Задачи и решения краевой математической олимпиады школьников

Хабаровск, 2007

8 класс

Задача 1. Доказать, что сумма любых двенадцати последовательных чисел натурального ряда не делится на 4.

Решение. Заметим, что

$$(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+12)=12k+2\cdot 39.$$

Второе слагаемое не делится на 4, а поэтому и все число не делится на 4.

Задача 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=1.$$

Решение. Так как $x \geqslant 0$ и $\sqrt{x}<\sqrt{x+1}$, то решений нет.

Задача 3. Доказать, что для $x \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$2x+\frac{1}{2}\geqslant 2\sqrt{x}.$$

Решение. Утверждение немедленно следует из равенства

$$2x+\frac{1}{2}-2\sqrt{x}=2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Задача 4. Пусть в выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ стороны AB и BC параллельны и равны соответственно сторонам DE и

EF. Доказать, что диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке.

Решение. Так как $ABDE$ — параллелограмм, то O — точка пересечения AD и BE, делит их пополам. По той же причине O — точка пересечения BE и CF.

Задача 5. Можно ли разрезать правильный треугольник на выпуклые пятиугольники?

Решение. Да (смотри рисунок).

9 класс

Задача 1. Найти корни квадратного уравнения

$$x^2 - (2^{2007} + 1)x + 2^{2007} = 0.$$

Решение. Очевидно, что $x_1 = 1$ — корень уравнения. По теореме Виета $x_2 = 2^{2007}$ — второй корень уравнения.

Задача 2. На какую цифру оканчивается число 9^{2007}?

Решение. Так как

$$9^{2007} = 9 \cdot 9^{2006} = 9 \cdot 81^{1003},$$

и 81 в любой степени оканчивается на 1, то интересующее нас число оканчивается на 9.

Задача 3. Доказать, что для $x \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$x^2 + x \leqslant x^4 + 1.$$

Решение. Согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2.$$

Поэтому

$$1 + \frac{1}{x} \leqslant 2 \leqslant x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + x \leqslant x^4 + 1.$$

Задача 4. Угол B выпуклого четырехугольника $ABCD$ равен углу D, а диагональ AC делится другой диагональю BD пополам. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

Решение. Пусть O — точка пересечения AC и BD. Отложим на продолжении BO в сторону точки D отрезок OD', равный BO. По углу и двум прилежащим сторонам треугольник BOC равен треугольнику AOD'. Поэтому $ABCD'$ — параллелограмм. Но в таком случае угол $AD'C$ равен углу ADC. А это может быть только в случае совпадения точек D' и D.

Задача 5. При каких целых $a \geqslant 0$ число $\sqrt{a+\sqrt{a}}$ — целое?
Решение. Пусть $m = \sqrt{a+\sqrt{a}}$ — целое. Тогда

$$a+\sqrt{a} = m^2 \Rightarrow a = (m^2-a)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2-(2m^2+1)a+m^4 = 0 \Rightarrow a = \frac{2m^2+1\pm\sqrt{4m^2+1}}{2}.$$

Так как при целых $k \geqslant 1$ выполняется неравенство $(k+1)^2-k^2 = 2k+1 > 1$, то $4m^2+1$ является квадратом только для $m = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

10 класс

Задача 1. Найти остаток от деления 7^{2007} на 3.
Решение. Так как

$$7^{2007}-1 = (7-1)(7^{2006}+7^{2005}+\cdots+7+1),$$

то для некоторого целого k, $\quad 7^{2007} = 3k+1$. Следовательно, остаток равен 1.

Задача 2. Пусть для вещественных x и y выполняется неравенство $(x-1)^2+y^2 \leqslant 1$. Доказать, что

$$x^2+y^2 \leqslant 4.$$

Решение. Из исходного неравенства следует, что $|x-1| \leqslant 1 \quad \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$. Поэтому

$$x^2+y^2 = x^2-2x+1+y^2+2x-1 = (x-1)^2+y^2+2x-1 \leqslant 1+2\cdot 2-1 = 4.$$

Задача 3. Пусть квадратные уравнения

$$a_1x^2 + 2b_1x + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x^2 + 2b_2x + c_2 = 0$$

не имеют решений. Доказать, что уравнение

$$a_1a_2x^2 + 2b_1b_2x + c_1c_2 = 0$$

также не имеет решений.

Решение. Из условия следует, что

$$b_1^2 < a_1c_1 \quad \text{и} \quad b_2^2 < a_2c_2.$$

Перемножив эти неравенства, получим, что $(b_1b_2)^2 < (a_1a_2)(c_1c_2)$. Поэтому и третье уравнение не имеет решений.

Задача 4. На окружности расположено 6 различных точек. Одну из них покрасили в красный цвет, а остальные в белый. Каких выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках больше: тех, которые содержат красную точку или тех, которые не содержат ее?

Решение. Любому многоугольнику с n белыми вершинами соответствует $n+1$-угольник с добавленной красной вершиной. При этом еще остаются треугольники с красной вершиной. Таким образом, многоугольников с красной вершиной больше.

Задача 5. Пусть две стороны и медиана, исходящие из какой-нибудь вершины одного треугольника, совпадают с соответствующими элементами другого треугольника. Доказать, что они равны.

Решение. Треугольник однозначно определяется параллелограммом по его сторонам и диагонали (удвоенная медиана).

11 класс

Задача 1. Найти все натуральные m и n, для которых $m^2 - mn - 2n^2 = 13$.

Решение. Так как $4 \cdot 13 = 4m^2 - 4mn - 8n^2 = (2m-n)^2 - (3n)^2 = (2m-4n)(2m+2n)$, то $(m-2n)(m+n) = 13$. Поэтому

$$m - 2n = 1 \quad \text{и} \quad m + n = 13 \qquad \Longrightarrow \qquad m = 9 \quad \text{и} \quad n = 4.$$

Задача 2. Доказать, что $\sqrt[9]{9} < \sqrt[8]{8}$.
Решение. Заметим, что

$$\sqrt[9]{9} < \sqrt[8]{8} \iff 9^8 < 8^9 \iff \left(\frac{9}{8}\right)^8 < 8.$$

Окончательно находим

$$\left(\frac{9}{8}\right)^8 = \left(\frac{81}{64}\right)^4 < \left(\frac{88}{64}\right)^4 = \left(\frac{11}{8}\right)^4 = \left(\frac{121}{64}\right)^2 < \left(\frac{128}{64}\right)^2 = 4 < 8.$$

Задача 3. Доказать, что в любом треугольнике найдутся две стороны a и b, для которых

$$1 \leqslant \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Решение. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, расположенные в порядке неубывания. Предположим, что утверждение неверно. То есть,

$$\frac{b}{a} \geqslant \alpha \quad \text{и} \quad \frac{c}{b} \geqslant \alpha \quad \text{с} \quad \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Так как $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} = 1$, то

$$a + b \leqslant \frac{1}{\alpha}b + \frac{1}{\alpha}c \leqslant \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\right)c = c.$$

То есть, сумма двух сторон треугольника не превосходит третью, чего не может быть. Значит, выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$1 \leqslant \frac{b}{a} < \alpha, \quad 1 \leqslant \frac{c}{b} < \alpha.$$

Задача 4. Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$. Доказать, что

$$\sqrt{1-x^2} + x \leqslant \sqrt{2}.$$

Решение. Заметим, что $x = \cos\alpha$ при некотором $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда

$$\sqrt{1-x^2} + x = \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}.$$

Задача 5. Даны две концентрические окружности. В каждой из них проведено по хорде, причем хорды параллельны и равны. Доказать, что концы хорд являются вершинами прямоугольника.

Решение. Перпендикуляр, опущенный из единого центра окружностей на хорды, делит их пополам. Отсюда немедленно следует нужное утверждение.