

XIII Дальневосточная межвузовская олимпиада по математике (задачи и решения)

Хабаровск, 2011

Задача 1. Пусть \mathbb{M} — множество, состоящее из 2013 пар вещественных чисел, такое что если $(x, y) \in \mathbb{M}$, то и $(-y, x) \in \mathbb{M}$. Доказать, что $(0, 0) \in \mathbb{M}$.

Решение. Пусть $(x, y) \in \mathbb{M}$. Тогда $(x_1, y_1) = (-y, x) \in \mathbb{M}$ и $(x_2, y_2) = (-y_1, x_1) = (-x, -y) \in \mathbb{M}$. Поэтому любой ненулевой паре (x, y) соответствует другая пара $(-x, -y)$. Так как количество элементов множества \mathbb{M} нечётно, то существует пара, для которой (x, y) совпадает с $(-x, -y)$; то есть $x = -x$ и $y = -y$. Поэтому $(0, 0) \in \mathbb{M}$.

Задача 2. Пусть $r_k(x) = \text{sign}(\sin(2^{k+1}\pi x))$, где $x \in [0, 1]$, $k = 0, 1, \dots$. Доказать, что

$$\int_0^1 r_n(x)r_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 1, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

(Если $x < 0$, то $\text{sign } x = -1$; если $x = 0$, то $\text{sign } x = 0$; если $x > 0$, то $\text{sign } x = 1$).

Решение.

1) Если $m = n$, то $r_n(x)r_m(x) = r_n^2(x) = 1$, за исключением конечного числа точек x . Поэтому

$$\int_0^1 r_n(x)r_m(x) dx = \int_0^1 r_n^2(x) dx = 1.$$

2) Пусть теперь $m \neq n$ и $n < m$, $m = n+l$. Функция $r_k(x)$ постоянна на интервалах $\left(\frac{a}{2^{k+1}}, \frac{a+1}{2^{k+1}}\right)$, где $a = 0, 1, 2, \dots, 2^{k+1} - 1$. Если $x = \frac{a}{2^{k+1}} + y$, где $0 < y < \frac{1}{2^{k+1}}$, то

$$\text{sign}(\sin 2^{k+1}\pi x) = \text{sign}(\sin(\pi a + 2^{k+1}\pi y)) = (-1)^a.$$

Значит, на соседних интервалах такого вида функция $r_k(x)$ имеет разные знаки. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2^{n+1}}}^{\frac{a+1}{2^{n+1}}} r_n(x)r_m(x) dx &= (-1)^a \int_{\frac{a}{2^{n+1}}}^{\frac{a+1}{2^{n+1}}} r_{n+l}(x) dx = (-1)^a \sum_{b=0}^{2^l-1} \int_{\frac{a}{2^{n+1}} + \frac{b}{2^{n+1+l}}}^{\frac{a}{2^{n+1}} + \frac{b+1}{2^{n+1+l}}} r_{n+l}(x) dx = \\ &= (-1)^a \sum_{b=0}^{2^l-1} (-1)^b \frac{1}{2^{n+1+l}} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

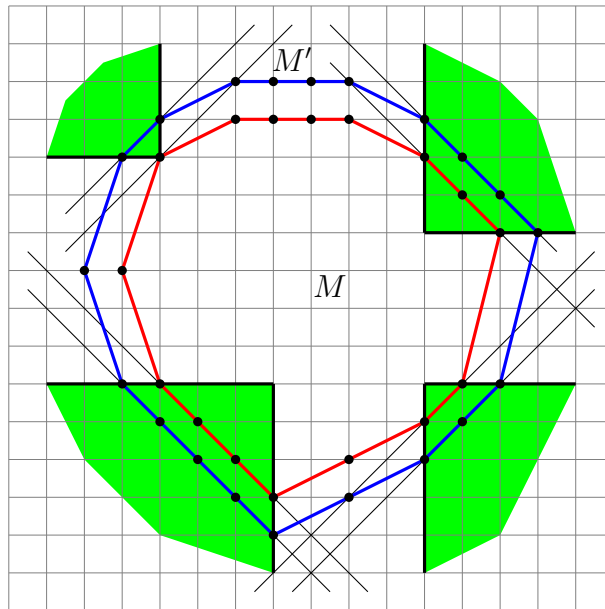
$$\int_0^1 r_n(x)r_m(x) dx = \sum_{a=0}^{2^{n+1}-1} \int_{\frac{a}{2^{n+1}}}^{\frac{a+1}{2^{n+1}}} r_n(x)r_m(x) dx = 0.$$

Задача 3. Пусть a и b — вещественные числа. Какое наибольшее число вещественных корней может иметь уравнение $e^x + ax + b = 0$?

Решение. Пример уравнения $e^x - x - 2 = 0$ показывает, что может быть два корня. Докажем, что больше корней быть не может. Предположим противное. Пусть исходное уравнение имеет более двух корней. Тогда функция $f(x) = e^x + ax + b$ имеет два соседних интервала знакопостоянства, на концах которых она равна 0. Следовательно (по теореме Ролля), найдутся две точки, в которых производная $f'(x) = e^x + a$ равна нулю. Но уравнение $e^x + a = 0$ имеет не больше одного корня. Получили противоречие. **Ответ.** 2 корня.

Задача 4. Вершины выпуклого многоугольника M находятся в узлах (точках (t, n) с целыми t и n) целочисленной решётки на координатной плоскости. Каждая вершина многоугольника M заменяется на 4 соседние (по вертикали и горизонтали) точки в узлах решётки. Многоугольник M' есть выпуклая оболочка всех полученных точек (т.е. наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все эти точки). Сколько точек решётки будет лежать на границе M' , если на границе многоугольника M лежало P точек решётки?

Решение. Проведём опорные прямые к многоугольнику M , проходящие под углом 45° к осям координат.



После перехода к многоугольнику M' отрезки границы между отрезками на опорных прямых перейдут в новые с тем же числом целых точек, а на остальных добавится по одной точке. **Ответ.** $P + 4$.

Задача 5. Пусть

$$A_0 = (2^{n-1}, 2^{n-2}, 2^{n-3}, \dots, 2^1, 2^0),$$

$$A_1 = (2^0, 2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2^2, 2^1),$$

$$A_2 = (2^1, 2^0, 2^{n-1}, \dots, 2^3, 2^2),$$

...

$$A_{n-1} = (2^{n-2}, 2^{n-3}, 2^{n-4}, \dots, 2^0, 2^{n-1})$$

— n -мерные векторы, и для некоторых вещественных x_0, \dots, x_{n-1}

$$(y_0, \dots, y_{n-1}) = x_0 A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_{n-1} A_{n-1}.$$

Доказать, что $\max\{|y_0|, \dots, |y_{n-1}|\} \geq \max\{|x_0|, \dots, |x_{n-1}|\}$.

Решение. Пусть x_0, \dots, x_{n-1} — произвольный набор вещественных чисел, одновременно не равных нулю и

$$|x_k| = \max\{|x_0|, \dots, |x_{n-1}|\}.$$

Так как

$$y_k = \sum_{0 \leq l < k} x_l 2^{n-1-k+l} + x_k 2^{n-1} + \sum_{k < l \leq n-1} x_l 2^{l-k-1},$$

то

$$|y_k| \geq |x_k| 2^{n-1} - |x_k| \sum_{l=0}^{n-2} 2^l = |x_k|.$$