией по k докажем обратное утверждение, которое при $k=1$ очевидно. Рассмотрим индуктивный переход от k к $(k+1)$. Пусть $A=\{a_0,\dots,a_k\}$ — множество натуральных чисел, для которого отображение F_{k+1} реализует взаимно однозначное соответствие между множеством всех подмножеств A и целыми от 0 до $2^{k+1}-1$. Найдется индекс i, для которого $ord_2(a_i)=0$.

Без ограничения общности можно считать, что $i = k$. То есть: a_k — нечетное. Обозначим через B множество из k целых вида $F_{k+1}(M)$ по всем $M \subset \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$, а через C — множество из всех остальных целых от 0 до $2^{k+1}-1$, отличных от B. Согласно выбору A функция

$$f(a) = (a + a_n)(\mathrm{mod} 2^{k+1})$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между B и C, а функция

$$f\big(f(a)\big) = (a + 2ak)(\mathrm{mod} 2^{k+1})$$

отображает B на себя. Поэтому, если a — элемент B? то и

$$(a + 2ak)(\mathrm{mod} 2^{k+1})$$

—также элемент B. Поскольку 0 входит в B (значение F_{k+1} на пустом множестве), то 2^k различных четных чисел от 0 до $2^{k+1} - 2$

$$(2ia_k)(\mathrm{mod} 2^{k+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1,$$

составляют B. Поэтому числа $l; a_0, \ldots, a_{k-1}$ — четные и функция F_k на подмножествах из

$$\left\{\frac{1}{2}a_0, \ldots, \frac{1}{2}a_{k-1}\right\}$$

взаимно однозначная. По предположению индукции

$$ord_2\left(\frac{1}{2}a_i\right), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

различные целые от 0 до $k-1$. Поэтому

$$ord_2(a_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

— различные целые от 0 до k.

Утверждение полностью доказано.

Задача 3. Пусть $S(n)$ — минимальное число операций умножения, необходимых для вычисления степени x^n с натуральнвм показателем, где x — любое число. Тогда для любого натурального $t \geqslant 2$

$$2^t + \frac{1}{4}t < S\bigl(2^{2^t}\bigr) < 2^t + t.$$

Решение. Любую процедуру вычисления x^n можно представить в виде последовательности степеней

$$x^{a_0},\ x^{a_1},\ \ldots,\ x^{a_k},$$

где

I $a_0 = 1, a_k = n$;

II каждый показатель a_i равен сумме двух предшествующих. Например, для $n = 15$ последовательность

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_5,\ x^{10},\ x^{15}$$

реализует равенство $S(15) = 5$. Поэтому задача вычисления $S(n)$ сводится к построению самых коротких порождающих последовательностей (ПП) для n, состоящих из натуральных $a_0, \ldots, a_k$, которые удовлетворяют условиям I и II. Здесь k — длина ПП для n. При этом всегда $S(n) \leqslant k$. Из определения непосредственно следует, что для ПП длины k всегда $a_k < 2^k$, за исключением ПП из последовательных степеней двойки

$$1 = 2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^k.$$

Поэтому $S(2^k) = k$ и для любого натурального n из интервала 2^k, 2^{k+1} $k + 1 \leqslant S(n)$.

Пусть

$$a_0, \ldots, a_k = nb_0, \ldots, b_l = m$$

ПП для натуральных n и m. Тогда

$$a_0, \ldots, a_k, b_1n, b_2n, \ldots, b_ln = nm$$

ПП для nm. Поэтому $S(nm) \leqslant S(n) + S(m)$. Очевидно, что $S(2^{2^t}) = 2^t + 1$. С помощью тождества $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ получаем разложение

$$2^{2^t} - 1 = \bigl(2^{2^0} + 1\bigr)\ldots\bigl(2^{2^i} + 1\bigr)\ldots\bigl(2^{2^{t-1}} + 1\bigr).$$

Поэтому

$$S\bigl(2^{2^t}-1\bigr)\leqslant S\bigl(2^{2^0}+1\bigr)+\dots+S\bigl(2^{2^i}+1\bigr)+\dots+S\bigl(2^{2^{t-1}}+1\bigr)=$$
$$=(2^0+1)+\dots+(2^i+1)+\dots+(2^{t-1}+1)=2^t+t-1.$$

Верхняя оценка доказана.

Для доказательства нижней оценки нам понадобится последовательность Фибоначчи $F_r (r=0,1,2,\dots)$, определяемая рекуррентным соотнорошением $F_{r+2}=F_r+F_{r+1}$ и начальными значениями $F_0=F_1=1$. Индукцией по r легко доказываются неравенства $(1\leqslant r)$

$$\frac{3}{2}F_{r-1}\leqslant F_2,\quad F_2\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^r.$$

В ПП

$$a_0,\dots,a_i,a_{i+1},\dots,a_k$$

назовем пару a_i,a_{i+1} регулярной, если $a_{i+1}=2a_i$, а в ,остальных случаях нерегулярной. Докажем индукцией по r, что если в ПП встречаются $\geqslant r$ нерегулярных пар, то $a_k\leqslant 2^{k-2}F_{r+1}$. Для $r=0$ утверждение очевидно. Пусть (a_i,a_{i+1}) — последняя из регулярных пар. При индуктивном переходе оит r к $r+1$ находим

а) если пара (a_{i-1},a_i) нерегулярная, то

$$a_k=2^{k-(i+1)}a_{i+1}\leqslant 2^{k-(i+1)}(a_{i-1}+a_i)\leqslant$$
$$\leqslant 2^{k-(i+1)}\bigl(2^{i-1-(r-1)}F_2+2^{i-r}F_{2+1}\bigr)=2^{k-(i+1)}F_{r+2};$$

б) если пара (a_{i-1},a_i) регулярная, то

$$a_k\leqslant 2^{k-(i+1)}(a_{i-1}+a_i)=2^{k-(i+1)}3a_{i-1}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{k-(i+1)}3\cdot 2^{i-1-r}F_{r+1}=2^{k-(r+1)}\frac{3}{2}F_{r+1}\leqslant 2^{k-(r+1)}F_{r+2}.$$

Если в ПП ровно r нерегулярных пар, то число различных стереней двоек в двоичном разложении a_k не превосходит 2^r (индукция по r). Следовательно,в любой ПП для числа

$$2^{2^t}-1=2^0+2^1+2^2+\dots+2^i+\dots+2^{2^t-1},$$

состоящую из 2^t различных степеней двойки, содержится не менее t нерегулярных парю Поэтому в соответствии с ранее доказанной оценкой для длины k ПП числа $2^{2^t}-1$ справедливо неравенство

$$2^{2^t}-1\leqslant 2^{k-t}F_{t+1}.$$

Поэтому, в соответствии с верхней оценкой для F_{t+1},

$$\frac{3}{1+\sqrt{5}} \cdot 2^{2^t}\left(\frac{4}{1+\sqrt{5}}\right)^t \leqslant \left(2^{2^t}-1\right)\left(\frac{4}{1+\sqrt{5}}\right)^{t+1} \leqslant 2^k.$$

Отсюда находим для $t \geqslant 3$

$$k \geqslant 2^t + t \cdot \log_2 \frac{4}{1+\sqrt{5}} + \log_2 \frac{3}{1+\sqrt{5}} \geqslant 2^t + \frac{t}{4}.$$

Для $t = 2$

$$S(2^{2^2}-1) = S(15) = 2^2 + 1 \geqslant 2^2 + \frac{2}{4}.$$

Нижняя оценка доказана.

Задача 3. Пусть α и β — иррациональные действительные числа. Построим две бесконечные последовательности α_n и β_n $(n = 1, 2, \dots)$ по правилу: $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$;

$$\alpha_{n+1} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\} \quad \text{и} \quad \beta_{n+1} = \left(\left[\frac{1}{\alpha_n}\right] + \beta_n\right)^{-1}.$$

Здесь $\{x\}$ и $[x]$ — дробная и целая части x. Доказать, что числа β_n отрицательны при всех $n = 1, 2, \dots$ тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$ и $1 + \alpha\beta = 0$.

Решение. Пусть $\alpha > 0$ и $1 + \alpha\beta = 0$. Так как

$$1 + \alpha_{n+1}\beta_{n+1} = 1 + \frac{\{\alpha_n^{-1}\}}{\beta_n + [\alpha_n^{-1}]} =$$
$$= \beta_{n+1}\left(\frac{1}{\alpha_n} + \beta_n\right) = \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_n}\left(1 + \alpha_n\beta_n\right),$$

то по причине положительности α_n (α — иррационально!) и ввиду условия $0 = 1+\alpha\beta = 1+\alpha_1\beta_1$, при всех натуральных n выполняется равенство $1 + \alpha_n\beta_n = 0$. Поэтому числа $\beta_n = -\alpha_n^{-1}$ отрицательны при всех $n = 1, 2, \dots$. Утверждение в одну сторону доказано.

Предположим теперь, что все числа β_n отрицательны. Построим еще две последовательности по правилам:

$$x_1 = 1 \text{ и } x_{n+1} = x_n\alpha_n; \quad y_1 = -\beta \text{ и } y_{n+1} = -y_n/\beta_n.$$

При этом $x_2 = \alpha$ и $y_2 = 1$. Из определений немедленно следует, что для любого натурального n выполняются рекуррентные соотношения

$$x_{n+2} = x_n - \left[\frac{1}{\alpha_n}\right] x_{n+1}, \quad y_{n+2} = y_n - \left[\frac{1}{\alpha_n}\right] y_{n+1}.$$

Ввиду положительности α_n и отрицательности β_n последовательности x_n и y_n состоят из положительных чисел и убывают. Более того,

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(x_{n+2} + x_{n+2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(x_{n+2} + \left[\frac{1}{\alpha_n}\right] x_{n+1}\right) = \frac{1}{2}x_n.$$

Поэтому $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим также, что

$$\begin{gathered} x_{n+1}y_{n+2} - x_{n+2}y_{n+1} = \\ = x_{n+1}\left(y_n - \left[\frac{1}{\alpha_n}\right] y_{n+1}\right) - \left(x_n - \left[\frac{1}{\alpha_n}\right] x_{n+1}\right) y_{n+1} = \\ = x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = -(x_n y_{n+1} - x_{n+1}y_n) = \dots = \\ = (-1)^n(x_1 y_2 - x_2 y_1) = (-1)^n(1 + \alpha\beta). \end{gathered}$$

Так как $0 < y_n \leqslant y_1 = -\beta$, то

$$1 + \alpha\beta = \lim_{n\to\infty} (-1)^n(x_{n+1}y_{n+2} - x_{n+2}y_{n+1}) = 0.$$

А это и требовалось доказать.

Задача 4. Пусть $a_0, a_1, \dots, a_s$ — убывающая последовательность целых чисел с $a_s = 0$, которая начинается с взаимно простых натуральных a_0 и a_1, а для остальных номеров a_{i+1} есть остаток от деления a_{i-1} на a_i с неполными частными $t_i = [a_{i-1}/a_i]$ (целая часть). Построим еще одну последовательность $b_0, b_1, \dots, b_s$ с помощью рекуррентного соотношения $b_{i+1} = b_{i-1} + t_i b_i$, положив в начале $b_0 = 0$ и $b_1 = 1$. Доказать, что $b_s = a_0$.

Решение. Заметим, что

$$1 = \text{НОД}(a_0, a_1) = \text{НОД}(a_1, a_2) = \dots = \text{НОД}(a_{s-1}, a_s) = 1.$$

Поскольку $a_s = 0$, то $a_{s-1} = \text{НОД}(a_{s-1}, a_s) = 1$. Из рекуррентных соотношений

$$a_{i+1} = a_{i-1} - t_i a_i \;\text{ и }\; b_{i+1} = b_{i-1} + t_i b_i$$

следует, что

$$d_{i+1} = a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i = a_i(b_{i-1} + t_i b_i) + (a_{i-1} - t_i a_i) b_i = \\ = a_{i-1} b_i + a_i b_{i-1} = d_i.$$

Поэтому

$$a_0 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = d_1 = d_2 = \dots = d_s = a_{s-1} b_s + a_s b_{s-1} = b_s.$$

А это и требовалось доказать.

Задача 5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — любая возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $T(N)$ количество всех пар (a_n, a_m), для которых $a_n + a_m = N$. Доказать, что при всех натуральных M

$$\sum_{a_k < M} (M - 3a_k) T(M - a_k) = 0.$$

Решение. По определению,

$$T(N) = \sum_{a_n + a_m = N} 1.$$

Поэтому

$$S_1 = 3 \sum_{a_k < M} a_k T(M - a_k) = 3 \sum_{a_k < M} a_k \sum_{a_n + a_m = M - a_k} 1 = \\ = 3 \sum_{a_n + a_m + a_k = M} a_k = 3 \sum_{a_n + a_m + a_k = M} a_m = 3 \sum_{a_n + a_m + a_k = M} a_n.$$

Действуя подобным образом, находим

$$S_2 = \sum_{a_k < M} M \cdot T(M - a_k) = \sum_{a_n + a_m + a_k = M} M = \\ \sum_{a_n + a_m + a_k = M} (a_n + a_m + a_k) = 3 \sum_{a_n + a_m + a_k = M} a_k.$$

Следовательно, $S_1 - S_2 = 0$. А это и требовалось доказать.

Задача 6. Пусть $\|y\|$ — расстояние от вещественного y до ближайшего целого. Для фиксированного иррационального x построим возрастающую последовательность натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots$ по правилу: $q_1 = 1$; q_{i+1} есть наименьшее из всех натуральных q, для которых $\|xq\| < \|xq_i\|$. Доказать, что $q_{i+2} \geqslant q_i + q_{i+1}$ при всех $i = 1, 2, \cdots$.

Решение. Определим последовательность целых $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ из условия $\|xq_i\| = |a_i - xq_i|$ и положим $x_i = a_i - xq_i$. Предположим, что $x_i x_{i+1} > 0$ (числа x_i и x_{i+1} одинакового знака). Тогда при $q' = q_{i+1} - q_i < q_{i+1}$

$$\|xq'\| \leqslant |(a_{i+1} - a_i) - x(q_{i+1} - q_i)| = |x_i - x_{i+1}| < |x_i| = \|xq_i\|.$$

А это противоречит выбору q_{i+1}. Значит, наше предположение неверно и $x_i x_{i+1} < 0$ при всех i. Отсюда следует, что x_i и x_{i+2} имеют одинаковый знак при всех i. Но тогда

$$\|x(q_{i+2} - q_i)\| \leqslant |(a_{i+2} - a_i) - x(q_{i+2} - q_i)| = |x_i - x_{i+2}| < |x_i| = \|xq_i\|.$$

Поскольку, по определению, q_{i+1} есть наименьшее из всех натуральных q с $\|xq\| < \|xq_i\|$, то $q_{i+2} - q_i \geqslant q_{i+1}$. А это и требовалось доказать.

Задача 7. Пусть α и β — иррациональные действительные числа. Построим две бесконечные последовательности α_n и β_n $(n = 1, 2, \ldots)$ по правилу: $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$;

$$\alpha_{n+1} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\} \quad \text{и} \quad \beta_{n+1} = \left(\left[\frac{1}{\alpha_n}\right] + \beta_n\right)^{-1}.$$

Здесь $\{x\}$ и $[x]$ — дробная и целая части x. Доказать, что числа β_n отрицательны при всех $n = 1, 2, \ldots$ тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$ и $1 + \alpha\beta = 0$.

Решение. Пусть $\alpha > 0$ и $1 + \alpha\beta = 0$. Так как

$$1 + \alpha_{n+1}\beta_{n+1} = 1 + \frac{\{\alpha_n^{-1}\}}{\beta_n + [\alpha_n^{-1}]} =$$
$$= \beta_{n+1}\left(\frac{1}{\alpha_n} + \beta_n\right) = \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_n}\left(1 + \alpha_n\beta_n\right),$$

то по причине положительности α_n (α — иррационально!) и ввиду условия $0 = 1 + \alpha\beta = 1 + \alpha_1\beta_1$, при всех натуральных n выполняется равенство $1+\alpha_n\beta_n = 0$. Поэтому числа $\beta_n = -\alpha_n^{-1}$ отрицательны при всех $n = 1, 2, \ldots$. Утверждение в одну сторону доказано.

Предположим теперь, что все числа β_n отрицательны. Построим еще две последовательности по правилам:

$$x_1 = 1 \ \text{ и } \ x_{n+1} = x_n\alpha_n; \quad y_1 = -\beta \ \text{ и } \ y_{n+1} = -y_n/\beta_n.$$

При этом $x_2 = \alpha$ и $y_2 = 1$. Из определений немедленно следует, что для любого натурального n выполняются рекуррентные соотношения

$$x_{n+2} = x_n - \left[\frac{1}{\alpha_n}\right] x_{n+1}, \ \ y_{n+2} = y_n - \left[\frac{1}{\alpha_n}\right] y_{n+1}.$$

Ввиду положительности α_n и отрицательности β_n последовательности x_n и y_n состоят из положительных чисел и убывают. Более того,

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(x_{n+2} + x_{n+2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(x_{n+2} + \left[\frac{1}{\alpha_n}\right] x_{n+1}\right) = \frac{1}{2}x_n.$$

Поэтому $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим также, что

$$\begin{gathered} x_{n+1}y_{n+2} - x_{n+2}y_{n+1} = \\ = x_{n+1}\left(y_n - \left[\frac{1}{\alpha_n}\right] y_{n+1}\right) - \left(x_n - \left[\frac{1}{\alpha_n}\right] x_{n+1}\right) y_{n+1} = \\ = x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1} = -(x_ny_{n+1} - x_{n+1}y_n) = \cdots = \\ = (-1)^n(x_1y_2 - x_2y_1) = (-1)^n(1+\alpha\beta). \end{gathered}$$

Так как $0 < y_n \leqslant y_1 = -\beta$, то

$$1 + \alpha\beta = \lim_{n\to\infty}(-1)^n(x_{n+1}y_{n+2} - x_{n+2}y_{n+1}) = 0.$$

А это и требовалось доказать.

Задача 8. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_s$ — убывающая последовательность целых чисел с $a_s = 0$, которая начинается с взаимно простых натуральных a_0 и a_1, а для остальных номеров a_{i+1} есть остаток от деления a_{i-1} на a_i с неполными частными $t_i = [a_{i-1}/a_i]$ (целая часть). Построим еще одну последовательность $b_0, b_1, \ldots, b_s$ с помощью рекуррентного соотношения $b_{i+1} = b_{i-1} + t_ib_i$, положив в начале $b_0 = 0$ и $b_1 = 1$. Доказать, что $b_s = a_0$.

Решение. Заметим, что

$$1 = \text{НОД}(a_0, a_1) = \text{НОД}(a_1, a_2) = \cdots = \text{НОД}(a_{s-1}, a_s) = 1.$$

Поскольку $a_s = 0$, то $a_{s-1} = \text{НОД}(a_{s-1}, a_s) = 1$. Из рекуррентных соотношений

$$a_{i+1} = a_{i-1} - t_i a_i \ \text{ и } \ b_{i+1} = b_{i-1} + t_i b_i$$

следует, что

$$d_{i+1} = a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i = a_i(b_{i-1} + t_i b_i) + (a_{i-1} - t_i a_i) b_i = \\ = a_{i-1} b_i + a_i b_{i-1} = d_i.$$

Поэтому

$$a_0 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = d_1 = d_2 = \cdots = d_s = a_{s-1} b_s + a_s b_{s-1} = b_s.$$

А это и требовалось доказать.

Задача 9. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — любая возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $T(N)$ количество всех пар (a_n, a_m), для которых $a_n + a_m = N$. Доказать, что при всех натуральных M

$$\sum_{a_k < M} (M - 3a_k) T(M - a_k) = 0.$$

Решение. По определению,

$$T(N) = \sum_{a_n + a_m = N} 1.$$

Поэтому

$$S_1 = 3 \sum_{a_k < M} a_k T(M - a_k) = 3 \sum_{a_k < M} a_k \sum_{a_n + a_m = M - a_k} 1 = \\ = 3 \sum_{a_n + a_m + a_k = M} a_k = 3 \sum_{a_n + a_m + a_k = M} a_m = 3 \sum_{a_n + a_m + a_k = M} a_n.$$

Действуя подобным образом, находим

$$S_2 = \sum_{a_k < M} M \cdot T(M - a_k) = \sum_{a_n + a_m + a_k = M} M = \\ \sum_{a_n + a_m + a_k = M} (a_n + a_m + a_k) = 3 \sum_{a_n + a_m + a_k = M} a_k.$$

Следовательно, $S_1 - S_2 = 0$. А это и требовалось доказать.

Задача 10. Пусть $\|y\|$ — расстояние от вещественного y до ближайшего целого. Для фиксированного иррационального x построим возрастающую последовательность натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots$ по правилу: $q_1 = 1$; q_{i+1} есть наименьшее из всех натуральных q, для которых $\|xq\| < \|xq_i\|$. Доказать, что $q_{i+2} \geqslant q_i + q_{i+1}$ при всех $i = 1, 2, \cdots$.

Решение. Определим последовательность целых $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ из условия $\|xq_i\| = |a_i - xq_i|$ и положим $x_i = a_i - xq_i$. Предположим, что $x_i x_{i+1} > 0$ (числа x_i и x_{i+1} одинакового знака). Тогда при $q' = q_{i+1} - q_i < q_{i+1}$

$$\|xq'\| \leqslant |(a_{i+1} - a_i) - x(q_{i+1} - q_i)| = |x_i - x_{i+1}| < |x_i| = \|xq_i\|.$$

А это противоречит выбору q_{i+1}. Значит, наше предположение неверно и $x_i x_{i+1} < 0$ при всех i. Отсюда следует, что x_i и x_{i+2} имеют одинаковый знак при всех i. Но тогда

$$\|x(q_{i+2} - q_i)\| \leqslant |(a_{i+2} - a_i) - x(q_{i+2} - q_i)| = |x_i - x_{i+2}| < |x_i| = \|xq_i\|.$$

Поскольку, по определению, q_{i+1} есть наименьшее из всех натуральных q с $\|xq\| < \|xq_i\|$, то $q_{i+2} - q_i \geqslant q_{i+1}$. А это и требовалось доказать.