# Задачи и решения городской математической олимпиады школьников

Хабаровск, 2007

## 8 класс

**Задача 1.** Какое максимальное количество воскресений может быть:
а) в одном месяце?
б) в одном году?

**Решение.** Любые семь дней подряд содержат ровно одно воскресенье. Месяц содержит меньше 35 дней, а, значит, не более 5 воскресений. Год содержит меньше $371 = 7 \cdot 53$ дней, а, следовательно, не более 53 воскресений. Оценки точные, т. к. существуют месяцы и годы, которые начинаются с воскресений.

**Задача 2.** Имеется несколько кувшинов, среди которых есть два кувшина разной формы, а также два кувшина разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два кувшина одновременно и разной формы и разного цвета.

**Решение.** Рассмотрим множество $\varPhi$ кувшинов с формами $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$ и множество $C$ кувшинов цветов $C_1$ и $C_2$. Если в их пересечении содержатся два кувшина разной формы и цвета, то задача решена. Если в этом множестве нет кувшина формы $\varPhi_1$, но есть кувшины формы $\varPhi_2$ (например, цвета $C_2$), то достаточно дополнить его до пары любым кувшином формы $\varPhi_1$. Аналогично рассматривается случай, когда в множестве $\varPhi \cap C$ нет кувшина одного цвета. Если же множество $\varPhi \cap C$ пустое, то любой кувшин формы $\varPhi_1$ и любой кувшин цвета $C_1$ образуют искомую пару.

**Задача 3.** На дискотеке выяснилось, что каждый юноша знаком с 3 девушками, а каждая девушка с тремя юношами. Докажите, что на дискотеке одинаковое количество юношей и девушек.

**Решение.** Пусть на дискотеке $x$ юношей и $y$ девушек. Найдем число $n$ знакомых пар юноша–девушка. Каждый юноша присутствует в 3 таких парах, поэтому $n = 3x$. Аналогично $n = 3y$. Значит, $x = y$.

**Задача 4.** Девять чисел $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$, $k$ отличны от нуля. Докажите, что среди чисел

$$aek, \quad dhc, \quad bfg, \quad -gec, \quad -ahf, \quad -bdk$$

есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное.

**Решение.** Произведение всех 6 чисел равно

$$-(abcdefghk)^2 < 0.$$

Поэтому в произведении должны быть и положительный, и отрицательный сомножители.

**Задача 5.** Могут ли три человека, имея один двухместный мотоцикл, преодолеть расстояние 60 км за три часа? Скорость пешехода равна 5 км/час, скорость мотоцикла (с грузом или без груза) — 50 км/час.

**Решение.** Ответ «да». Первый час двое на мотоцикле проезжают 50 км. Один из них за оставшиеся 2 часа проходит 10 км пешком, другой на мотоцикле возвращается на 10-й км пути, дожидается там третьего человека. За оставшийся час они вместе доезжают до 60-го км пути.

## 9 класс

**Задача 1.** Сторона квадрата $ABCD$ равна $a$. На диагонали $AC$ взята точка $P$ так, что $|PC| = |AC|/4$. Пусть $E$ — точка пересечения $BP$ и $CD$. Найти $|CE|$.

**Решение.** Проведем через точку $P$ прямую, параллельную $DC$, которая пересекает $BC$ в точке $K$. Легко находим, что

$$|PK| = \frac{1}{4}a \qquad \text{и} \qquad |BK| = \frac{3}{4}a.$$

Из подобия треугольников $BKP$ и $BCE$ находим, что $|EC| = a/3$.

**Задача 2.** Доказать, что для любого натурального $n$ число $n^5 - n$ делится на 5.

**Решение.** Достаточно проверить утверждение для $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (остатков от деления на 5).

**Задача 3.** Если в двухзначном числе сложить его цифры, то получится число, которое в 5 раз меньше искомого. Найти это двухзначное число.

**Решение.** По условию

$$\overline{ab} = 10a + b = 5(a + b).$$

То есть, $5a - 4b = 0$. Значит, $a = 4$ и $b = 5$.

**Задача 4.** Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

**Решение.** Утверждение немедленно следует из равенства касательных к вписанной окружности, проведенных из вершин к точкам касания сторон. При этом следует учесть, что гипотенуза — диаметр.

**Задача 5.** Пусть $x$, $y$, $z$ — вещественные числа, для которых

$$x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} < 1.$$

Доказать, что

$$x^{4000} + y^{4000} + z^{4000} < 1.$$

**Решение.** Каждое из чисел по абсолютной величине меньше, чем 1. Поэтому

$$x^{4000} + y^{4000} + z^{4000} \leqslant x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} < 1.$$

## 10 класс

**Задача 1.** Алеша и Боря выкапывают яму за два дня, Алеша и Вова за три дня, а Боря и Вова — за 6. За сколько дней они выкопают яму, если станут копать втроем.

**Решение.** Алеша и Вова за день выроют $1/3$ ямы, а Боря и Вова за день выроют $1/6$ ямы. Поэтому Алеша, Боря и 2 Вовы за день выроют $1/2$ ямы. Но, по условию, Алеша и Боря тоже за день выроют половину ямы. Значит, Вова вообще не копает и они вместе закончат работу опять за 2 дня.

**Задача 2.** Найти все пары натуральных чисел $(a, b)$, для которых

$$\frac{ab-1}{(a-1)(b-1)} \text{ — целое число.}$$

**Решение.** Заметим, что

$$\frac{ab-1}{(a-1)(b-1)} = \frac{(a-1)(b-1)+a-1+b-1}{(a-1)(b-1)} = 1 + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{a-1}.$$

Поэтому число целое только для пар $(2, 2)$ и $(3, 3)$.

**Задача 3.** Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} < 1.$$

**Решение.** Так как

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

то

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} < 1.$$

**Задача 4.** Доказать, что для любых положительных чисел $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$,

$$\sqrt{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \geqslant \sqrt{a_1a_2} + \sqrt{b_1b_2}.$$

**Решение.** Возведем обе части в квадрат и воспользуемся неравенством (среднее арифметическое и среднее геометрическое!)

$$a_1b_2 + a_2b_1 \geqslant 2\sqrt{a_1a_2b_1b_2}.$$

**Задача 5.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен $60°$, биссектрисы $AD$ и $CE$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что $OD = OE$.

**Решение.** Легко проверить, что

$$\angle EBD + \angle EOD = 180°.$$

Поэтому четырехугольник $BEOD$ вписанный. На хорды $EO$ и $OD$ опираются равные углы $EBO$ и $OBD$. Значит $EO = OD$.

## 11 класс

**Задача 1.** Найти коэффициенты $a$ и $b$ так, чтобы многочлен $ax^4 + bx^3 + 1$ делился на $(x-1)^2$.

**Решение.** При $x = 1$ многочлен должен принимать значение 0. Поэтому $a + b + 1 = 0$ и $ax^4 - (a+1)x^3 + 1 = ax^3(x-1) - x^3 + 1 = (x-1)(ax^3 - x^2 - x - 1)$. Второй сомножитель при $x = 1$ также должен быть равен нулю. То есть, $a = 3$ и $b = -4$.

**Задача 2.** Доказать, что среди $n+1$ различных натуральных чисел, меньших $2n$, есть три числа, одно из которых равно сумме двух других.

**Решение.** Пусть

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$$

— интересующие нас натуральные числа. Если утверждение неверно, то мы получим еще $n$ других натуральных чисел

$$a_{n+1} - a_n < a_{n+1} - a_{n-1} < \cdots < a_{n+1} - a_2 < a_{n+1} - a_1$$

от 1 до $2n$. Поскольку

$$(n+1) + n = 2n + 1 > 2n,$$

то мы пришли к противоречию.

**Задача 3.** Доказать, что для любого натурального $n$ функция $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ на отрезке $[-1, 1]$ — многочлен.

**Решение.** Проводим индукцию по $n$ с помощью тождества

$$\cos n\alpha + cos(n-2)\alpha = 2\cos(n-1)\alpha \cdot \cos\alpha.$$

**Задача 4.** Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Доказать, что этот треугольник правильный.

**Решение.** Пусть $A$ и $B$, $C$ и $D$, $E$ и $F$ — точки пересечения окружности со сторонами $PQ$, $QR$, $RP$ треугольника $PQR$. Рассмотрим медиану $PS$. Она соединяет середины параллельных хорд $FA$ и $DC$ и поэтому перпендикулярна им. Следовательно, $PS$ является высотой треугольника $PQR$, а значит $PQ = PR$. Аналогично $PQ = QR$.

**Задача 5.** Периметр квадрата увеличили на 60%, а затем уменьшили на 60%. Как и во сколько раз изменилась площадь квадрата?

**Решение.** После увеличения сторона $a$ квадрата стала $a + 0,6 \cdot a = 1,6a$. После уменьшения она стала равна

$$1,6a - 0,6 \cdot 1,6a = \frac{16}{10} \cdot \frac{4}{10}a = \frac{16}{25}a.$$

Следовательно, площадь квадрата уменьшилась с коэффициентом $\left(\frac{16}{25}\right)^2$.