INTERNATIONAL OPEN CHINESE-RUSSIAN CONFERENCE

TORUS ACTIONS: TOPOLOGY, GEOMETRY AND NUMBER THEORY

ABSTRACTS

KHABAROVSK
2013

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
Институт прикладной математики ДВО РАН
Тихоокеанский государственный университет
Министерство образования и науки Хабаровского края

ДЕЙСТВИЯ ТОРОВ: ТОПОЛОГИЯ, ГЕОМЕТРИЯ, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Тезисы докладов Международной
открытой российско-китайской конференции
2–7 сентября 2013 года, Хабаровск

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2013

УДК 517, 519
ББК В 152 л 0
Т605

Т605 Действия торов: топология, геометрия, теория чисел: тезисы докладов Международной открытой российско-китайской конференции, Хабаровск, 2–7 сентября 2013 г. / под научной ред. Бухштабера В.М., Быковского В.А. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. – 127 с.
ISBN 978-5-7389-1161-3

Международная конференция проводится при поддержке Министерства образования и науки Хабаровского края, Российского фонда фундаментальных исследований, фонда «Династия».

Утверждено к печати Ученым советом Института прикладной математики ДВО РАН.

ISBN 978-5-7389-1161-3

International Open Chinese-Russian conference
«Torus Actions: Topology, Geometry and Number Theory»
September 2 - 7, 2013
Khabarovsk, Russia

Organizers:

- Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
- Institute of Applied Mathematics, Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences
- Pacific National University
- Ministry of Education and Science of the Khabarovsk Krai

Program committee:

Victor Buchstaber (Steklov Mathematical Institute, Moscow, chairman)

Mikhail Guzev (Institute of Applied Mathematics, Vladivostok, vice-chairman)

Haibao Duan (Institute of Mathematics, China)

Fuquan Fang (Capital Normal University, China)

Zhi Lu (Fudan University, China)

Mikiya Masuda (Osaka City University, Japan)

Iskander Taimanov (Sobolev Institute of Mathematics)

Taras Panov (Moscow State University)

Alexander Podgaev (Pacific National University)

Dong Youp Suh (KAIST, South Korea)

Local organizing committee:

Victor Bykovskii (IAM FEB RAS, chairman)

Sergei Lukovenko (IAM FEB RAS, vice-chairman)

Alexander Sin (PNU, vice-chairman)

Maria Avdeeva (IAM FEB RAS, secretary)

Maria Monina (IAM FEB RAS)

Natalia Markova (PNU)

Ellina Vikhtenko (PNU)

Mark Romanov (IAM FEB RAS)

Alexey Sundukov (MES KHK)

Alexei Ustinov (IAM FEB RAS)

Plenary speakers:

Ivan Arzhantsev (Lomonosov Moscow State University)

Yaroslav Bazaikin (Sobolev Institute of Mathematics)

Victor Buchstaber (Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences)

Victor Bykovskii (Institute of Applied Mathematics)

Haibao Duan (Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences)

Fuquan Fang (University of Notre Dame, Capital Normal University, Beijing, P.R. China)

Alexandr Gaifullin (Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences)

Hiroaki Ishida (Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University, Japan)

Askold Khovanskii (Institute for System Studies, Russian Academy of Sciences)

Zhi Lu (Fudan University, China)

Dmitry Millionshchikov (Lomonosov Moscow State University)

Andrey Mironov (Sobolev Institute of Mathematics)

Jianzhong Pan (Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences)

Taras Panov (Lomonosov Moscow State University)

Andrey Raigorodskii (Lomonosov Moscow State University)

Dong Youp Suh (KAIST, South Korea)

Xuezhi Zhao (Capital Normal University, Beijing, P.R. China)

All participants of the conference are invited to submit a paper to the special volume of Far Eastern Mathematical Journal (FEMJ). FEMJ is an open access mathematical journal published by Institute of Applied Mathematics (Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences). Send your papers to `admin@iam.khv.ru`.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

TORUS QUOTIENT PRESENTATIONS AND AUTOMORPHISMS OF VARIETIES

Ivan V. Arzhantsev *(Lomonosov Moscow State University)*

Torus actions play a key role in modern algebraic and arithmetic geometry. It is well known that toric varieties can be described in terms of fans of rational polyhedral cones. A generalization of this description to actions of arbitrary complexity is given in [1], see also [5]. This approach allows to study geometric properties of varieties combinatorially.

An alternative technique is a canonical quotient presentation of a variety by a (quasi)torus action. This is related to the theory of Cox rings [7], [2] and universal torsors [9], and leads to the Gale-dual version of toric geometry. Moreover, if cones correspond to local charts, the quotient presentation realizes the variety globally.

We plan to give an overview of recent results in these directions and to discuss applications to the study of automorphisms [3], [4], [6]. An important combinatorial ingredient is the concept of Demazure's roots [8].

The work is partially supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation, project 8214, the Dynasty Foundation, the Simons-IUM grant, and the RFBR grant 12-01-00704-a.

[1] Altmann K., Hausen J. Polyhedral divisors and algebraic torus actions // Math. Ann. 334 (2006), no. 3, 557–607.
[2] Arzhantsev I., Derenthal U., Hausen J., Laface A. Cox rings // Cambridge University Press, to appear; arXiv:1003.4229; see also authors' webpages.
[3] Arzhantsev I., Flenner H., Kaliman S., Kutzschebauch F., Zaidenberg M. Flexible varieties and automorphism groups // Duke Math. J. 162 (2013), no. 4, 767–823.
[4] Arzhantsev I., Hausen J., Herppich E., Liendo A. The automorphism group of a variety with torus action of complexity one // arXiv:1202.4568.
[5] Arzhantsev I., Liendo A. Polyhedral divisors and SL_2-actions on affine T-varieties // Michigan Math. J. 61 (2012), no. 4, 731–762.
[6] Arzhantsev I., Perepechko A., Süss H. Infinite transitivity on universal torsors // arXiv:1302.2309.
[7] Cox D.A. The homogeneous coordinate ring of a toric variety // J. Alg. Geometry 4 (1995), no. 1, 17–50.
[8] Demazure M. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 3 (1970), 507–588.
[9] Skorobogatov A.N. Torsors and rational points // Cambridge Tracts in Mathematics 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

TOPOLOGY OF LINKS AND FULL SUBCOMPLEXES IN A SIMPLICIAL COMPLEX

Anton Ayzenberg *(Moscow State University, Moscow)*

Let $\Bbbk$ be a ground field. A simplicial complex K is called s-acyclic (over $\Bbbk$) if $\widetilde{H}_i(K;\Bbbk) = 0$ for $i \leqslant s$. We call K link-acyclic of degree

s (s-LA for short) if for each simplex $I \in K$ the complex $\mathrm{link}_K I$ is $(s - |I| - 1)$-acyclic. Let $[m] = \{1, \ldots, m\}$ be the set of vertices of K. We call K subcomplex-acyclic of degree s (s-SCA for short) if for each subset $J \subseteq [m]$ the full subcomplex $K_{[m] \setminus J}$ is $(s - |J| - 1)$-acyclic.

Theorem. *Conditions s-LA and s-SCA on K are the same.*

This statement was known; it was initially proved by methods of commutative algebra, then by Zeeman spectral sequence. I will present a simple proof by induction and explain how this theorem is connected to some questions in commutative algebra.

The work was partially supported by RFBR grant N 12-01-92104-YaFa and the grant of Russian Government N 2010-220-01-077.

[1] Ayzenberg A. A. Topological applications of Stanley-Reisner rings of simplicial complexes // Trans. Moscow Math. Soc. 2012, 37–65.
[2] Munkres James R. Topological results in combinatorics // Michigan Math. J., V. 31, Issue 1 (1984), pp. 113–128.

COMPLETE RIEMANNIAN METRICS WITH HOLONOMY GROUP G_2 ON DEFORMATIONS OF CONES OVER $S^3 \times S^3$

Yaroslav Bazaikin *(Sobolev Institute of Mathematics, RAS, Novosibirsk)*

We consider general class of G_2-structure on cone over the space $M = S^3 \times S^3$. This structure corresponds to asymptotically conic metric which can be written as

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \left(\eta_i + \tilde{\eta}_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{3} B_i(t)^2 \left(\eta_i - \tilde{\eta}_i\right)^2,$$

where $\eta_i, \tilde{\eta}_i$ is the standard coframe of 1-forms on $S^3 \times S^3$, whereas the functions $A_i(t), B_i(t)$ define a deformation of the cone singularity. Special initial conditions to functions $A_i(t), B_i(t)$ guarantee that the metric can be extended to complete Riemannian metric on deformation of standard cone over M. We investigate system of non-linear ODE obtained on this way and describe new solutions which correspond to new G_2 holonomy metrics.

ON THE VALUE OF RESULTANTS OF INTEGRAL POLYNOMIALS

V. I. Bernik *(Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Belarus, Minsk)*

Denote by $R(P,T)$ the resultant of polynomials $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ and $T(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ with the roots $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ and $\beta_1, \ldots, \beta_m$ respectively. It is well known that

$$R(P,T) = a_n^m b_m^n \prod_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} (\alpha_i - \beta_j).$$

Here $H(P)$ and $H(T)$ denote the heights of the polynomials P and T respectively, and $\#S$ denotes the cardinality of the countable set S.

If polynomials $P, T \in \mathbb{Z}[x]$ have no common roots then $R(P,T) \in \mathbb{Z}$ and

$$1 \le |R(P,T)| < c_1(n)Q^{2n}$$

for sufficiently large Q and some constant $c_1(n)$ if $\max(H(P), H(Q)) \le Q$. For $0 \le v \le n$ define the class of polynomials

$$\mathcal{P}(Q,v) := \{P \in \mathbb{Z}[x] : H(P) \le Q,\ \deg P = n,$$
$$1 \le |R(P,T)| < Q^{2n-2v}\}.$$

Theorem 1. *The following estimate*

$$\#\mathcal{P}(Q,v) > \begin{cases} c_2(n)Q^{2n+2-2v}, & 0 \le v \le (n+1)/2, \\ c_2(n)Q^{2n+2-2v-2(2v-n-1)/n}, & (n+1)/2 < v \le n. \end{cases}$$

holds.

The proof of Theorem 1 is based on the metric results in the theory of diophantine approximations [1,2].

[1] Beresnevich V., Bernik V., Getze F. The distribution of close conjugate algebraic numbers // Compositio Math., V. 5, (2010), P. 1165–1179.

[2] Beresnevich V. Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation // Ann. of Math., V. 175 (2), 2012, 187–235.

CONTINUOUS MG-DEFORMATIONS OF SURFACES IN EUCLIDEAN SPACE

A. I. Bodrenko *(Volgograd State University, Volgograd)*

The properties of continuous deformations of surfaces with boundary in Euclidean 3-space preserving its Grassmannian image and product of the principal curvatures are studied in this report [1].

We determine the continuous MG-deformation for simply connected oriented surface F with boundary ∂F in Euclidean 3-space. We derive the differential equations of G-deformations of surface F. We prove the set of lemmas where we derive auxiliary estimations on norms of functions characterizing MG-deformations of surface F. Then on the surface F we introduce conjugate isothermal coordinate system which simplifies the form of equations of G-deformations. From the system of differential equations characterizing G-deformations of surface F in conjugate isothermal coordinate system we go to the nonlinear integral equation and resolve it by the method of successive approximations.

We derive the equations of MG-deformations of surface F. We get the formulas of change $\Delta(g)$ and $\Delta(b)$ of determinants g and b of matrixes of the first and the second fundamental forms of surface F, respectively, for deformation $\{F_t\}$. Then, using formulas of $\Delta(g)$ and $\Delta(b)$, we find the conditions characterizing MG-deformations of two-dimensional surface F in Euclidean space E^3. We show that finding of MG-deformations of surface F brings to the following boundary-value problem (A): $\partial_{\bar{z}}\dot{w} + A\dot{w} + B\bar{\dot{w}} + E(\dot{w}) = \dot{\Psi}$, $Re\{\overline{\lambda}\dot{w}\} = \dot{\varphi}$ on ∂F, where A, B, λ, $\dot{\Psi}$, $\dot{\varphi}$ are given functions of complex variable, $\dot{w}$ is unknown function of complex variable, operator $E(\dot{w})$ has implicit form.

Then we use the theory of Fredholm operator of index zero and the theory of Volterra operator equation. Using the method of successive approximations and the principle of contractive mapping, we obtain solution of boundary-value problem (A).

[1] Бодренко А. И. Проблема Минковского в римановом пространстве. Деформации поверхностей. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2013. 144 с. ISBN 978-3-659-18088-0.

ON GENERALIZED DARBOUX SURFACES IN EUCLIDEAN SPACES

I. I. Bodrenko *(Volgograd State University, Volgograd)*

The Darboux tensor, symmetric covariant three-valent tensor Θ, was determined on two-dimensional surfaces with nonzero Gaussian curvature K in Euclidean space E^3. The term $\Theta \equiv 0$ is the characteristic condition of Daroux surfaces in E^3. The symmetric covariant three-valent tensor $\Theta_{(n)}$ is determined on hypersurfaces F^n $(n \geq 2)$ with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ in Euclidean space E^{n+1} [1]. Let $\mathcal{D}_{(n)}$ be a set of hypersurfaces F^n $(n \geq 2)$ with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ in E^{n+1}, on which the following condition holds $\Theta_{(n)} \equiv 0$. The set $\mathcal{D}_{(2)}$ becomes exhausted by Daroux surfaces in E^3.

The properties of hypersurfaces $F^n \subset E^{n+1}$ from the set $\mathcal{D}_{(n)}$ for $n > 2$ are studied in this report.

The necessary and sufficient conditions, for which hypersurface F^n with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ in E^{n+1} belongs to the set $\mathcal{D}_{(n)}$ $(n \geq 2)$, are derived. It was proved that hypersurface $F^n \subset E^{n+1}$ with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ belongs to the set $\mathcal{D}_{(n)}$ if and only if there exist coordinates of curvature $(u^1, \ldots, u^n)$, in neighborhood $O(x) \subset F^n$ of every point $x \in F^n$, such that the following conditions hold:

$$K = \psi_{(i)}(u^i) k_i^{n+2},$$

$$K^3 = \frac{k_i^{n+2}}{\psi_{(1)}(u^1) \ldots \psi_{(i-1)}(u^{i-1}) \psi_{(i+1)}(u^{i+1}) \ldots \psi_{(n)}(u^n)}, \quad i = \overline{1, n},$$

where $k_1, \ldots, k_n$ are the principal curvatures F^n, $K = k_1 k_2 \ldots k_n$ is Gaussian curvature of F^n, $\psi_{(i)}(u^i) \neq 0$ are certain functions, $i = \overline{1, n}$.

It was proved that every cyclic recurrent hypersurface $F^n \subset E^{n+1}$ with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ belongs to the set $\mathcal{D}_{(n)}$ [1].

The characteristic property of hypersphere $S^n \subset E^{n+1}$ was derived. It was proved that connected complete hypersurface F^n of constant positive Gaussian curvature $K = \text{const} > 0$ in Euclidean space E^{n+1}, belonging to the set $\mathcal{D}_{(n)}$ $(n \geq 2)$, is sphere $S^n \subset E^{n+1}$.

[1] Бодренко И. И. Обобщенные поверхности Дарбу в пространствах постоянной кривизны. Saabrücken, Germany: LAP LAMBERT Akademic Publishing, 2013. 200 с. ISBN 978-3-659-38863-7.

TORIC $(2n, k)$*-MANIFOLDS*

Victor M. Buchstaber *(Steklov Mathematical Institute, RAS, Moscow)*, **Svjetlana Terzić** *(Faculty of Science, University of Montenegro, Podgorica)*

We introduce and study the class of toric $(2n, k)$-manifolds, which are special class of smooth $2n$-dimensional manifolds equipped with the smooth action of the compact k-dimensional torus for which all fixed points are isolated. The number of fixed points for any $(2n, k)$-manifold has to be greater then k. We show that any $(2n, 1)$-manifold is homeomorphic to the standard sphere S^{2n} and that the class of $(2n, n)$-manifolds coincides with the class of the well known quasitoric manifolds. The symplectic $2n$-dimensional manifolds with Hamiltonian action of k-dimensional torus give to us an important class of $(2n, k)$-manifolds. Special attention we devote to the description of $(2n, k)$-structure on the complex Grassmann manifolds. We show that our new structure is non-trivial generalization of the quasitoric structure. Our results open the ways for new applications and development of toric topology methods.

Assume we are given smooth, closed manifold M^{2n} equipped with a smooth, effective action of the torus T^k, where $1 \leq k \leq n$, such that:

A1: The action of T^k has only isolated fixed points.

A2: There is T^k-equivariant map $\mu : M^{2n} \to \mathbb{R}^k$ whose image is a

k-dimensional convex polytope P, where $\mathbb{R}^k$ is considered with trivial T^k-action. The map μ gives the bijection between the set of fixed points and the set of vertices of the polytope P.

A3: There is a smooth atlas $\mathfrak{M} = \{(M_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ with a homeomorphisms $\varphi_i : M_i \to \mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$ for the fixed identification $\approx$, such that any chart M_i is T^k-invariant, its closure is M^{2n} and contains exactly one fixed point x_i with $\varphi_i(x_i) = (0, \dots, 0)$.

A4: For any chart (M_i, φ_i) it is given the homomorphism $\alpha_i : T^k \to T^n$ such that the homeomorphism φ_i is equivariant: $\varphi_i(tm_i) = \alpha_i(t)\varphi_i(m_i)$, $t \in T^k$, $m_i \in M_i$.

In order the formulate the last axiom, we need to introduce some additional notions. The homomorphism $\alpha_i : T^k \to T^n$ can be written as $\alpha_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n)$, where $\alpha_i^j : T^k \to S^1$. These characters writes as $\alpha_i^j(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}\langle\Lambda_i^j, t\rangle}$ where $\Lambda_i^j \in \mathbb{Z}^k$ are the weight vectors for the representation of T^k in $\mathbb{C}^n$. All vectors Λ_i^j are non zero since the action of T^k on $\mathbb{C}^n$ has one fixed point. The vectors Λ_i^j gives an integral $k \times n$ weight matrix W_i. Since the kernel of the homomorphism α_i is discrete the rang of the matrix W_i equals to k. Using matrix W_i we define the map $\mu_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^k$ by

$$\mu_i(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \alpha_i^j.$$

We have that $\Im\mu_i = C_i = cone(\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n) \subset \mathbb{R}^k$.

For each vertex $v_i = \mu(x_i)$ of the polytope P denote by $C_{P,i}$ a convex cone with the vertex v_i generated by the edges of the polytope P having v_i as a vertex. Note that each C_i has exactly n generating vectors for any k, while for $k < n$ the number of generating vectors for the cone $C_{P,i}$ might be less then n, as we will show. Nevertheless we require the following:

A5: For any chart M_i there is a homeomorphism of the cones $\phi_i : C_i \to C_{P,i}$ such that $\phi_i \circ (\mu_i \circ \varphi_i) = \mu$.

Quasitoric manifolds. It follows directly from the axioms of the quasitoric manifolds that they are $(2n, n)$-manifolds. In this case the polytope P is simple. Consider all its facets $\{F_j\}$, $1 \leq j \leq m$ given in some fixed order. In the construction of quasitoric manifolds the key role plays the characteristic function $\xi : \{F_j\} \to \mathbb{Z}^n$. Consider the facets $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ whose intersection is the vertex v_i and the matrix V_i whose column-vectors are $\xi(F_{i_1}), \dots, \xi(F_{i_n})$, where $i_1 < \dots < i_n$. According to the condition (Davis-Januszkiewicz $*$-condition) on the map ξ we have that determinant of the matrix V_i equals ± 1. Therefore, it is defined an integral matrix $W_i = V_i^{-1}$. This matrix exactly plays the role of W_i in our construction of $(2n, k)$-manifolds. The vice versa is true: any $(2n, n)$-manifold has the canonical quasitoric structure.

Spheres S^{2n}. The classical results of differential topology give that any $(2n, 1)$-manifold is homeomorphic to the standard sphere

S^{2n}. We show the vice versa: the standard sphere S^{2n} has the canonical structure of $(2n, 1)$-manifold for any n. We do it by representing the sphere S^{2n} as the hypersurface $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 + r^2 = 1$ in $\mathbb{R}^{2n+1} \approx \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ and considering the action of the circle S^1 defined by $t(z_1, \ldots, z_n, r) = (tz_1, \ldots, tz_n, r)$.

Complex Grassmann manifolds $G_{k+1,l}$. The compact torus T^{k+1} acts canonically on the Grassmann manifold $G_{k+1,l} = U(k+1)/U(l) \times U(k-l+1)$ inducing an effective action of T^k. We show that this action gives on $G_{k+1,l}$ the canonical structure of $(2l(k-l+1), k)$-manifold. For the map $\mu : G_{k+1,l} \to P$ we use the Gel'fand-Serganova moment map and its image is hypersimplex $\Delta_{k+1,l}$. Each vertex of this hypersimplex has $l(k-l+1)$ edges and $\Delta_{k+1,l}$ is simple iff $l = 1$ or $l = k$. Note that in this case the cone C_i is generated by the same number of vectors as the cone $C_{P,i}$.

Complex projective spaces $\mathbb{C}P^n$. It is well known that $G_{k+1,l}$ is an algebraic submanifold in $\mathbb{C}P^n$, where $n = \binom{k+1}{l} - 1$. We show that described above $(2l(k-l+1), k)$-structure on $G_{k+1,l}$ can be extended to $(2n, k)$-structure on $\mathbb{C}P^n$. For that we consider the action of T^k on $\mathbb{C}P^n$ induced by the representation $T^k \to T^n$ given by the l-th exterior power $\mathbf{\Lambda}^{\mathbf{l}}$ of the standard representation of T^{k+1}. We show that the corresponding polytope is again hypersimplex $\Delta_{k+1,l}$. Each cone C_i has $n = \binom{k+1}{l} - 1$ generating vectors, while the number of edges at a vertex for $\Delta_{k+1,l}$ is $l(k-l+1)$. Nevertheless, we show that A5 is satisfied: these cones are homeomorphic.

Borel construction and orbit spaces. In the theory of G-manifolds the important role plays the Borel construction $B(M) = EG \times_G M$ with canonical projections $B(M) \to BG$ and $B(M) \to M/G$. In the case of $(2n, k)$-manifold, to each chart M_i corresponds T^k-invariant closed space $Y_i = M - M_i$. We obtain the pair $(B(M), B(Y_i))$ and have that $B(M)/B(Y_i)$ is the Thom space of n-dimensional complex vector bundle over BT^k induced by the representation $\alpha_i : T^k \to T^n$. In the case of quasitoric manifolds the space $B(M)$ is known as Davis-Januszkiewicz space. For $(2n, k)$-manifolds, where $k < n$, the canonical map $M/T^k \to P$ is not a homeomorphism. The cell structure of $B(M)$ is defined by the combinatorics of the polytope P and the cell structure of the orbit space M/T^k. We describe the Borel construction and the orbit spaces for the examples we consider. For $(2n, 1)$-structure on S^{2n} we have $B(S^{2n}) = \mathbb{C}P^\infty/\mathbb{C}P^{n-1}$ and the canonical map $B(S^{2n}) \to S^{2n}/T^1$ is given by the Puppe exact sequence for the pair $(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{C}P^{n-1})$. In the case of $G_{k+1,l}$ there is the homeomorphism $Gr_l(\eta_1 + \ldots + \eta_{k+1}) \to \mathbb{C}P^\infty \times B(G_{k+1,l})$, where $\eta_j \to \mathbb{C}P^\infty$ are the universal line bundles and $Gr_l(\eta_1 + \ldots + \eta_{k+1})$ is l-Grassmannization of the fibration $\eta_1 + \ldots + \eta_{k+1} \to \prod \mathbb{C}P^\infty$. For $\mathbb{C}P^n$ there is the homeomorphism $\mathbb{C}P(\mathbf{\Lambda^1}(\eta_1 + \ldots + \eta_{k+1})) \to \mathbb{C}P^\infty \times B(\mathbb{C}P^n)$. These homeomorphisms allow us to explicitly describe the cohomology ring of the Borel construction for our examples.

For $(2n, 1)$-structure on S^{2n} we obtain $S^{2n}/T^1 = \partial P * \mathbb{C}P^{n-1}$, where $P = [-1, 1]$. The case of $G_{4,2}$ gives the non-trivial example of

$(2n, n-1)$-manifold for $n = 4$. In this case we prove that $G_{4,2}/T^3 \cong S^5 \cong \partial\Delta_{4,2} * \mathbb{C}P^1$. Moreover, we prove that $\mathbb{C}P^5/T^3 = \partial\Delta_{4,2} * \mathbb{C}P^2$ and the equivariant map $G_{4,2} \to \mathbb{C}P^5$ induces the natural embedding $\partial\Delta_{4,2} * \mathbb{C}P^1 \to \partial\Delta_{4,2} * \mathbb{C}P^2$. The orbit space M/T^k for $(2n, k)$-manifold in general does not have to be homotopy equivalent to $\partial P * X$ for some space X. It can be seen in the case of $(2 \cdot 6, 4)$-manifold $G_{5,2}$.

ON REGULAR SYSTEMS OF ALGEBRAIC p-ADIC NUMBERS OF ARBITRARY DEGREE IN SHORT INTERVALS

N. Budarina *(Khabarovsk Division IAM FEB RAS, Khabarovsk)*

Y. Bugeaud in [1] stated the problem of the length of the interval depends on the height of algebraic numbers, which form the regular system on this interval. In [1] it is shown that for a given finite interval I in $[-1/2, 1/2]$ the value of $T_0(\Gamma, N(\alpha), I)$ in the definition of regular system is equal to $T_0(\mathbb{Q}, N(\alpha), I) = 10^4|I|^{-2}\log^2 100|I|^{-1}$ for $n = 1$, and Beresnevich shown that $T_0(A_2, N(\alpha), I) = 72^3|I|^{-3}\log^3 72|I|^{-1}$ for $n = 2$, where A_k is the set of real algebraic numbers of degree k. Probably, there is a more strong connection between I and $T_0(A_n, N(\alpha), I)$, namely $T_0(A_n, N(\alpha), I) = c_1(n)|I|^{-(n+1)}$. Here we address to Y. Bugeaud's problem for the p-adic numbers with arbitrary n.

The Haar measure of a measurable set $S \subset \mathbb{Q}_p$ is denoted by

$\mu(S)$. For positive integer Q define the set of polynomials $\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P = n, \quad H(P) \leq Q\}$. Let $\mathcal{A}_p$ be the set of all algebraic numbers and $\mathbb{Q}_p^*$ is the extension of $\mathbb{Q}_p$ containing $\mathcal{A}_p$. Denote by $\mathcal{A}_{n,p}$ the set of algebraic numbers of degree n lying in $\mathbb{Z}_p$. The natural number $H(\alpha)$ denotes the height of $\alpha \in \mathcal{A}_p$.

Theorem 1. *Let K be a finite disk in $K_0 \subset \mathbb{Z}_p$. Then there are positive constants $c_2(n), c_3(n)$ and a positive number $T_0 = c_3(n)\mu(K)^{-(n+1)}$ such that for any $T \geq T_0$ there exist numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathcal{A}_{n,p} \cap K$ such that*

$$H(\alpha_i) \leq T^{1/(n+1)}(1 \leq i \leq t),\ |\alpha_i - \alpha_j|_p \geq T^{-1}(1 \leq i < j \leq t),$$
$$t \geq c_2(n)T\mu(K).$$

Note that from Theorem 1 it follows that the set $\mathcal{A}_{n,p}$ with the function $N(\alpha) = H^{n+1}(\alpha)$ forms a regular system in K_0.

Let $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$. Denote by $\bar{\mathcal{L}}_n = \bar{\mathcal{L}}_n(Q, \delta_0, K)$ the set of $w \in K$ for which the system $|P(w)|_p < Q^{-(n+1)}$, $|P'(w)|_p < \delta_0$ has a solution in polynomials $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. The proof of Theorem 1 is based on the following metric result.

Theorem 2. *For any real number s, where $0 < s < 1$, there exists a constant δ_0, which satisfies the following property. For any disk K in K_0 there exists a sufficiently large number $Q_0 = Q_0(K)$ such that for $\mu(K) > c_4(n)Q_0^{-1}$ and sufficiently large constant $c_4(n)$, which does not depend on Q_0, and for all $Q > Q_0$ the estimate*

$\mu(\bar{\mathcal{L}}_n) < s\mu(K)$ *holds.*

[1] Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers // Cambridge Tracts in Mathematics, 160. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

GENERALIZED CONFIGURATION SPACES

Junda Chen, Zhi Lü *(School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai)* **and Jie Wu** *(Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore)*

We consider two kinds of generalized configuration spaces–orbit configuration space and graphic configuration space.

1. Orbit configuration spaces

We first investigate the orbit configuration spaces of some equivariant closed manifolds over simple convex polytopes in toric topology, such as small covers, quasi-toric manifolds and (real) moment-angle manifolds; especially for the cases of small covers and quasi-toric manifolds. These kinds of orbit configuration spaces are all non-free and noncompact, but still built via simple convex polytopes. Our purpose is to explore the essential link between topology and geometry of these kinds of orbit configuration spaces and combinatorics of simple convex polytopes.

Definition 1.1. *Let G be a topological group and let M be a G-space. The* (*ordered*) *orbit configuration space $F_G(M, k)$ is* *defined by*

$$F_G(M,k) = \{(x_1,\dots,x_k) \in M^{\times k} \mid G(x_i) \cap G(x_j) = \emptyset \text{ for } i \neq j\}$$

with subspace topology, where $k \geq 2$ and $G(x)$ denotes the orbit at x.

If the group G acts properly discontinuously on a manifold M, there are various fibrations available related to $F_G(M,k)$ [3]. Thus the standard methods of spectral sequences in algebraic topology can be used for studying the cohomology of $F_G(M,k)$. In particular, the cohomology of $F_{\mathbb{Z}_2}(S^n,k)$ has been determined in [4], where $\mathbb{Z}_2$ acts (freely) on S^n by antipodal map. In the case that G does not freely on a manifold M, the determination of the homotopy type or cohomology of $F_G(M,k)$ becomes much harder because algebraic topology lacks sufficiently effective tools.

Davis–Januszkiewicz theory [1] provides us two classes of particularly nicely behaved manifolds over simple convex polytopes–small covers, quasi-toric manifolds. There are strong links between topology and geometry of these equivariant manifolds and combinatorics of polytopes. Here we shall put these equivariant manifolds into the framework of orbit configuration spaces.

Let $\pi_d : M \longrightarrow P$ be a dn-dimensional G_d^n-manifold over a simple convex n-polytope P, $d = 1,2$, where M is a small cover and $G_1^n = \mathbb{Z}_2^n$ when $d = 1$, and a quasi-toric manifold and $G_2^n = T^n$ when $d = 2$.

Our first result is an explicit formula for the Euler characteristic of $F_{G_d^n}(M,k)$ in terms of the h-vector $(h_0, h_1, ..., h_n)$ of P. Let $\mathbf{h}_P(t) = h_0 + h_1 t + \cdots + h_n t^n$ be a polynomial in $\mathbb{Z}[t]$.

Theorem 1.1. *The Euler characteristic of $F_{G_d^n}(M,k)$ is*

$$\chi(F_{G_d^n}(M,k)) = \begin{cases} (-1)^{kn} \sum\limits_{I=(k_1,\dots,k_s)} \mathcal{C}_I \prod\limits_{i=1}^{s} \mathbf{h}_P(1-2^{k_i}) & \text{if } d=1 \\ \chi(F(M,k)) = \sum\limits_{I=(k_1,\dots,k_s)} \mathcal{C}_I \big(\mathbf{h}_P(1)\big)^s & \text{if } d=2 \end{cases}$$

where $I = (k_1, ..., k_s)$ runs over all partitions of k, $\mathcal{C}_I = \frac{k!(-1)^{k-s}}{r_1!r_2!\cdots r_s!k_1k_2\cdots k_s}$ and r_i is the number of times that k_i appears in I.

Next we shall be concerned with the homotopy type of $F_{G_d^n}(M,k)$ for $n \geq 1$. We first consider the case $n = 1$.

Theorem 1.2. *When $d = 1$, $F_{\mathbb{Z}_2}(M,k)$ has the same homotopy type as $k!2^{k-2}$ points, and when $d = 2$, $F_{S^1}(M,k)$ has the same homotopy type as a disjoint union of $k!$ copies of T^{k-2}.*

For general M and k, the spaces $F_{G_d^n}(M,k)$ can be expressed as an intersection of the subspaces of $M^{\times k}$ which are homeomorphic to $M^{\times(k-2)} \times F_{G_d^n}(M,2)$ under coordinate permutations. Thus the study on $F_{G_d^n}(M,2)$ is the first step for the general cases.

Theorem 1.3. *Let $\pi_d : M \longrightarrow P$ be a dn-dimensional G_d^n-manifold over a simple convex polytope P. Then there is an equiv-*

ariant strong deformation retraction of $F_{G_d^n}(M,2)$ *onto*

$$X_d(M,2) = \bigcup_{\substack{F_1,F_2\in\mathcal{F}(P)\\ F_1\cap F_2=\emptyset}} (\pi_d^{-1})^{\times 2}(F_1\times F_2)$$

where $\mathcal{F}(P)$ *is the set of all faces of* P.

The Mayer-Vietoris spectral sequence $E^*_{p,q}(X_d(M,2))$ with $\mathbb{Z}$ coefficients, which converges to $H_*(X_d(M,2)) \cong H_*(F_{G_d^n}(M,2))$.

Theorem 1.4. (1). *There is the following isomorphism*

$$E^2_{p,q}(X_1(M,2);\mathbb{Z}_2) = E^2_{p,2q}(X_2(M,2);\mathbb{Z}_2).$$

(2). *For the case* $d=2$, *the associated Mayer-Vietoris spectral sequence of the space* $X_2(M,2)$ *collapses at the* E_2 *term.*

2. Graphic configuration spaces

Let Γ be a simple graph on vertex set $[m]=\{1,...,m\}$, and X a topological space. A *graphic configuration space* is defined as follows:

$$F(X,\Gamma) = \{(x_1,\dots,x_k)\in X^{\times m} | x_i\neq x_j \text{ if } \{i,j\}\in E_\Gamma\}$$

where E_Γ denotes the set of all edges of Γ. Such a notion was introduced by M. Eastwood and S. Huggett [2].

Theorem 2.1. *Let* M *be a compact triangulated homology m-manifold. Then the Euler characteristic*

$$\chi(F(M,\Gamma)) = P_\Gamma(\chi(M))$$

where $P_\Gamma(t)$ is the chromatic polynomial of graph Γ.

We define a ring $\mathbb{Z}_2(\Gamma)$ over $\mathbb{Z}_2$ of Γ, which is called the *chromatic ring* of Γ. Then we may give a description of $P_\Gamma(t)$.

Theorem 2.2. *Let $H(\mathbb{Z}_2(\Gamma), t)$ be the Hilbert polynomial of chromatic ring $\mathbb{Z}_2(\Gamma)$. Then*

$$P_\Gamma(t) = t^n H(\mathbb{Z}_2(\Gamma), -\frac{1}{t}).$$

Research of the first author and the second author is supported by grants from NSFC (No. 10931005), Shanghai NSF (No. 10ZR1403600) and RFDP (No. 20100071110001). Research of the third author is supported in part by the AcRF Tier 1 (WBS No. R-146-000-137-112) and Tier 2 (WBS No. R-146-000-143-112) of MOE of Singapore and a grant (No. 11028104) of NSFC.

[1] Davis M. and Januszkiewicz T. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions, Duke Math. J. 61 (1991), 417–451.

[2] Michael Eastwood and Stephen Huggett. Euler characteristics and chromatic polynomials, European Journal of Combinatorics, V. 28:6, August (2007), 1553–1560.

[3] Xicoténcatl M. A. Orbit configuration spaces, infinitesimal braid relations in homology and equivariant loop spaces. Thesis (Ph.D.)-University of Rochester. 1997.

[4] Xicoténcatl M. A. On orbit configuration spaces and the rational cohomology of $F(R\mathrm{P}^n, k)$. Une dégustation topologique [Topological morsels]: homotopy theory in the Swiss Alps (Arolla, 1999), 233–249, Contemp. Math., 265, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

CLASSIFICATION OF TORUS MANIFOLDS AND WEDGE OPERATIONS

Suyoung Choi *(Department of Mathematics, Ajou University, Suwon)*

A fundamental result of toric geometry is that there is a bijection between toric varieties and fans. More generally, it is known that some class of manifolds having well-behaved torus actions, called topological toric manifolds M^{2n}, can be classified in terms of combinatorial data containing simplicial complexes K with m vertices. We remark that topological toric manifolds are a generalization of smooth toric varieties. The number $m - n$ is known as the Picard number when M^{2n} is a compact smooth toric variety.

In this paper, we investigate the relationship between the topological toric manifolds over a simplicial complex K and those over the complex obtained by simplicial wedge operations from K. This work is jointly with Dr. Hanchul Park, Ajou University.

BUCHSTABER INVARIANT, 2-SURFACES AND MATROIDS

N. Yu. Erokhovets *(MSU, Moscow & YSU, Yaroslavl)*

The Buchstaber invariant is a combinatorial invariant of simple polytopes and simplicial complexes that comes from toric topology [1]. With each simplicial $(n-1)$-complex K on m vertices we can associate an $(m+n)$-dimensional moment-angle complex $\mathcal{Z}_K$ with a canonical action of a torus T^m. The equivariant topology of $\mathcal{Z}_K$ depends only on the combinatorics of K, which gives a tool to study the combinatorics of simplicial complexes in terms of the algebraic topology of moment-angle complexes and vice versa. A *Buchstaber invariant* $s(K)$ is equal to the maximal dimension of torus subgroups $H \subset T^m$, $H \simeq T^k$, that act freely on $\mathcal{Z}_K$. In 2002 V.M. Buchstaber stated the problem *to find an effective description of $s(K)$ in terms of the combinatorics of K.* There is an n-dimensional analog $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ for the $\mathbb{Z}_2^m$-action. The corresponding number $s_{\mathbb{R}}(K)$ is called a *real Buchstaber invariant.* We have $s(K) \leqslant s_{\mathbb{R}}(K) \leqslant m-n$.

Lemma 1. *$s(K) \geqslant r$ if and only if there exists a mapping $\Lambda\colon [m] \to \mathbb{Z}^{m-r}$ such that for any simplex $\sigma \in K$ the vectors $\Lambda(\sigma)$ form part of some basis in $\mathbb{Z}^{m-r}$. $s_{\mathbb{R}}(K) \geqslant r$ if and only if there exists a mapping $\Lambda\colon [m] \to \mathbb{Z}_2^{m-r}$ such that for any simplex $\sigma \in K$ the vectors $\Lambda(\sigma)$ are linearly independent. Mapping Λ is called characteristic.*

Lemma 2. *$s(K) \geqslant r$ if and only if $s_{\mathbb{R}}(K) \geqslant r$ for $r \leqslant 3$. $s(K) = s_{\mathbb{R}}(K)$ for* $\dim K \leqslant 2$.

Theorem 1. (Ayzenberg, 09) *Let* $\dim K = 1$. *Then $s(K) = m - \lceil \log_2(\gamma(K)+1) \rceil$. In general case $s(K) \leqslant m - \lceil \log_2(\gamma(K)+1) \rceil$.*

Proof. We have $s_{\mathbb{R}}(K) \geqslant r$ if and only if there exists a mapping $\Lambda\colon [m] \to \mathbb{Z}_2^{m-r} \setminus \{0\}$ such that adjacent vertices have different images. This is equivalent to the fact that $\gamma(K) \leqslant 2^{m-r} - 1$.

Theorem 2. *Let* $\dim K = 2$. *Then*

$$m-1-\lceil \log_2 \gamma(K)\rceil \leqslant s(K) \leqslant$$
$$\leqslant m-1-\left\lceil \log_2 \max\left\{\frac{\gamma(K)+1}{2}, \gamma(\mathrm{lk}_K v)+1\right\}_{v\in[m]}\right\rceil.$$

In particular $s(K) = m-l-1$ *if* $\gamma(K) = 2^l$.

Proof. Let $r = \lceil \log_2 \gamma(K)\rceil$. Then there exists a mapping $\Lambda\colon [m] \to \mathbb{Z}_2^{m-r}$ that sends adjacent vertices to different vectors. For the mapping $(\Lambda, 1)\colon [m] \to \mathbb{Z}_2^{m-r} \oplus \mathbb{Z}_2$ the images of vertices of any 2-simplex are linearly independent, which gives the lower bound. Now let $\Lambda\colon [m] \to \mathbb{Z}_2^{m-r}$ be a characteristic mapping. Then the mapping $\mathrm{vert}\ \mathrm{lk}_K v \to \mathbb{Z}_2^{m-r-1}$ induced by the factor mapping $\mathbb{Z}_2^{m-r} \to \mathbb{Z}_2^{m-r}/\mathbb{Z}_2\langle\Lambda(v)\rangle$ is characteristic for $\mathrm{lk}_K v$, so $\lceil \log_2(\gamma(\mathrm{lk}_K v)+$ $+1)\rceil = |\mathrm{vert}\ \mathrm{lk}_K v| - s(\mathrm{lk}_K v) \leqslant m-1-s(K)$. This fact together with Theorem 1 give the upper bound.

Corollary 1. *For the* 2*-skeleton of an* $(m-1)$*-simplex we have* $s(\Delta^{m-1}_{(2)}) = m-1-\lceil \log_2 m\rceil$ (Ayzenberg, Masuda and Fukukawa, 09).

Corollary 2. *Let* $\mathcal{H}(K) = \frac{7+\sqrt{49-24\chi(K)}}{2}$. *Then for a triangulation* K *of a* 2*-dimensional surface we have*

$$s(K) \geqslant m-1-\lceil \log_2 [\mathcal{H}(K)]\rceil \geqslant \lceil \mathcal{H}(K)\rceil - 1 - \lceil \log_2 [\mathcal{H}(K)]\rceil.$$

The first estimate follows from the 4-color theorem for $\chi(K) = 2$ and the well-known estimate $\gamma(K) \leqslant [\mathcal{H}(K)]$, that arises from the Euler characteristics formula. Let us mention that Ringel and

Youngs proved that for all surfaces except for the Klein Bottle there exists a triangulation with equality. Philip Franklin showed that the Klein Bottle requires at most 6 colors rather than predicted 7, and built the triangulation with chromatic number equal to 6.

The second estimate follows from the inequality $m \geqslant \lceil \mathcal{H}(K) \rceil$ which can be obtained from the Euler characteristics formula $V - E + F = \chi(K)$ and the estimate $E \leqslant \frac{V(V-1)}{2}$. Ringel showed that for non-orientable surfaces this estimate is sharp except for the Klein Bottle N_2 (i.e. $\chi(K) = 0$), for which the smallest possible number m_0 is 8 rather than predicted 7, and the surface N_3 with $\chi(N_3) = -1$, for which $m_0 = 9$ rather than 8. For orientable surfaces Jungerman and Ringel showed that the estimate is sharp except for the surface M_2 of genus 2 for which $m_0 = 10$ rather than 9.

Example 1. For the sphere S^2 we have $\mathcal{H}(S^2) = 4$ and $\gamma(K) \leqslant 4$. So $s(K) = m - 3 \geqslant 1$ for any triangulation K. The minimum $s(K) = 1$ is achieved only on the boundary of the tetrahedron.

Example 2. For the projective plane $\mathbb{R}P^2$ we have $\mathcal{H}(\mathbb{R}P^2) = 6$ and $\gamma(K) \leqslant 6$. So $m - 4 \leqslant s(K) \leqslant m - 3$ for any triangulation K. There is a unique triangulation K with 6 vertices. It can be described in the following way: take a regular 5-gon with vertices labeled by numbers in $\mathbb{Z}_5$, and the center 6. There are 5 triangles $(i, i+1, 6)$ and 5 triangles $(i, i+1, i+3)$. One-skeleton $K_{(1)}$ is a full graph K_6, so $\gamma(K) = 6$. It is easy to check that the mapping

$1 \to (1,0,0)$, $2 \to (0,1,0)$, $3 \to (1,1,0)$, $4 \to (0,0,1)$, $5 \to (1,0,1)$, $6 \to (0,1,1)$ is characteristic. Thus $s(K) = m-3 = 3$. For any other triangulation K we have $m \geqslant 7$, so $s(K) \geqslant m-4 \geqslant 3$. So $s(K) \geqslant 3$ for any triangulation of $\mathbb{R}P^2$ and 3 is achieved on the minimal triangulation.

Example 3. For the torus T^2 we have $\mathcal{H}(T^2) = 7$ and $\gamma(K) \leqslant 7$. So $m-4 \leqslant s(K) \leqslant m-3$ for any triangulation K. There is a unique triangulation with minimal number of vertices equal to 7: take a regular 6-gon with vertices labeled by numbers in $\mathbb{Z}_6$, and the center 7. There are 6 triangles $(i, i+1, 7)$, 6 triangles $(i, i+2, i+3)$, and 2 triangles $(i, i+2, i+4)$. $K_{(1)} = K_7$, so $\gamma(K) = 7$. Assume that $s(K) = m-3$. Then there ia a characteristic mapping $[7] \to \mathbb{Z}_2^3 \backslash \{0\}$. It should be bijective. Let us take $\Lambda(1)$, $\Lambda(3)$, $\Lambda(5)$ to be the basis e_1, e_2, e_3. Since 246 is a simplex the vectors $\Lambda(2), \Lambda(4), \Lambda(6)$ can not all contain exactly one zero. So one of them should be $(1,1,1)$. Up to a symmetry and a transposition of the basis vectors we can set $\Lambda(2) = (1,1,1)$. Then from triangles 236 and 356 we have $\Lambda(6) \neq (1,0,1), (0,1,1)$ so $\Lambda(6) = (1,1,0)$. From triangles 127 and 237 we have $\Lambda(7) \neq (0,1,1), (1,0,1)$, so $\Lambda(7) = (1,1,0) = \Lambda(6)$, which is a contradiction. So $s(K) = m-4 = 3$. On the other hand we can substitute any triangle of K for three triangles formed by edges and a new vertex in the center and put to the center any nonzero vector different from the three vectors in the vertices. Then we obtain triangulation K' of T^2 with still $\gamma(K') = 7$, but $s(K') = m-3$.

We have $s(K) \geqslant 3$ for any triangulation of T^2 and 3 is achieved only on the minimal triangulation.

A matroid is a combinatorial analog of a vector configuration. Abstract simplicial complex M is called a *matroid* if for any σ_1, $\sigma_2 \in M$ with $|\sigma_1| < |\sigma_2|$ there is $i \in \sigma_2 \backslash \sigma_1$ such that $\sigma_1 \cup \{i\} \in M$. A binary matroid is a collection of all the linearly independent subsets in the configuration of m vectors in $\mathbb{Z}_2^k$. We show the connection of the Buchstaber invariant with the matroid theory. Using the results on binary matroids we describe $s_{\mathbb{R}}(K)$ in terms of subcomplexes in the Alexander dual simplicial complex $\widehat{K}$, whose maximal simplices are complements to minimal non-simplices of K.

Theorem 3. *Let $m \geqslant n+2$. Then $s_{\mathbb{R}}(K) \geqslant r$ if and only if there is an $(r-1)$-neighborly subcomplex $\widehat{M} \subset \widehat{K}$ such that $(\sigma_1 \cap \sigma_2) \cup \{i,j\} \in \widehat{M}$ for any two distinct maximal simplices σ_1, $\sigma_2 \in \widehat{M}$ and possibly coinciding vertices $i, j \notin \sigma_1 \cup \sigma_2$.*

Theorem is based on the following fact from the matroid theory: $\mathcal{C} = \{C_k \subset [m]\}$ *is a collection of minimal non-simplices of a binary matroid if and only if $\varnothing \notin \mathcal{C}$, $C_i \not\subset C_j$ for $i \neq j$, and for any distinct $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ and any $\{i,j\} \subset C_1 \cap C_2$, possibly $i = j$, there is $C_3 \in \mathcal{C}$ such that $C_3 \subset C_1 \cup C_2 \setminus \{i,j\}$.*

The author is grateful to S. K. Lando for giving the information about chromatic numbers of surfaces.

[1] Buchstaber V. M., Panov T. E. Toric Topology // arXiv:1210.2368.

[2] Erokhovets N. Yu. Theory of the Buchstaber invariant of simplicial complexes and convex polytopes // Accepted to Trans. Moscow Math. Soc.

THE EQUIVARIANT COHOMOLOGY RINGS OF $(n-k,k)$ *SPRINGER VARIETIES*

Y. Fukukawa, T. Horiguchi *(Osaka City University, Osaka)*

Given a nilpotent operator $N\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, the Springer variety $\mathcal{S}_N$ is defined to be the following subvariety of a flag variety $Flags(\mathbb{C}^n)$:

$$\mathcal{S}_N = \{V_\bullet \in Flags(\mathbb{C}^n) \mid NV_i \subseteq V_i \text{ for all } 1 \leq i \leq n\},$$

where $V_\bullet = (V_i) : 0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_{n-1} \subseteq V_n = \mathbb{C}^n$ such that $\dim_{\mathbb{C}} V_i = i$. When N is a nilpotent matrix in a Jordan canonical form with weakly decreasing sizes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ of Jordan blocks, $\mathcal{S}_N$ is called the $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ Springer variety. It admits an S^1-action induced from the natural T^n-action on $Flags(\mathbb{C}^n)$, where the S^1-subgroup of T^n is given by $\{(g^n, g^{n-1}, \ldots, g) \mid g \in \mathbb{C},\ |g| = 1\}$. Our concern is an explicit description of the S^1-equivariant cohomology ring of $\mathcal{S}_N$. We give an explicit description of the equivariant cohomology ring of $(n-k,k)$ Springer variety under some assumption, which is that the projection map : $H^*_{T^n}(Flags(\mathbb{C}^n);\mathbb{C}) \to H^*_{S^1}(\mathcal{S}_N;\mathbb{C})$ induced from the inclusions of groups $S^1 \to T^n$ and spaces $\mathcal{S}_N \to Flags(\mathbb{C}^n)$ is surjective. The assumption in the above is known to be satisfied when $k = 1, 2$ ([1]) but unknown for other values of k. Now, we try to prove that the assumption in the above is satisfied when $k \geq 3$.

[1] Dewitt B. and Harada M. Poset pinball, highest forms, and $(n-2,2)$ Springer varieties, arXiv:1012.5265v2.

COXETER GROUPS, SMALL COVERS, AND REALISATION OF CYCLES

A. A. Gaifullin *(Steklov Mathematical Institute, Moscow)*

The following classical question is due to Steenrod (late 1940s) and is usually called the problem on realisation of cycles:

Given a topological space and an integral homology class of it, can we realise this homology class as a continuous image of the fundamental class of an oriented closed smooth manifold?

The classical approach to this problem is based on Thom's transversality theorem and tools of algebraic topology. It was developed in 1950s-1970s by Thom, Milnor, Novikov, Buchstaber, and Sullivan.

Since 2007 the author has developed a new constructive approach to Steenrod's problem based on an explicit construction for a manifold that realises a multiple of the given homology class, see [1], [2]. This construction involves right-angular Coxeter groups and special convex polytopes called permutahedra. Using this approach the author managed to prove that in every dimension n there exists a manifold M^n possessing the following *Universal Realisation of Cycles* (*URC*) property:

For each topological space X and each homology class $z \in H_n(X;\mathbb{Z})$, there is a finite-sheeted covering $\widehat{M}^n$ of M^n, and a continuous mapping $f\colon \widehat{M}^n \to X$ such that $f_*[\widehat{M}^n] = qz$ for some $q \neq 0$.

The talk will be devoted to the problem of studying of the class of all URC-manifolds, i. e., manifolds that satisfy the URC-condition. We shall find many examples of URC-manifolds among small covers of simple convex polytopes. In particular, in dimension 4 we shall present an example of a hyperbolic (i. e. possessing a Riemannian metric of constant negative sectional curvature) URC-manifold, namely, the universal Abelian cover of the regular 120-cell. We shall also discuss the relation of URC-manifolds to simplicial volume. Most of these results are published in [3].

[1] Gaifullin A. A. Explicit construction of manifolds realising prescribed homology classes // Russian Math. Surveys, V. 62, Issue 6, 2007.

[2] Gaifullin A. A. The manifold of isospectral symmetric tridiagonal matrices and realization of cycles by aspherical manifolds // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, V. 263, 2008.

[3] Gaifullin A. A. Universal realisators for homology classes // Geometry & Topology, V. 17, Issue 3, 2013.

UNIQUENESS OF THE DIRECT DECOMPOSITION OF TORIC MANIFOLDS

M. Hatanaka *(Department of Mathematics, Faculty of Science, Osaka City University, Osaka)*

In this talk, I will talk about the uniqueness of the direct decomposition of a toric manifold. I first talk that the direct decomposition of a toric manifold as algebraic varieties is unique up to order of the factors. An algebraically indecomposable toric manifold happens to decompose as smooth manifold and no criterion is known for two toric manifolds to be diffeomorphic, so the unique decomposition problem for toric manifolds as smooth manifolds is highly nontrivial. But this problem is affirmative if the complex dimension of each factor in the decomposition is less than or equal to two. Furthermore, the same argument shows that the unique decomposition problem in the family below containing toric manifolds of complex dimension less than or equal to two is affirmative;

$$p_2\mathbb{C}P^2 \sharp q_2\overline{\mathbb{C}P^2} \sharp r(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1), S^{2n}\ (n \geq 1).$$

[1] Hatanaka M. Uniqueness of the direct decomposition of toric manifolds, arXiv:1304.0891.

HOMOTOPY COLIMITS OF DIAGRAMS ON GENERALIZED TORI

A. A. Husainov *(KnAGTU, Komsomolsk-on-Amur)*

We study the homotopical properties of trace monoid partial actions on simplicial sets. A diagram of simplicial sets on the category of cubes in a generalized torus corresponds to an arbitrary diagram of simplicial sets on the factorization category of a trace monoid. We prove that the homotopy colimits of these diagrams are weak homotopy equivalent.

We will use the notation and definitions of [1]. Further E is a finite totally ordered set. For any irreflexive symmetric relation $I \subseteq E \times E$, the free partially commutative monoid $M(E, I)$ is called the *trace monoid*. Let $\mathfrak{F}M(E, I)$ denote its category of factorizations. A *generalized torus* is a semicubical set consisting of sets

$$T_n(E, I) = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^n \mid e_1 < \dots < e_n \; \& \\ \& \; (e_i, e_j) \in I \text{ for all } 1 \leqslant i < j \leqslant n\},$$

with $T_0(E, I) = \{1\}$. The face maps are defined by $\partial_i^{n,\varepsilon}(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$ for $1 \leqslant i \leqslant n$, and $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

T h e o r e m. *For any functor $D : (\mathfrak{F}M(E, I))^{op} \to Set^{\Delta^{op}}$ into* *the category of simplicial sets, there is a weak homotopy equivalence*

$$hocolim^{(\mathfrak{F}M(E,I))^{op}} D \xrightarrow{\cong} hocolim^{(\square_+/T(E,I))^{op}} \overline{D},$$

where $\overline{D}(e_1, \ldots, e_n) = D(e_1 \cdots e_n)$.

This reinforces the isomorphism of Leech homology groups of the trace monoid with the homology groups of diagrams on the category of cubes in the generalized torus [1, Theorem 2.15] and allows us refine the information about the Baues-Wirsching homology groups of a trace monoid partial action category previously obtained in [2, Theorem 3].

The work is performed as a part of the Strategic Development Program at the National Educational Institutions of the Higher Education, N 2011-PR-054.

[1] Khusainov A. A. Cubical homology and Leech dimension of free partially commutative monoids // Sbornik: Mathematics. 2008. V.199, N 12. P.1859-1884.

[2] Husainov A. A. The Homology of Partial Monoid Actions and Petri Nets // Appl. Categor. Struct. 2012. DOI: 10.1007 / s10485-012-9280-9, Springer.

COMPLEX MANIFOLDS WITH MAXIMAL TORUS ACTIONS AND SEVERAL SIMILARITIES BETWEEN THEM AND TORIC VARIETIES

Hiroaki Ishida *(Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University)*

When a compact torus G acts on a connected smooth manifold M effectively, one can see that $\dim G + \dim G_x \leq \dim M$ for any $x \in M$. For example, if M has a G-fixed point then $2\dim G \leq \dim M$ and if the G-action is locally free (that is, the isotropy subgroup is finite at each point) then $\dim G \leq \dim M$. Motivated by this fact, we say that an effective action of a compact torus G on a connected smooth manifold M is *maximal* if there exists a point $x \in M$ such that $\dim G + \dim G_x = \dim M$. In [3], Panov and Ustinovsky have shown that the moment-angle manifold of a star-shaped sphere admits a complex structure invariant under the natural torus action if it is even dimensional. It is easy to see that the complex structures on moment-angle manifolds constructed by Panov and Ustinovsky are invariant under the natural torus actions. So, the moment-angle manifolds are typical examples of complex manifolds with maximal torus actions. In [2], it has been shown that if M is a compact complex manifold of complex dimension n with an $(S^1)^n$-action having a fixed point, then M is equivariantly biholomorphic to a nonsingular complete toric variety. In [1], it has been shown that compact complex manifolds with maximal torus action can be described in terms of fans and complex vector (sub)spaces, like toric varieties.

I would like to explain this story and discuss their similar properties to toric varieties'. Especially, we focus on their plurigenera and Lie algebras of infinitesimal automorphisms.

[1] Ishida H. Complex manifolds with maximal torus actions, preprint, available at arXiv:1302.0633.
[2] Ishida H. and Karshon Y. Completely integrable torus actions on complex manifolds with fixed points, to appear in Math. Res. Lett., available at arXiv:1203.0789.
[3] Panov T. and Ustinovsky Y. Complex-analytic structures on moment-angle manifolds, Mosc. Math. J. 12 (2012), no. 1, 149–172.

ON MOD-P HOMOLOGY CIRCLES

Xifeng Jin and Li Yu *(Nanjing University, Nanjing)*

We study 2-dimensional finite CW-complexes K whose homology groups with $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-coefficients (p is a prime) agree with a circle (or a wedge of circles).

In particular, we show that the fundamental group of any such K admits a very special type of subnormal series of infinite length. Moreover, we will discuss some applications of our results in knot theory.

UNIVERSAL GROBNER BASIS AND TORIC COMPACTIFICATIONS

A. G. Khovanskii *(Institute for System Studies of the Academy of Sciences of Russia, Moscow)*

Let $A \subset \mathbb{Z}^n$ be the set of exponents of a finite set χ_A of characters of the torus $(C^*)^n$. An algebraic variety $X \subset (C^*)^n$ is called *A-variety* if it can be definite by a system $P_1 = \cdots = P_k = 0$ where all Laurent polynomials P_i are linear combinations of the characters from χ_A (we do not assume that $k = n - \dim X$). A toric compactification $M \supset (C^*)^n$ is called *A-toric compactification* if for any A-variety $X \subset (C^*)^n$ the closure $\overline{X} \subset M$ does not intersect any orbit $O \subset M$ satisfying the inequality $\dim O + \dim X < n$.

Theorem 1. *For any finite set $A \subset \mathbb{Z}^n$ there exists a smooth A-toric compactification of $(C^*)^n$.*

Our proof of the theorem 1 relays on the Grobner basis technique. Consider an ideal I in the ring $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ of polynomials in n variables. A finite subset $G \subset I$ is call an *universal Grobner basis* of the ideal I if for any Grobner ordering $\prec$ of the semigroup $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ a Grobner basis of I with respect to the ordering $\prec$ can be chosen from the subset $G \subset I$.

Theorem 2. *For any ideal $I \subset \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ there exists a universal Grobner basis G in I.*

Theorem 2 is known. In the talk I will present its proof (a simplified version of the proof from [1]). I also will sketch of a proof of the theorem 1.

The ring of conditions for an n-dimensional reductive group G is a version of the Chow ring for G (see [2]). In a work in progress [3] we found two very different models for the ring of conditions for $(C^*)^n$. One of the models deals with Tropical Geometry, another one with Mixed Volumes. An isomorphism between those models has nontrivial geometrical corollaries. We discover the theorem 1 and rediscover the theorem 2 thinking about the ring of conditions for $(C^*)^n$.

[1] Kazarnovskii B. Ya.,Khovanskii A. G. Universal Groebner basis // Proceedings of the International Conference on Polynomial Computer Algebra, Saint Peterburg. 2011. 65–69.

[2] De Concini C. Equivariant Embeddings of Homogeneous Spaces // Proceedings of the Internationa l Congress of Mathematicians Berkeley, California, USA, 1986. 369–377.

[3] Kazarnovskii B. Ya.,Khovanskii A. G. The ring of condition for $(C^*)^n$, tropical geometry and mixed volumes // Preprint in preparation, 2013, 41 pp.

A BOUNDARY DISTORTION FOR CONFORMAL MAPPING

V. Yu. Kim *(Far Eastern Federal University, Vladivostok)*

We consider the holomorphic and univalent function in the unit disk $U = \{z : |z| < 1\}$, $f(0) = 0$, $f(U) \subset U$. Suppose that angular limits $f(z)$, $|f(z)| = 1$ exist for all points z on a compact E of the unit circle $|z| = 1$. The following inequality is based on works Komatu [1] and Pommerenke [2]:

$$\operatorname{cap} f(E) \geq |f'(0)|^{-1/2} \operatorname{cap} E.$$

Here cap $(\cdot)$ is logarithmic capacity. It is known $\operatorname{cap} E = \lim\limits_{n\to\infty} d_n(E)$, where $d_n(E)$ – n-diameter of E:

$$d_n(E) = \max_{z_k, z_l \in E} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} |z_k - z_l| \right\}^{\frac{1}{n(n-1)}}, \quad n \geq 2.$$

The talk is devoted to the proof of some inequality. In particular, if angular derivative module f is bounded above by constant M on the set E, it follows from the inequality that

$$d_n(f(E)) \geq \frac{d_n(E)}{|f'(0)|^{\frac{n}{2(n-1)}} M^{\frac{1}{n-1}}}.$$

[1] Komatu Y. Über eine Verschärfung des Löwnerschen Hilfssatzes // Proc. Imperial Acad. Japan. 1942. Vol. 18, № 7. P. 354–359.

[2] Pommerenke Ch. Boundary behaviour of conformal maps. Berlin. Springer-Verlag. 1992.

A CLASS OF TORUS MANIFOLDS WHICH IS DETERMINED BY EQUIVARIANT COHOMOLOGY

S. Kuroki *(Osaka City University Advanced Mathematical Institute, Osaka; and University of Toronto, Toronto)*

A torus manifold is an even dimensional, oriented, closed, connected manifolds equipped with effective half dimensional torus actions with fixed points. This notion may be regarded as a generalization of toric manifolds.

In the paper [3], Masuda proved that toric manifolds are determined by their equivariant cohomology. Of course, this fact is not true for the general torus manifolds (e.g. see [4]). However, if we take a suitable class of torus manifolds (contains toric manifolds), then sometimes this fact is true for this class. For example, the class of 2-dimensional torus manifolds and simply connected 4-dimensional torus manifolds is determined by their equivariant cohomology.

In this talk, I will report when torus manifolds are determined by their equivariant cohomology.

[1] Kuroki S. Equivariant cohomology distinguishes the geometric structures of toric hyperKähler manifolds // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2011, Vol. 275, 251–283.

[2] Kuroki S. Two classifications of simply connected 6-dimensional torus manifolds with vanishing odd degree cohomology // arXiv:1305.3174.

[3] Masuda M. Equivariant cohomology distinguishes toric manifolds // Adv. Math., 218 (2008), 2005–2012.

[4] Wiemeler M. Exotic torus manifolds and equivariant smooth structures on quasitoric manifolds // Math. Z., 273 (2013), no. 3-4, 1063–1084.

COHOMOLOGY RINGS OF SOME MOMENT-ANGLE MANIFOLDS AND THEIR TOPOLOGICAL INVARIANTS

I. Yu. Limonchenko *(Lomonosov Moscow State University, Moscow)*

We call *a generalized truncation polytope* a k-vertex cut of a product of two simplices $P = vc^k(\Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2})$, for $n_1 \geq n_2 \geq 0, k \geq 0$, which becomes a *truncation polytope* if $n_2 = 0, 1$. From [3] we know that $\mathcal{Z}_P$ is diffeomorphic to a connected sum of sphere products (under one additional condition), but if we consider a vertex cut of a product of more than two simplices it may not be the case. Following the ideas of [4],[1] and [5] we obtain:

1) *For a generalized truncation polytope P with $n_1 \geq n_2 > 1, k \geq 0$ the complex $K_P = \partial P^*$ is minimally non-Golod.*

This is related to the Question 3.5 of [4] stated as an interesting conjecture.

2) *All the bigraded Betti numbers $\beta^{-i,2j}(P)$ of a generalized truncation polytope P with $n_1 \geq n_2 > 1, k \geq 0$ are* **zero**, *except for the cases $i = j = 0$, or $i = (m-d), j = 2m$, or $j-i = 1, n_1, n_2, n_1+n_2-1$, where m is the number of facets of P and d is its dimension.*

As a corollary we get that in the class of generalized truncation polytopes the set of all bigraded Betti numbers of P uniquely determines the cohomology ring and the topological type of $\mathcal{Z}_P$ (with the additional condition from [3]). This is somehow opposite to the wonderful example due to S.Choi [2].

For these polytopes P there is no nontrivial torsion in integral cohomology rings of $\mathcal{Z}_P$. We get series of well-known simple polytopes P giving fixed arbitrary torsion for all sufficiently large dimensions of P in each series.

[1] Berglund Alexander and Jollenbeck Michael. On the Golod property of Stanley–Reisner rings // J. Algebra **315**:1 (2007), 249–273.

[2] Choi Suyoung. Different moment-angle manifolds arising from two polytopes having the same bigraded Betti numbers // Preprint (2012); arXiv:1209.0515.

[3] Gitler Samuel and de Medrano Santiago Lopez. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums // Preprint (2012); arXiv:0901.2580.

[4] Grbic Jelena, Panov Taras, Theriault Stephen and Wu Jie. Homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes // Preprint (2012); arXiv:1211.0873.

[5] Limonchenko Ivan Yu. Bigraded Betti numbers of some simple polytopes // Math. Notes (2013), to appear; arXiv:1101.0066.

LAGRANGE MULTIPLIER METHOD FOR SOLVING A CONVEX OPTIMIZATION PROBLEM

R. V. Namm *(Computation Center of the Far Eastern Branch of RAS, Khabarovsk)*, **G. Woo** *(Changwon National University, Changwon)*

One of the main methods for solving of convex optimization problems are duality methods in which search of saddle points of Lagrange functions is conducted. Thus the duality methods based on classical Lagrange functions, are applicable only for a small set of convex optimization problems, in which minimized function and restrictions of a problem have to be coordinated with each other so that the corresponding dual function must be continuous. It is known that in a linear programming problem it isn't possible to reach such coordination. In a quadratic programming problem dual function will be continuous if minimized function of an initial problem is strongly convex. We investigate the modified duality schemes, allowing to construct dual problems with differentiable dual function below. Smoothness of function allows for solving of a dual problem to use effective differentiable optimization methods.

We consider the convex programming problem

$$\begin{cases} f(x) - min, \\ x \in \Omega = \{z : \ g^j(z) \leq 0, \ j = 1, 2, \dots, m\}, \end{cases} \tag{1}$$

where f, g^j are given convex functions in R^n. Below we suppose that Ω is a compact set. Then $\Omega_v = \{x\colon g^j(x) \le v_j,\ j{=}1,\dots,m\}$ is a compact set for every $v = (v_1, \dots, v_m) \in R^m$ such that $\Omega_v \ne \varnothing$.

We introduce the sensitivity function

$$\chi(v) = \begin{cases} \inf\limits_{x\in\Omega_v} f(x), \text{ if } \Omega_v \ne \varnothing, \\ +\infty \text{ in other case.} \end{cases}$$

It is known that $\chi(v)$ is a convex function, moreover, $\chi(v)$ is lower semicontinuous function.

Let us consider for problem (1) the dual scheme with the modified Lagrange function. The dual function can be represented in form

$$\underline{M}(y) = \inf_{v\in R^m} F_y(v),\ F_y(v) \equiv \chi(v) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2.$$

Since $\chi(v)$ is lower semicontinuous function, then $F_y(v)$ is a lower semicontinuous function for every $y \in R^m$, and moveover $F_y(v)$ is a coercive function.

THETA CONSTANTS AND SIGMA FUNCTIONS

E. Yu. Netay *(Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow)*

We consider the general Weierstrass model of a plane cubic curve

$\mathcal{C}$ defined by the equation

$$y^2 + \mu_1 xy + \mu_3 y = x^3 + \mu_2 x^2 + \mu_4 x + \mu_6, \tag{1}$$

where μ_k are parameters of the curve. This model was introduced by J. T. Tate in [1]. It has integer uniformization. We use this model to define the general elliptic formal group law (see [2, 3]).

In the talk we will introduce relations between the theta constant ϑ_1, that is theta function with characteristics and zero argument, the period η of the elliptic differential of the second kind and the parameters of the curve (1). Our aim is to find new formulas in this area.

In [4] J. C. Eilbeck, K. Eilers and V. Z. Enolski give a general method of obtaining generalizations of the Weierstrass formula

$$\eta = -\frac{1}{12\omega} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}. \tag{2}$$

This is achieved by calculating the Klein-Weierstrass representation of the projective connection S_{KW} at the infinite point of the given curve.

We use this method to calculate the projective connection for the curve (1). Explicitly at a point $P = (x, y) \in \mathcal{C}$ with the local coordinate $x = \frac{1}{\xi^2}$ near infinity we obtain

$$S_{KW}(x,y) = \left(\frac{6(x+\frac{\eta}{\omega})}{(2y+\mu_1 x+\mu_3)^2} - \frac{3y''}{2y+\mu_1 x+\mu_3} - \frac{3}{8x^2} \right)(dx)^2,$$

where the prime means implicit differentiation of y as the function of x given by the equation of the curve. The first terms in the series decomposition in ξ define the expression for η and are equal to

$$S_{KW}(x,y)/(d\xi)^2 = -\frac{3}{4}\mu_1^2 - 3\mu_2 + 6\frac{\eta}{\omega} +$$
$$+ \left(\frac{9}{32}\left(\mu_1^2+4\mu_2\right)^2 - 3\mu_1\mu_3 - 6\mu_4 - \frac{3}{2}\left(\mu_1^2+4\mu_2\right)\frac{\eta}{\omega} \right)\xi^2 + O(\xi^4).$$

Let us now consider the standard Weierstrass model of a plane cubic curve $\mathcal{C}$ defined by the equation

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

This model is obtained from (1) by a linear transform. Using the classical relation between the Weierstrass sigma function and the theta function (see [5] for details), we show that $z = -24\omega\eta$ satisfies the Chazy equation

$$z''' - 2zz'' + 3z'^2 = 0,$$

where the prime means differentiation via $t = \frac{\tau}{2\pi i}$. This approach gives the relations

$$\omega^4 g_2 = 12(\omega\eta)^2 + 3(\omega\eta)', \quad \omega^6 g_3 = \frac{1}{8}(\omega\eta)'' + 3(\omega\eta)'\omega\eta + 8(\omega\eta)^3,$$

which in combination with formula (2) give an expression of the parameters of the curve in terms of theta constants. A more general approach to this problem resulting in analogues of the Chazy equation is described in [6].

In the talk we will discuss these and adjacent results. We pay special attention to differential equations arising in this approach.

The work was partially supported by RFBR grants 12-01-33058, 11-01-00197-a and RF Government grant 2010-220-01-077, ag. 11.G34.31.0005.

[1] Tate J. T. The arithmetic of elliptic curves, Invent. Math., 23 (1974), 3–4, Springer-Verlag, 179–206.
[2] Buchstaber V. M., Bunkova E. Yu. Krichever Formal Groups, Funct. Anal. Appl., 45:2 (2011), 99–116.
[3] Buchstaber V. M., Bunkova E. Yu. Elliptic formal group laws, integral Hirzebruch genera and Krichever genera, 2010, arXiv: 1010.0944.
[4] Eilbeck J. C., Eilers K.,Enolski V. Z. Periods of second kind differentials of (n, s)-curves, 2013, arXiv:1305.3201.
[5] Bunkova E. Yu., Buchstaber V. M. Heat Equations and Families of Two-Dimensional Sigma Functions, Proc. Steklov Inst. Math., 266 (2009), 1–28.
[6] Bunkova E. Yu., Buchstaber V. M. Polynomial Dynamical Systems and Ordinary Differential Equations Associated with the Heat Equation, Funct. Anal. Appl., 46:3 (2012), 173–190.

SYZYGIES OF QUADRATIC VERONESE EMBEDDINGS

I. V. Netay *(Independent University of Moscow, Moscow)*

Consider the space $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk) \simeq V \otimes V$ of matrices of size $n \times n$. The field $\Bbbk$ is supposed to be algebraically closed and to have zero characteristic. Consider the set M of symmetric matrices of rank 1 in the corresponding linear subspace $\mathrm{Sym}^2 V$ of all symmetric matrices. Any symmetric matrix A of rank 1 equals $v \cdot v^{\perp}$ for a column-vector v defined up to multiplication by ± 1. If A and v are taken up to multiplication by $\Bbbk^{\times}$, then v and A are in the one-to-one correspondence. This defines the map $\mathbb{P}(M) \simeq \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V)$ which is called the quadratic Veronese embedding.

Its image can be described by the homogeneous ideal $\mathbb{I}$ in the algebra $\Bbbk[\mathrm{Sym}^2 V]$. There is an obvious set of generators in $\mathbb{I}$ that consists of all 2×2-minors. One can check that this system of generators is minimal. But they are not independent.

We can construct the module of dependences between these generators in the following way. Take a free module F_1 generated by the same elements and consider the natural map $F_1 \twoheadrightarrow \mathbb{I}$. Then its kernel is the module of dependences between these generators. We can also find there a minimal system of generators. They span the so called spaces of first syzygies.

We can apply the same actions to the kernel of $F_1 \twoheadrightarrow \mathbb{I}$ and get the space of second syzygies etc. By Hilbert syzygy theorem [1] the process terminates for any graded module over an algebra of polynomials. We can choose homogeneous generators and obtain syzygies of a given order and degree. One can study the following questions:

- "How many" syzygies are for a given order p and degree q? (Denote the vector space spanned by them by $R_{p,q}$.)

- How are they mapped to the free module generated by the syzygies of degree $p-1$?

We consider only the first question. The case of embeddings of projective spaces can seem to by easy, but the answer is not known even for the cubic Veronese embedding.

Denote by V_λ the representation of $\mathrm{GL}(V)$ of the highest weight λ. They correspond to Young diagrams (one can find constructions in [2]). Denote by λ^T the transposed diagram λ, by $\mathrm{wt}(\lambda)$ the weight (number of boxes) of λ, by $l(\lambda)$ the number of hooks that form λ or, equivalently, the length of the main diagonal of λ.

Thus, the answer for the first question is given by the following

Theorem. *Let $R_{p,q}$ be the syzygy spaces of the quadratic Veronese embedding $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V)$. Then there is the following isomorphism of representations of $\mathrm{GL}(V)$:*

$$R_{p,q} \cong \bigoplus_{\substack{\mathrm{wt}(\lambda)=2p \\ l(\lambda)=2q-2p \\ \lambda=\lambda^T}} V_\lambda^*.$$

We will discuss this result and perhaps syzygies of other modules over $\Bbbk[\mathrm{Sym}^2 V]$ related to the quadratic Veronese embedding.

[1] Hilbert D. Uber die Theorie der algebraischen Formen, Ges. Abh., (1970) v. II, Springer-Verlag, 199–257.
[2] Fulton W. Young tableaux, CUP, 1997.

ON RATIONAL 3-SPHERES WITH LOCALLY STANDARD $(\mathbb{Z}_2)^3$-ACTIONS

Y. Nishimura *(University of Fukui)*

If a closed manifold M admits a locally standard $(\mathbb{Z}_2)^n$-action then its orbit space $Q = M/(\mathbb{Z}_2)^n$ is a nice manifold with corners. When Q is a simple convex polytope, M is called a small cover. In this talk we investigate what kinds of closed orientable manifolds admits locally standard $(\mathbb{Z}_2)^n$-actions, especially for the case $n = 3$. Lü and Yu [1] showed that a $\mathbb{Z}_2$-homology 3-sphere M admits a locally standard $(\mathbb{Z}_2)^3$-action if and only if M is homeomorphic to a connected sum $N\#N\#\cdots\#N$ of 8 copies of some $\mathbb{Z}_2$-homology 3-sphere N. In particular if M is irreducible, then M must be homeomorphic to S^3.

We extend their argument to the rational 3-sphere M.

[1] Lü Z. and Yu L. On 3-manifolds with locally standard $(\mathbb{Z}_2)^3$-actions, Topology and its Applications 60 no.4 (2013) 596–605.

INTEGRAL KERNELS AND CONTINUED J-FRACTIONS

Igor M. Novitskii *(Khabarovsk Division IAM FEB RAS, Khabarovsk)*

The presentation is dedicated to the 90th anniversary of the monograph [1] of Torsten Carleman. In that work, Carleman considered semi-square-integrable kernels $\boldsymbol{K}$ of (generally unbounded) integral operators in $L^2(a, b)$, which were pointwise limits of sequences of real-valued symmetric Hilbert-Schmidt kernels satisfying a mean square continuity condition. For such kernels $\boldsymbol{K}$ he proved that either each non-real number is a characteristic value for $\boldsymbol{K}$, or none is. The kernels for which the second alternative holds he called of Class I, the others of Class II. Besides, on pages 186–204 of Chapter V in [1], it was explained how to recognize whether or not a kernel $\boldsymbol{K}$ is of Class I in terms of the convergence behaviour of a continued J-fraction associated to $\boldsymbol{K}$.

This talk will contain an up-to-date treatment and discussion of that continued fraction approach for classifying the kernel.

[1] Carleman T. Sur les Équations Intégrales Singulières à Noyau Réel et Symétrique. Uppsala: A.-B. Lundequistska Bokhandeln, 1923. 228 pp.

HOMOTOPY THEORY OF MOMENT-ANGLE COMPLEXES

Taras Panov *(Moscow State University, Moscow)*

The *moment-angle complex* $\mathcal{Z}_K$ is a cell complex composed of products of discs D^2 and circles S^1 which are parametrised by faces of a simplicial complex K. The complex $\mathcal{Z}_K$ has a natural torus action. By replacing the pair (D^2, S^1) by an arbitrary pair of spaces (X, A) we obtain the notion of the *polyhedral product* $(X, A)^K$. This construction is currently studied actively in toric topology and homotopy theory, and has many geometric interpretations. For example, the moment-angle complex $\mathcal{Z}_K = (D^2, S^1)^K$ is homotopy equivalent to the complement of the arrangement of coordinate subspaces in $\mathbb{C}^m$ defined by the simplicial complex K. If K is the boundary of a simplicial polytopes (or, more generally, comes from a complete simplicial fan), then $\mathcal{Z}_K$ is a smooth manifold. It admits quite interesting non-Kähler complex-analytic structures generalising the well-known series of Hopf and Calabi–Eckmann manifolds.

In our talk we consider the classes of simplicial complexes K whose corresponding moment-angle complex $\mathcal{Z}_K$ has homotopy type of a wedge of spheres or connected sum of sphere products. In the case of flag complexes we obtain a complete characterisation of these classes, both in algebraic and combinatorial terms. For wedges of spheres, the criterion is as follows: the 1-skeleton of K must be a chordal graph (this notions features in the combinatorial theory of optimisation on graphs). We also calculation explicitly the number of spheres in the wedge. The loop spaces of $\mathcal{Z}_K$ and $DJ(K)$ are homotopy equivalent to products of spheres and loops on spheres, and we show that the canonical map $\mathcal{Z}_K \to DJ(K)$ can be described by iterated Whitehead products of two-dimensional spherical classes.

The talk is based on joint work [1]. The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grants 11-01-00694, 12-01-00873, 12-01-92104-JF and 13-01-91151-GFEN, a grant from Dmitri Zimin's 'Dynasty' foundation, grants NSh-4995-2012.1 and MD-111.2013.1 from the President of Russia, and grant 11.G34.31.0053 from the Government of Russia.

[1] Grbic J., Panov T., Theriault S., Wu J. "Homotopy types of moment-angle complexes", preprint (2012); arXiv:1211.0873.

GENERALIZED PERMUTOHEDRA, GRAPH INVARIANTS, AND TORIC TOPOLOGY

Hanchul Park *(Ajou University, Suwon)*

This work is a joint work with Professor Suyoung Choi.

In this talk, we define an invariant, say the a-number, of any finite simple graph. The signed a-number of a graph G, denoted by $sa(G)$, is defined recursively as follows:

- $sa(\varnothing) = 1$.

- $sa(G) = 0$ if G has some component with odd vertices.
- $sa(G)$ is the product of signed a-numbers of components of G.
- If every component of G has even order, then $sa(G)$ is given by minus the sum of signed a-numbers of all induced subgraphs of G other than G itself.

The a-number $a(G)$ is defined by the absolute value of $sa(G)$.

In fact, the a-number was introduced to compute the homology of some kind of real toric manifolds, which are one of important objects of toric topology. For a given finite graph G, the graph associahedron P_G can be defined the Minkowski sum of all simplices determined by connected induced subgraphs of G. The class of graph associahedron includes some important families of simple polytopes, such as permutohedra Pe^n, associahedra As^n (or Stasheff polytopes), cyclohedra Cy^n and stellohedra St^n, corresponding to the complete graph, the path graph, the circle graph, and the star graph respectively. Any graph associahedron P_G naturally corresponds to a real toric manifold $M(P_G)$. In topological viewpoint, it is very a natural approach to try to compute topological invariant, like the fundamental group or the cohomology ring, of a given manifold. Our main result says that i-th Betti number of $M(P_G)$ is the sum of a-numbers of induced subgraph of G of order $2i$.

A combinatorial and non-recursive description of the a-number remains a question.

A simple polytope is called *Delzant* if outward normal vectors of facets form an integral basis at each vertex. Delzant polytope is very important in toric topology, because every projective toric manifold is determined by a Delzant polytope. But in general it is a difficult problem to determine whether a simple (combinatorial) polytope can be Delzant or not, and surely, there are many examples of simple polytopes which do not support a toric manifold. A good thing is, our objects, *the graph associahedra*, are naturally Delzant polytopes. For a given finite graph G, the graph associahedron P_G can be defined the Minkowski sum of all simplices determined by connected induced subgraphs of G. The class of graph associahedron includes some important families of simple polytopes, such as permutohedra Pe^n, associahedra As^n (or Stasheff polytopes), cyclohedra Cy^n and stellohedra St^n, corresponding to the complete graph, the path graph, the circle graph, and the star graph respectively.

Since every graph associahedron is a Delzant polytope, a real toric manifold $M(P) = M(G)$ is determined for every graph associahedron $P = P_G$. In 2010, Henderson computed the rational homology of a real Hessenberg variety $M(Pe^n)$, which is a real toric manifold supported by the permutohedron Pe^n.

Theorem 1. *[Henderson 2010]*

$$b_i(M(Pe^n)) = A_{2i}\binom{n+1}{2i},$$

where b_i is the i-th Betti number and A_{2i} is the Euler secant number $1, 5, 61, 1385, \ldots$

Is there any way to extend this result to general graph associahedra? Actually, Davis-Januskiewicz(1991) gave a formula to compute (integral) cohomology ring of a toric manifold. But in real toric case, D-J tells only about $H^*(M;\mathbb{Z}_2)$, not $\mathbb{Z}$. Recently, A. Suciu-A.Trevisan [4] presented a method to compute $H_*(M;\mathbb{Q})$ for a general real toric manifold M. We write our main results below.

Proposition 2. *For a finite graph G, there is a nonnegative integer called the a-*number *of G, denoted by $a(G)$, which is a graph invariant. $a(G)$ satisfies the following properties.*

- *$a(G) = 0$ if G has odd vertices.*
- *$a(G)$ is the product of a-numbers of components of G.*
- *$a(G)$ can be computed recursively from that of induced subgraphs of G.*

Theorem 3. *The reduced Poincaré polynomial of the real toric manifold $M(G)$ is the sum of all a-monomials of all induced subgraphs of G, i.e.,*

$$P_{M(G)}(q) = 1 + \sum_{\substack{I \subseteq V(G) \\ I \neq \varnothing}} a(G|_I) \cdot q^{|\frac{I}{2}|},$$

where $V(G)$ is the vertex set of G.

The following shows some examples of our result. The left one is the case for Starsheff polytopes and it is a version of Catalan triangle. The right one is for cyclohedra and it is the 'half' of Pascal's triangle.

As^n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	1	1						
2	1	2	0					
3	1	3	2	0				
4	1	4	5	0	0			
5	1	5	9	5	0	0		
6	1	6	14	14	0	0	0	
7	1	7	20	28	14	0	0	0

Cy^n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	1	1						
2	1	3	0					
3	1	4	3	0				
4	1	5	10	0	0			
5	1	6	15	10	0	0		
6	1	7	21	35	0	0	0	
7	1	8	28	56	35	0	0	0

Таблица 1: Betti numbers of $M(As^n)$ and $M(Cy^n)$.

[1] Fenn A. G. On Families of Nestohedra, Ph.D. Thesis, University of Manchester, 2010.

[2] Postnikov A. Permutohedra, associahedra, and beyond, arXiv:`math.CO/0507163`.

[3] Postnikov A., Reiner V., and Williams L. Faces of Generalized Permutohedra, Documenta Mathematica 13 (2008), 207–273.

[4] Suciu A. Private communication 1.

[5] Zelevinsky A. Nested Complexes and Their Polyhedral Realizations, Pure and Applied Mathematics Quarterly volume 2 no. 3 (2006), 655–671.

STRONG COHOMOLOGICAL RIGIDITY OF TORIC VARIETIES

Seonjeong Park *(Division of Mathematical Models, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon)*

A *toric variety* is a normal algebraic variety of complex dimension ℓ with an action of the algebraic torus $(\mathbb{C}^*)^\ell$ having an open dense orbit. Let M and M' be non-singular complete toric varieties and let φ be a cohomology ring isomorphism between $H^*(M)$ and $H^*(M')$. Then the *cohomological rigidity problem* for toric varieties asks whether there exists a diffeomorphism between M and M' which induces the isomorphism φ, see [1]. A realizability problem of a given cohomology ring automorphism by a diffeomorphism is classical and important in algebraic topology. By Wall [3], any cohomology ring automorphism of such a manifold of dimension 4 with second Betti number $\beta_2 \leq 10$ is induced by a diffeomorphism. However, the negative answer is also known. For instance, not all cohomology ring automorphisms can be realizable by a diffeomorphism for a complex 2-dimensional non-singular complete toric varieties with $\beta_2 > 10$, see [2]. In this talk, we show that any cohomology ring isomorphism between two non-singular complete toric varieties (respectively, quasitoric manifolds) with second Betti number 2 is realizable by a diffeomorphism (respectively, homeomorphism). This is a joint work with Suyoung Choi.

[1] S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh Rigidity problems in toric topology, a survey, Proc. Steklov Inst. Math. 275 (2011), 177–190.

[2] R. Friedman and J. W. Morgan On the diffeomorphism types of certain algebraic surfaces. I, J. Differential Geom. 27 (1988), no. 2, 297–369.

[3] C. T. C. Wall Diffeomorphisms of 4-manifolds, J. London Math. Soc. 39 (1964), 131–140.

ON ONE NUMBER THEORY PROBLEM ARISING FROM TORIC GEOMETRY

A. V. Ustinov *(Khabarovsk Division IAM FEB RAS, Khabarovsk)*

For rational numbers from the interval $(0, 1)$ we shall consider *reduced regular continued fraction* (see. [1])

$$\langle x_1, \dots, x_m \rangle := \cfrac{1}{x_1 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{x_m}}} \qquad (x_1, \dots, x_m \geq 2),$$

also known as Hirzebruch continued fractions.

Using methods of toric geometry Zaimi proved (see [2]) that for natural a, b, n such that $(a, b) = (ab, n) = 1$ and

$$k \equiv ab^{-1} \pmod{n} \quad (1 \leq k < n),$$

$$k' \equiv ab^{-1} \pmod{n} \quad (1 \leq k' < n + ab)$$

reduced regular continued fraction expansions of the numbers $\frac{k}{n}$ and $\frac{k'}{n+ab}$ have equal length.

The talk will be devoted to elementary proof of the more general statement.

Theorem. *If $(n, ab) = 1$ and $n > ab$ then for all numbers*

$$\left\{\frac{ab^{-1} \pmod{(n+kab)}}{n+kab}\right\} \qquad (k \geq 0)$$

RRCF have a same length and differ in one partial quotient.

[1] Perron O. Die Lehre von den Kettenbruechen (Band 1). — Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1954.

[2] Zaimi G. Length of Hirzebruch continued fractions. `http://mathoverflow.net/questions/111312/length-of-hirzebruch-continued-fractions`

SENSITIVITY FUNCTIONAL IN CONDITIONAL OPTIMIZATION PROBLEM OF MECHANICS

E. M. Vikhtenko *(Pacific National University, Khabarovsk)*

Sensitivity functions play important role in investigation of duality scheme based on modified Lagrangian function in finite-dimensional optimization problem. Their characteristic properties in many respect are solving at research of convergence of a duality methods. The similar situation is observed in infinite-dimensional variational inequalities in mechanics in which research sensitivity functional significantly relies on properties of boundary trace of functions.

In this paper characteristic properties of sensitivity functional are investigated in variational inequalities of mechanics on example of scalar Signorini problem.

Consider the semicoercive variational Signorini inequality

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int_{\Omega} f \, v \, d\Omega \to \min, \\ v \in K = \{w \in H^1(\Omega) : \ \gamma w \geq 0 \text{ on } \Gamma\}. \end{cases} \tag{1}$$

Here $\Omega \subset R^2$ is a bounded domain with a sufficiently regular boundary Γ, $f \in L_2(\Omega)$ is a given function and $\gamma w \in H^{1/2}(\Gamma)$ is the trace of $w \in H^1(\Omega)$ on Γ (here, γ is the trace operator).

It is known that the condition $\int_{\Omega} f \, d\Omega < 0$ is satisfied then the problem (1) is solveable and the solution is unique.

We define the sensitivity functional for the problem (1) in the form

$$\chi(m) = \inf_{v \in K_m} J(v) \quad \forall \, m \in L_2(\Gamma),$$

where

$$K_m = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \ -\gamma \, v \leq m \text{ on } \Gamma \right\}.$$

Theorem. *The sensitivity functional $\chi(m)$ is weakly lower semicontinuous functional in $L_2(\Gamma)$.*

The property of weakly lower semicontinuity $\chi(m)$ is determining for the investigation the duality scheme with modified Lagrangian functional for the problem (1).

THE FREE DEGREES OF A SPACE

Xuezhi Zhao *(Department of Mathematics & Institute of mathematics and interdisciplinary science, Capital Normal University, Beijing)*

1. Background

Let X be a compact surface and ξ be a self homeomorphism on X. The free degree $\mathfrak{fr}(\xi)$ of ξ is the maximum positive integer n such that $\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^{n-1}$ are all fixed point free. For a set S which consists of self homeomorphisms on X, we denote the free degree of S by $\mathfrak{fr}(S) = \max\{\mathfrak{fr}(\phi) \mid \phi \in S\}$. Especially, we denote the free degree of all homeomorphisms by $\mathfrak{fr}(X)$ and the free degree of all orientation preserving homeomorphisms by $\mathfrak{fr}^+(X)$. Furthermore, one can define $\mathfrak{fr}_{\mathrm{p}}(X)$ if periodic self homeomorphisms are considered. Similarly, one also has $\mathfrak{fr}_{\mathrm{p}}^+(X)$ or $\mathfrak{fr}_{\mathrm{p}}^-(X)$ if X is a orientable manifold and the orientation-preserving or orientation-revising periodic self homeomorphisms are considered.

We write respectively write respectively $F_{g,b}$ and $N_{g,b}$ for orientable and non-orientable ones of genus g with b boundary components.

J. Nielsen [6] studied $\mathfrak{fr}^+(F_g)$ in nineteen forties. Combine with the result $\mathfrak{fr}^+(F_2) = 2$ of W. Dicks and J. Llibre [2], we know that

$$\mathfrak{fr}^+(F_g) = \begin{cases} 2, & \text{if } g = 2, \\ 2g-2, & \text{if } g > 2. \end{cases}$$

In nineteen nineties, S. Wang [9] obtained results on all homeomorphisms and on non-orientable closed surfaces. One of his results is:

$$\mathfrak{fr}(F_g) = \begin{cases} 4, & \text{if } g = 2, \\ 2g-2, & \text{if } g > 2. \end{cases}$$

2. Free degrees on connected compact surfaces with boundaries

In a joint work [12] with Jianchun Wu, we obtain an estimation from above of the free degree on connected compact surfaces with boundaries, showing that

$$\max_b \mathfrak{fr}(F_{g,b}) \begin{cases} = \infty & \text{if } g = 0, 1, \\ \leq 24g - 24 & \text{if } g \geq 2. \end{cases}$$

$$\max_b \mathfrak{fr}(N_{g,b}) \begin{cases} = \infty & \text{if } g = 1, 2, \\ \leq 12g - 24 & \text{if } g \geq 3. \end{cases}$$

This means that for given genus g, the free degree $\mathfrak{fr}(F_{g,b})$ and $\mathfrak{fr}(N_{g,b})$ have a uniform upper bound which is independent of the number of boundary components. The proof of those results depends on both Nielsen fixed point theory and the standard form introduced in [5] of homeomorphisms on surfaces, According to Nielsen-Thurston classification theorem of surface homeomorphisms: any surface homeomorphism is isotopic to either a periodic, pseudo Anosov or reducible one ([7]).

Actually, a more precise bound for $\mathfrak{fr}(F_{g,b})$ was obtained by Chas in his thesis [1], showing that $\mathfrak{fr}(F_{g,b}) \leq 4g+2$. Recently, J. Wu and Q. Zhang consider the case that $g=2$.

3. Periodic homeomorphisms

In a joint work with G. Gromadzki, we work on the degree of periodic self homeomorphisms on compact surfaces.

Since the famous Wiman bound [10] for the order of a single orientation-preserving periodic self-homeomorphism of closed orientable surface $F_{g,0}$ is also $4g+2$, it is a natural question to see if such a upper bound is attained by a periodic self-homeomorphism. Observe that, a bound $4g+2$ is not always attained in this case since an automorphism of $F = F_{g,0}$ of such order has a fixed point and so the problem of finding $\mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{g,b})$ is, at least, not trivial. We find explicit values of $\mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{2,b})$ for all b, we calculate $\mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{g,b})$ for some explicitly listed values of g, b and we prove that for the remaining values of g, b, either $\mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{g,b}) \leq 2(g-1)$ or $\mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{g,b}) = -\chi(F_{g,b})$ and $\mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{g,b'}) = \mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{g,b})$ for arbitrary b' congruent to b modulo $\mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{g,b})$, where $\chi(F_{g,b})$ stands for the Euler characteristic equal here to $2-2g-b$. Furthermore we characterize, theoretically, (g,b) for which $\mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{g,b}) = -\chi(F_{g,b})$ and we give some computation.

Theorem 3.1. *Let $g \geq 3$ and let $\mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{g,b}) > 2g-2$. Then there exist unique $b_0 \leq b$ so that $\mathfrak{fr}^+_{\mathrm{p}}(F_{g,b}) = -\chi(F_{g,b_0}) = 2g-2+b_0$. Furthermore this equality actually holds for all $b \geq b_0$ congruent to b_0 modulo $2g-2+b_0$ except for*

- *$b = b_0 = 4$ for g even,*

- *$b = b_0 = 2$ for g arbitrary, and*

- *$b_0 = 3$ where now b can be equal to b_0 but in contrast to the two previous cases it must be congruent to b_0 modulo $2(2g-2+b_0)$.*

Our results based on the following

Lemma 3.2. [[10] §10, [4] Prop. 2.2] *A conjugacy class of orientation-preserving periodic self-homeomorphisms on the closed surface $F_{g,0}$ is determined by a data $[N, \alpha_1, \dots, \alpha_r]$, where N indicates the period and $\alpha_i \in Z_N$ for $i = 1, 2, \dots, r$. The data $[N, \alpha_1, \dots, \alpha_r]$ can be realized as an orientation-preserving periodic self-homeomorphism φ if and only if the following conditions are satisfied.*

1. *$\alpha_1 + \cdots + \alpha_r \equiv 0(N)$,*

2. *$\gcd\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \equiv 1(N)$ if $F_{g,0}/\langle\varphi\rangle$ is sphere;*

3. *$2g - 2 = N\left(2g' - 2 + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\right)$, where g' is the genus of $F_{g,0}/\langle\varphi\rangle$, and $m_i = N/\gcd\{N, \alpha_i\}$ for $i = 1, 2, \dots, r$.* □

Fix a genus g, if we are given ramification type of all orientation-preserving periodic self-homeomorphisms on $F_{g,0}$, we can compute out $\mathfrak{fr}_{\mathrm{p}}^{+}(F_{g,b})$ for any boundary component number b. Next lemma gives the free degree $\mathfrak{fr}_{\mathrm{p}}^{+}(F_{g,b})$ is eventually periodic according to number b of boundary components.

Lemma 3.3. *Let $M(g)$ be the least common multiplication of the periods of all orientation-preserving periodic self-homeomorphisms on $F_{g,0}$, $S(g)$ be the maximum of the sum of length of singular orbits for all periodic self-homeomorphisms on $F_{g,0}$. If $b' \equiv b \mod M(g)$, and $b', b \geq S(g)$, then $\mathfrak{fr}_{\mathrm{p}}^{+}(F_{g,b'}) = \mathfrak{fr}_{\mathrm{p}}^{+}(F_{g,b})$.*

We give similar results for $\mathfrak{fr}_{\mathrm{p}}(F_{g,b})$ which is defined by allowing also orientation-reversing self-homeomorphisms and a sequel concerning $\mathfrak{fr}_{\mathrm{p}}(N_{g,b})$ for non-orientable surfaces $N_{g,b}$ is planed.

[1] Chas M. Minimum periods of homeomorphisms of orientable surfaces, PhD thesis, Universitat Autonoma de Barcelona, 1998, 141+iii pp., see http://arxiv.org/abs/1204.0023.

[2] Dicks W. and Llibre J. Orientation-preserving self-homeomorphisms of the surface of genus two have points of period at most two. Proc. AMS. 124 (1996), no. 5, 1583–1591.

[3] Gromadzki G. and Zhao X. Free degree of periodic self-homeomorphisms of compact surfaces (in preparation).

[4] Hirose S. On periodic maps over surfaces with large periods, Tohoku Math. J. (2) 62 (2010), no. 1, 45–53.

[5] Jiang B. and Guo J. Fixed points of surface diffeomorphisms. Pacific J. Math. 160 (1993), no. 1, 67–89.

[6] Nielsen J. Fixpunktfrie Afbildninger. Mat. Tidsskr. B (1942), 25–41.

[7] Thurston W. On the geometry and dynamics of diffeomorphismsof surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 19 (1988), no. 2, 417ïC431.

[8] Wang S. Maximum orders of periodic maps on closed surfaces. Topology Appl. 41 (1991), no. 3, 255–262.

[9] Wang S. Free degrees of homeomorphisms and periodic maps on closed surfaces. Topology Appl. 46 (1992), no. 1, 81–87.

[10] Wiman A. Über die hyperelliptischen Kurven und diejenigen vom Geschlecht $p = 3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen, Bihang Till. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, 21 (1) (1895), 23 pp.
[11] Wu J., Zhang Q. A note on the free degrees of homeomorphisms on genus 2 orientable compact surfaces, Topology Appl. 159 (2012), no. 12, 2841–2844.
[12] Wu J., Zhao X. Free degrees of homeomorphisms on compact surfaces, Algebraic & Geometric Topology, 11 (2011), 2437–2452.

О ЗАДАЧЕ МАСКИРОВКИ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ

Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

В последние годы большое внимание уделяется исследованию обратных задач для моделей акустического и электромагнитного рассеяния на неоднородных включениях. С помощью оптимизационного метода указанные задачи сводятся к обратным экстремальным задачам. К необходимости решения такого типа задач приводят, в частности, задачи маскировки материальных объектов в жидких средах (см. [1]).

Предположим, что во внешности Ω_e^∞ области Ω возникло поле $p^{\rm inc}$. Поскольку область Ω является препятствием для поля $p^{\rm inc}$, то падение этого поля на Ω приводит к появлению в области Ω входящего поля p, а в области Ω_e – появления рассеянного поля p^s. Математически задача определения полей p в Ω и p^s в Ω_e^∞

сводится к задаче нахождения поля p в Ω и внешнего поля $p_e = p^{inc} + p^s$ в Ω_e^∞ путем решения следующей задачи сопряжения:

$$\begin{gathered}\Delta p + k^2 \eta p = -f \ \text{ в } \ \Omega, \ \Delta p_e + k^2 p_e = 0 \ \text{ в } \ \Omega_e^\infty, p = p_e, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{\rho_e}\frac{\partial p_e}{\partial n} \ \text{ на } \Gamma_e,\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = g \ \text{ на } \ \Gamma_i, \\ \frac{\partial p^s(\mathbf{x})}{\partial r} - ikp^s(\mathbf{x}) = o(r^{-1/2}) \quad \text{при } \ r = |\mathbf{x}| \to \infty.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь k – постоянное волновое число, $\eta = \eta(x)$ – переменный индекс рефракции в Ω, f – плотность объемных источников в Ω, функция g описывает плотность поверхностных источников звукового поля на внутренней границе Γ_i области Ω.

В данной работе рассматривается обратная экстремальная задача маскировки для модели акустического рассеяния, описываемой уравнениям (1)–(2). Доказывается ее разрешимость и выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума. На основе анализа построенной системы оптимальности развивается эффективный численный алгоритм решения рассматриваемой задачи маскировки. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

[1] Алексеев Г. В. Оптимизация в задачах маскировки материальных тел методом волнового обтекания // ДАН. 2013. Т. 449, № 6. С. 652–656.

МАСКИРОВКА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ ЧЕРЕЗ ИМПЕДАНСНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

А. В. Байдин, В. В. Соснов *(ДВФУ, Владивосток)*

На сегодняшний день актуальной является задача маскировки материальных тел от акустической или электоромагнитной локации. Математически она заключается в решении соответствующих обратных задач для моделей акустики или уравнений Максвелла.

К настоящему времени рядом авторов доказано существование скрывающих оболочек, наполненных неоднородной анизотропной средой [1]. К сожалению, создание таких оболочек связано с большими техническими трудностями. В настоящей работе предложен альтернативный метод маскировки. Предложенный метод заключается в покрытии маскируемого объекта специальными материалами, что математически описывается введением импедансного граничного условия [2]. Таким образом задача заключается в выборе такого поверхностного импеданса, при котором норма рассеянного поля минимальна.

Именно такая задача рассмотрена в данной работе, в случае когда скрываемый объект представляет собой цилиндр бесконечной длины, покрытый тонким слоем высокопроводящего материала, а падающая волна представляет собой плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении, перпендикулярном оси цилиндра.

При помощи методов оптимизации обратная задача сводится к задаче минимизации определенного функционала качества, доказывается её разрешимость и выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума. На основе анализа системы оптимальности выводятся необходимые условия единственности и устойчивости конкретных экстремальных задач, а также строится эффективный численный алгоритм решения рассматриваемой задачи маскировки и исследуется его сходимость.

[1] Алексеев Г. В., Романов В. Г. Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 2, С. 1–6.

[2] Алексеев Г. В. Оптимизация в задачах маскировки материальных тел методом волнового обтекания // ДАН, 2013, Т. 449, № 6, С. 1-5.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МГД ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Р. В. Бризицкий *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

В ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, состоящей из двух частей Γ_1 и Γ_2, рассматривается следующая краевая задача для стационарных уравнений магнитной гидродинамики:

$$\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - æ\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f}, \ \ \mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$\nu_1\mathrm{rot}\mathbf{H} - \rho_0^{-1}\mathbf{E} + æ\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_1\mathbf{j}, \ \mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \ \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \ \ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0, \ \mathbf{H}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{0}, \ \ \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}.$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, $\mathbf{u}, \mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ – векторы скорости и напряженностей магнитного и электрического полей, $p = P/\rho_0$, где P – давление, $\rho_0 = \mathrm{const}$ – плотность, $æ = \mu/\rho_0$, $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma$, ν и σ – постоянные коэффициенты вязкости и проводимости, μ – магнитная проницаемость, $\mathbf{j}$ – вектор плотности сторонних токов, $\mathbf{g}$ – определенная на Γ функция. Все величины, входящие в (1)–(3), считаются размерными, причем уравнения модели записаны в системе СИ. Физически граничные условия (3) отвечают ситуации, когда участок Γ_1 границы Γ является идеальным проводником, а участок $\Gamma_2 \subset \Gamma$ – идеальный диэлектрик.

Доказана глобальная разрешимость краевой задачи (1)–(3) при достаточно общих условиях на область Ω и границу Γ. При доказательстве существенно использовались результаты [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00313-а и 12-01-31288).

[1] Fernandes P., Gilardi G. Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 7. P. 957–991.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА Ω-ДРОБЕЙ

О. А. Горкуша *(ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск)*

Любое вещественное число x из $(0, 1)$ можно представить в виде конечной (если $x \in \mathbf{Q}$) или бесконечной регулярной непрерывной дроби

$$x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots],$$

где для всех $n \geq 1$ неполные частные a_n определяются соотношением

$$a_n = a_n(x) = \left[\frac{1}{T^{n-1}(x)}\right], \text{ если } T^{n-1}(x) \neq 0.$$

Здесь $T : [0, 1) \mapsto [0, 1)$ — преобразование Гаусса, определенное следующим образом: $T(x) = 1/x - [1/x], x \neq 0, T(0) = 0$.

Естественное обобщение преобразования $T(x)$ получено в работе [1].

Пусть $D = ([0, 1] \setminus \mathbf{Q}) \times [0, 1]$. Определим отображение $\mathfrak{T} : D \mapsto D :$

$$\mathfrak{T}(x, y) = \begin{cases} \left(T(x), \frac{1}{[1/x]+y}\right), & \text{если } (x, y) \in D \text{ и } x \neq 0; \\ (0, y), & \text{если } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Автор работы доказал, что система $(D, \mathfrak{B}_D, \mu, \mathfrak{T})$ с семейством множеств Бореля $\mathfrak{B}_D$ и вероятностной мерой

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \iint_A \frac{dxdy}{(1 + xy)^2},\ A \in \mathfrak{B}_D$$

формирует эргодическую систему.

В работе [2] мы получили аналогичный результат для $\Omega-$ дробей — одного из классов полурегулярных дробей, который тесно связан с геометрической интерпретацией приближений приближений вещественного числа рациональными числами. (В [3] исследованы основные свойства этих дробей.)

Теорема 1. *Пусть Ω — выпуклая, ограниченная и замкнутая область на плоскости с кусочно-гладкой границей, которая содержит некоторую окрестность точки $(0, 0)$ и симметрична относительно координатных осей. Пусть функция $\Psi(x, y) = 0$*

описывает границу этой области.

Обозначим через $(2a_0, 0)$, (a_0, b_0), (b_0, a_0), $(0, 2a_0)$ точки с условием

$$\Psi(2a_0, 0) = \Psi(a_0, b_0) = \Psi(b_0, a_0) = \Psi(0, 2a_0) = 0.$$

Для всех α из $[0,1]$ будем рассматривать функцию $\beta_\Omega = \beta(\alpha)$ со свойствами

$$\begin{array}{lll}
\Psi(u,v) = 0, & & \text{для } \ a_0 \le u \le b_0; \\
\Psi(s,t) = 0, & u = s \cdot \beta, \ t = v \cdot \alpha & \text{для } \ b_0 \le s \le 2a_0; \\
\Psi(x,y) = 0, & x = s - u, \ y = t + v & \text{для } \ 0 \le x \le a_0.
\end{array}$$

Определим области S_1, S_2, Y соотношениями

$$S_1 = \{(T,V) \in D |\ T \in [0,1],\ V \in [\beta(T), 1]\},$$

$$S_2 = \{(T,V) \in D\ |(V,T) \in S_1\},$$

$$Y = \big(D \setminus (S_1 \cup S_2)\big) \cup F(S_1),\ F(t,v) = \left(-\frac{t}{1+t}, 1-v\right).$$

На множестве Y рассмотрим оператор — аналог преобразования $\mathfrak{T}$ из (1) для $\Omega-$ дробей:

$$\mathfrak{J}(t,v) = \begin{cases}
\mathfrak{T}(t,v), & \text{если } t \ge 0, \mathfrak{T}(t,v) \notin S_2, \\
F \circ \mathfrak{T}^2(t,v), & \text{если } t \ge 0, \mathfrak{T}(t,v) \in S_2, \\
\mathfrak{T} \circ F^{-1}(t,v), & \text{если } t < 0, \mathfrak{T} \circ F^{-1}(t,v) \notin S_2, \\
F \circ \mathfrak{T}^2 \circ F^{-1}(t,v), & \text{если } t < 0, \mathfrak{T} \circ F^{-1}(t,v) \in S_2.
\end{cases}$$

Тогда система $(Y, \mathfrak{B}_\Omega, \mu_\Omega, \mathfrak{J})$ с семейством множеств Бореля $\mathfrak{B}_\Omega$ на Y и вероятностной мерой

$$\mu_\Omega(A) = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \iint_A \frac{dxdy}{(1+xy)^2}, \ A \in \mathfrak{B}_\Omega,$$

где

$$\Phi(\Omega) = \log 2 - \iint_{S(\Omega)} \frac{dxdy}{(1+xy)^2}$$

формирует эргодическую систему.

Применяя эргодическую теорему для $\mathfrak{J}$, мы получили некоторые метрические свойства для коэффициентов аппроксимации Υ_n $\Omega-$ дробей, которые определяются следующим образом:

$$\Upsilon_n = \Upsilon_n(x) = B_n^2 \left| x - \frac{A_n}{B_n} \right|,$$

где $A(n)/B(n)$ — подходящая дробь с номером n $\Omega-$ дроби числа x.

В частности, почти для всех x доказаны предельные теоремы для последовательностей $\{\Upsilon_n(x)\}_{n\geq 1}$, $\{\Upsilon_{n-1}(x), \Upsilon_n(x)\}_{n\geq 1}$.

[1] Nakada H. Metrical theory for a Class of Continued Fractions Transformations and Their Natural Extensions// Tokyo J. Math. 1981. v. 4, p. 399–426.

[2] Горкуша О. А. Некоторые метрические свойства $\Omega-$ дробей // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, №2. С. 28–58.

[3] Горкуша О. А. О конечных цепных дробях специального вида // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, №1(25). С. 80–108.

БИФУРКАЦИИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ОБОБЩЕННЫХ СРЕДНИХ ПО КОЛМОГОРОВУ

М. А. Гузев, А. А. Дмитриев *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Хорошо известно [1], что функция

$$M(u_1, \ldots, u_{n+1}) = \varphi^{-1}\varphi\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\varphi(u_k)\right)$$

при условии монотонности φ определяет среднее по Колмогорову. В классе таких функций при условии, что производная φ' имеет единственную экстремальную точку и монотонна на каждом из из интервалов вне еч, изучаются критические точки среднего по Колмогорову в области $0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_{n+1}$ при дополнительном условии $\sum\limits_{k=1}^{n+1} u_k = l$ в зависимости от параметра l.

Рассматриваемая проблема редуцируется к задаче на условный экстремум, в которой точка $\mathbf{u}_0 = (u_1, \ldots, u_{n+1})$, $u_k = \frac{l}{n+1}$, является критической для функции $M(u_1, \ldots, u_{n+1})$, т. е. она не зависят от номера i при любом значении параметра l. В работе показано, что существуют конфигурации критических точек, отличные от равномерно распределенных. При этом появление новых конфигураций имеет бифуркационный характер по параметру l и зависит от инволюции, связанной с функцией φ'. В частности, при $n = 1$ существует единственное бифуркационное значение этого параметра, совпадающего с точкой максимума функции φ'. В этом случае функция $M(u_1, u_2)$ имеет три критических точки, две из которых являются точками минимума, а третья – точкой максимума [2].

В случае $n = 2$ точек бифуркации четыре. В результате первой бифуркации появляется семь критических точек у функции $M(u_1, u_2, u_3)$, четыре из которых являются точками минимума, а три – седловыми точками. Вторая бифуркация сохраняет число критических точек, однако, точка $\mathbf{u}_0$ становится точкой максимума.

Полученные результаты допускают естественное приложение к описанию равновесия механических молекулярных цепочек, состоящих из попарно взаимодействующих n частиц.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №11-01-00357.

[1] Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 136–138.
[2] Гузев М. А. Перестройка потенциала системы частиц при внешнем механическом воздействии//Дальневосточный математический журнал. 2009. Т. 9, №1-2. С. 74–83.

КРУГОВАЯ СИММЕТРИЗАЦИЯ КОНДЕНСАТОРОВ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

В. Н. Дубинин *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Предлагается новая версия круговой симметризации множеств и конденсаторов, отличающаяся от классической симметризации Полиа тем, что результат симметризации располагается на римановой поверхности функции, обратной полиному Чебышева первого рода. В качестве приложения принципа симметризации доказывается ряд новых теорем в геометрической теории функций. В частности, дополняются результаты Хеймана о p-листных голоморфных функциях, не обращающихся в нуль, а также о p-листных в круге функциях, имеющих нуль порядка p в начале координат [1]. Хорошо известные задачи Гретша и Тейхмюллера для модулей плоских двусвязных областей распространяются на случай областей, расположенных на римановых поверхностях [2]. Основное внимание будет уделено приложениям симметризации [1] к неравенствам для полиномов с комплексными коэффициентами. Мы устанавливаем новую версию неравенства марковского типа для произвольных компактов комплексной плоскости, а также даем точную нижнюю оценку максимальных модулей критических значений полиномов P степени n, $P(0) = 0$, с фиксированными первым и старшим коэффициентами [3].

[1] Дубинин В. Н. Новая версия круговой симметризации с приложениями к p-листным функциям // Матем. сб. 2012. Т. 203, №7. С. 79–94.

[2] Дубинин В. Н. Экстремальные задачи Гретша и Тейхмюллера на римановых поверхностях // Матем. заметки. 2012. Т. 92, №76. С. 834–843.

[3] Dubinin V.N. Four-point distortion theorem for complex polynomials // Complex Variables and Elliptic Equations, 2013 (to appear).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, АССОЦИИРУЕМЫЕ С БИОЛОГИЧЕСКИМИ ИНФОРМАЦИОННЫМИ МАТРИЦАМИ

Ю. Н. Журавлёв *(БПИ ДВО РАН, Владивосток)*,

М. А. Гузев *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*,

Е. Е. Скурихин *(ИПМ ДВО РАН; ДВФУ, Владивосток)*

Вопросы хранения и передачи наследственной информации занимают одно из центральных мест в биологии с конца 19 века. Особое значение они приобрели после того, как было доказано, что гигантский объём наследственной информации сохраняется в естественных биологических носителях и довольно точно передаётся из поколения в поколение. Возникли задачи изучения механизма передачи наследственной информации, согласования точности с изменчивостью.

Представление о точности наследования связано с детерминизмом в естественно научных концепциях. И если в большинстве процессов в физике и механике, описываемых дифференциальными уравнениями, принцип детерминизма как будто соблюдается, то во многих других разделах науки в описаниях природных и социальных явлений имеется большая неопределённость. Научный анализ в этих разделах не позволяет пока достичь основного результата - возможности надёжных и достоверных предсказаний.

Объяснение такого положения всё чаще ищут в "скрытых параметрах" идея которых заимствована у физиков. Скрытыми параметрами в физике пытались объяснить наличие квантово-механической неопределённости, и хотя попытка считается неудачной, но идея, и даже надежды применить её в физике, остались. Сделаны попытки учёта неопределённости в биологии с помощью понятия тёмной материи РНК, предложено даже включить в состав тёмной материи все РНК, биологические функции которых пока неизвестны.

Такие попытки не случайны. Показательны примеры великих физиков, не смирившихся с следствиями из построенных ими революционных теорий и пытавшихся остаться в рамках детерминизма. А. Эйнштейн был одним из авторов гипотезы скрытых параметров в квантовой физике. Э. Шрёдингер в книге "Что такое жизнь..." высказывал убеждение, что достаточно мощный ум, располагая наследственной информацией, содержащейся в хромосомах, сумел бы в точности воссоздать организм.

Принципам детерминизма соответствует матричный принцип, сформулированный Кольцовым, как принцип передачи наследственной информации и развитый в современной биологии. Отвлекаясь от (очень важных) деталей, можно сформулировать его важнейшее неотъемлемое свойство так.

Имеется информационный носитель и процедура, которая строго однозначно строит по его структуре вполне определённую структуру. При этом что-то другое по сравнению с получившимся однажды может получиться из данного носителя только если происходит ошибка, сбой в процедуре, и достоинством процедур матричного синтеза или матричной репликации является как раз то, что такие сбои сводятся к минимуму.

Отметим, что в этом случае предполагается, что имеется вполне конкретная зашифрованная в носителе информация, которая однозначно расшифровывается способом, аналогичным матричному синтезу.

Логический анализ показывает, что матричный принцип в сформулированном выше виде неполон.

Возможная модификация связана с теоретико-категорным понятием представимого функтора и идеей А. Гротендика (Д. Мамфорд. Лекции о кривых на алгебраической поверхности, М: Мир (1968)), экстраполируя которую можно считать, что любой объект полностью определяется всей совокупностью своих действий на другие объекты (включая себя).

Если же рассматривается не вся совокупность действий, то она может вызываться разными объектами и наоборот один и тот же объект может вызвать разные совокупности последствий.

В соответствии с этим модифицированный матричный принцип может быть сформулирован так:

Из одного и того же информационного носителя можно извлечь разную информацию. Различные декодеры выделяют разные подструктуры и реализуя на них матричный принцип выдают разные результаты, хотя и по прежнему однозначно определенные.

Тем не менее остаются вопросы, которые могут быть заданы по поводу каждого информационного носителя: каково его истинное, и каково полное информационное содержание?

Ответ может быть дан в терминах информационных рядов. Информационный ряд - это последовательность информационных носителей, в которой каждый последующий член получается в результате взаимодействия с участием предыдущего и декодеров.

Вся совокупность информационных рядов, исходящих из информационной матрицы, определяет её истинное информационное содержание и задаёт становление объекта.

Вся совокупность возможных информационных рядов, исходящих из информационной матрицы, определяет её полное информационное содержание.

Полное информационное содержание включает в себя и все потенциалы, заложенные в объекте и не реализующиеся в заданных условиях. Если рассматривать скрытые переменные, как сущности, функции которых не могут быть реализованы в условиях рассмотрения, а потому потенциальны, то они также могут быть описаны, как возможные совокупности информационных рядов.

Основной задачей при таком подходе становится задача описания структур на совокупности информационных рядов, возникающих в процессе эволюции системы (и определяющих этот процесс), а также анализ этих структур и вывод на основе анализа свойств получающихся в результате объектов.

В докладе предполагается изложить общие соображения и на их основе

1. Рассмотреть эволюционирующие информационные системы и связанные с ними совокупности информационных рядов, то есть информационные потоки.

2. Рассмотреть геометрические структуры на информационных потоках и связать их с нарастанием сложности в процессе индивидуального развития.

3. Рассмотреть грубые модели процессов трансформации информационных носителей и геометрические структуры на ин-

формационных носителях.

4. Определить фундаментальный информационный предпучок множеств, информационные пучки модулей и векторные расслоения, сечения которых определяются информационными рядами и классами рядов, а когомологии отражают свойства объекта, получившегося в результате эволюции информационной системы.

Работа выполнена при поддержке грантов Президиума РАН Происхождение и развитие биосферы (подпрограмма 2, N 28), ДВО РАН 2-06-003, РФФИ 11-01-00357, ДВО РАН 12-II-CO-01M-001, ДВО РАН 12-III-A-01M-004.

УМНОЖЕНИЕ В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ, ЗАДАННОЙ ГЕНЕТИЧЕСКИМ КОДОМ

В. А. Казинец *(ДВГГУ, Хабаровск)*

Первые генетические коды симметрической группы S_n нашли Бернсайд [1897] и Мур [1897]. В работе [1] был предложен следующий генетический код группы S_n

$$x_i^{i+1} = e, i = \overline{1_i n - 1}$$

$$x_k \cdot x_i = x_j x_{i+1} x_k, k > i,$$

здесь $x_1, ..., x_{n-1}$ порождающие элементы свободной группы и данный генетический код позволяют однозначно представить элементы g группы S_n в виде

$$g = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} ... x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, 0 \le \alpha_i \le i$$

Рассмотрим элементы g_1, g_2 и их произведение

$$g_1 = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\alpha_2} ... x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, g_2 = x_1^{\beta} \cdot x_2^{\beta_2} ... x_{n-1}^{\beta_{n-1}}, g_1 \cdot g_2 = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} ... x_{n-1}^{\gamma_{n-1}}$$

Задача нахождения произведения элементов группы сводится к определению функций $\gamma_i = \gamma_i(\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{n-1}, \beta_1, \beta_2 ... \beta_{n-1})$

Теорема. *Если $E_{i,i+i}$ перестановка i и $i+1$ элемента в множестве $1, 2...n$ - то имеет место равенства*

$$E_{ii+i} x_1^{\alpha_1} ... x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} = x_1^{\alpha_1} .. x_{i-2}^{\alpha_{i-2} + [\alpha_{i-1}]_i} \cdot x_{i-1}^{i-1-\alpha_{i-1}} \cdot x_i^{\alpha_i + [\alpha_{i-1}]+1} ... x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

где $[k]_i$ - остаток от деления числа на i Данная теорема позволяет получить функции γ_i в явном виде и получить ряд интересных тождеств.

[1] Казинец В. А. Копредставление симметрической группы // Дальневосточная математическая школа-семинар имени ак. Е. В. Золотова «Фундаментальные проблемы математики и информационных наук», Хабаровск, 2009, с. 33–35.

[2] Казинец В. А. Определяющие соотношения для симметрической группы (тезисы) // Дальневосточная математическая школа-семинар имени ак. Е. В. Золотова: тез. докл. Владивосток: Дальнаука, 2000, 122–124.

[3] Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / Пер. с англ. Под ред. Ю. М. Мерзлякова // М.: Наука, 1980, 240 с.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РЯДОВ ОБЩЕГО ВИДА ПО ГАММА И q-ГАММА ФУНКЦИЯМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К СПЕЦИАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

Д. Б. Карп *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

В докладе будут рассмотрены степенные ряды, зависящие от неотрицательного параметра, следующего вида:

$$f(\mu;x)=\psi(\mu)\sum_{k\geq 0}f_k\phi(k+\mu)x^k,$$

где функции ψ и ϕ выбираются из следующего множества:

$$\psi,\phi\in\left\{\Gamma(\cdot),\frac{1}{\Gamma(\cdot)},\Gamma_q(\cdot),\frac{1}{\Gamma_q(\cdot)},\frac{\Gamma(a+\cdot)}{\Gamma(b+\cdot)}\right\},$$

где Γ и Γ_q обозначают гамма и q-гамма функции, соответственно. Будут найдены условия на неотрицательную последовательность $\{f_k\}_{k\geq 0}$ гарантирующие, что формальный степенной ряд

$$x\to\begin{vmatrix} f(\mu+\alpha;x) & f(\mu+\alpha+\beta;x)\\ f(\mu;x) & f(\mu+\beta;x)\end{vmatrix}\qquad(\alpha,\beta\geq 0)$$

имеет коэффициенты одного знака. В частности, из наших результатов следует, что для последовательности $\{f_k\}_{k\geq 0}$ из класса PF_2 (частотная последовательность Пойа порядка 2) функция $f(\cdot;x)$ принадлежит классу PF_2 (частотная функция Пойа порядка 2) для каждого фиксированного $x > 0$ и некотором естественном выборе функций ψ и ϕ. Приложения указанных результатов включают ряд новых и известных неравенств для модифицированной функции Бесселя и модифицированной q-функции Бесселя, функции Куммера и q-функции Куммера, гипергеометрической функции Гаусса и q-гипергеометрической функции Гейне, обобщенной гипергеометрической и q-гипергеометрической функций, а также для их отношений, определителей Турана, логарифмических производных и производных по параметру. Мы также коснемся определителей более высокого порядка и свойств возникающих в связи с этим комбинаторных многочленов. Также будут представлены несколько гипотез и открытых задач.

Представленные в докладе результаты получены совместно с С. И. Калмыковым и С. М. Ситником.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарёв *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*

Стационарная краевая задача, описывающая описывающая радиационный, кондуктивный и конвективный теплообмен в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^3$ имеет в безразмерных переменных следующий вид

$$-a\Delta\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4. \qquad (1)$$

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + u(\varphi - \Theta_0^4)|_{\Gamma_1} = 0; \ \theta| = \Theta_0, \ \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{1}{2}\varphi|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} = 0; \ \frac{\partial\theta}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 0. \qquad (2)$$

Здесь θ – температура, φ – интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, $\mathbf{v}$ – заданное поле скоростей, a, b, α, κ_a – заданные положительные постоянные. Пусть граница $\Gamma = \partial G$ состоит из участков таких, что Γ_1 – непроницаемая часть границы, а Γ_2, Γ_3 являются участками втекания и вытекания соответственно. Функция u, описывающая отражающие свойства участка границы Γ_1 рассматривается как управление. Требуется найти управление u и соответствующие поля θ, φ удовлетворяющие (1)-(2), а также ограничениям

$$u_1 \le u \le u_2 \text{ на } \Gamma_1, \quad 0 \le \theta \le M, \quad 0 \le \varphi \le M^4 \text{ в области } G, \qquad (3)$$

такие, что поток энергии через участок вытекания максимален,

$$\int_{\Gamma_3}\left((\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\theta + \frac{1}{2}b\varphi\right)d\Gamma \to \sup. \qquad (4)$$

Здесь u_1, u_2 заданные неотрицательные функции, $M = \max\Theta_0$.

Основные результаты работы состоят в получении новых априорных оценок управляемой системы (1)-(2), на основе которых доказана разрешимость экстремальной задачи и выведены необходимые условия оптимальности первого порядка. Кроме того, найдены условия на параметры модели, геометрию области G и поле скоростей $\mathbf{v}$, гарантирующие однозначную разрешимость сопряженной системы и как следствие регулярность системы оптимальности задачи управления (1)-(4). Результаты теоретического анализа являются основой численного моделирования оптимальных параметров процесса сложного теплообмена.

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. О. О *(ДВФУ; ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Рассматриваются интервальные экстремальные задачи в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Указанные задачи являются абстрактным вариантом интервальных краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений. Основной результат состоит в представлении и обосновании алгоритма нахождения универсального решения интервальных задач оптимизации на основе обобщенного подхода, используемого в [1].

Основная идея состоит в следующем. Пусть требуется решить интервальную задачу на экстремум

$$F(a, y) \to \inf, \quad y \in V, \tag{1}$$

где V — некоторое гильбертово пространство, $a \in K$ — неопределенный параметр из компакта $K \subset \mathbb{R}^m$. Обозначим через F_* функцию $a \in K \to F_*(a) = \inf\limits_{y \in V} F(a, y)$ и предположим, что $F_* \in L^p(K), \quad p \geq 1$. В пространстве Лебега $L^p(K)$ рассмотрим множество $M = \Big\{a \in K \to F(a, y) : \quad y \in V\Big\}$.

Задачу интервальной оптимизации можно теперь рассматривать как задачу нахождения проекции элемента F_* в пространстве $L^p(K)$ на множество M, то есть $\inf\Big\{\|F(\cdot, y) - F_*\|_{L^p(K)}, y \in V\Big\}$.

Отметим, что выбор различных показателей $p \geq 1$ и различных метрик в $L^p(K)$ будет приводить к различным алгоритмам решения интервальной задачи (1).

[1] Ащепков Л. Т., Давыдов Д. В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления // М.: Наука, 2006. 151 с.

[2] О В. О. Интервальная задача оптимального управления в гильбертовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики 2013, том 53, №4, с. 26–32.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ИЛИ НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Г. Подгаев *(ТОГУ, Хабаровск)*

Представлены результаты исследования задачи Стефана и задач в заданных нестационарных областях в направлении уменьшения требований на гладкость неизвестной границы фазового перехода или, соответственно, заданной границы и при допущении возможности вырождения уравнения. Целью является наиболее сложный вопрос - доказательство существования решения. В отличие от многих работ последнего времени в постановке задачи Стефана участвует в явном виде граница фазового перехода. В одномерном случае рассматривается уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(u_x) + a(x,t)u_x + b(x,t)u$. При допущении довольно произвольного вырождения ($\varphi' \geq 0$) для заданной необязательно монотонной границы $x = s(t), s \in W_2^1(0,T)$ установлены теоремы существования. В случае задачи Стефана неизвестная граница s находится из класса $W_2^1(0,T)$.

В трехмерном случае предложена новая, не рассмотренная другими авторами задача, также с неизвестной границей. В ней нахождению подлежит не только температура и граница фазового перехода, как в задаче Стефана, но и требуется подобрать такой коэффициент скрытой удельной теплоты плавления, при котором к заданному моменту времени масса (или объём) жидкой фазы достигнет заданной величины. То есть требуется определить постоянную k (скрытая удельная теплота плавления), функцию $s(t)$, определяющую границу фазового перехода, и решение $c(x_1, x_2, x_3, t)$ вырождающегося нелинейного уравнения теплопроводности $c_t = (rc)^m \triangle_x c$ в области $Q_s = \{(x,t) : r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < s(t), 0 < t < T\}$. Установлена теорема существования. Наконец, изложены результаты по построению недостающей базы для исследования многомерных вырождающихся нелинейных уравнений в нецилиндрических областях в естественных координатах на основании которой и с помощью предложенной модификации метода монотонности для таких областей доказаны теоремы однозначной разрешимости.

[1] Мейерманов А. М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986.

[2] Подгаев А. Г. Задачи типа Стефана и с управляющим параметром Торическая топология и автоморфные функции. Международная конференция. Хабаровск: ТОГУ, 2011. С. 164–169.

[3] Лисенков К. В. Проекционный метод решения задачи для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрической области с границей класса W_2^1 Дальневосточный математический журнал. Т. 12, є1, 2012. С.48-59.

[4] Podgaev A. G. On the Control Problem of Malting Substance Mass Amount 6^{th} International Conference on Mathematical Modeling. Abstracts. Yakutsk: 2011. C.54–55.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ НА ДВУУГОЛЬНИКИ

Е. Г. Прилепкина *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

В настоящее время в геометрической теории функций находят применение различные разновидности приведенных модулей. В [1] нами введен приведенный модуль со свободной границей и изучены некоторые его свойства. В представленном докладе рассматриваются задачи об экстремальном разбиении для приведенного модуля со свободной границей. Поскольку приведенные модули двуугольников и треугольников являются частными случаями модуля со свободной границей, данные результаты уточняют либо дополняют некоторые результаты Дубинина В.Н., Кирилловой Д.А., Поммеренке К., Васильева А.Ю., Кузьминой Г.В. [2-4]. В качестве примера приведем следующую теорему. Через $mod(G, a, b)$ обозначим приведенный модуль двуугольника [2].

Теорема. *Пусть $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ и пусть области G_1, G_2 не пересекаются, лежат в единичном круге $U := \{|z| < 1\}$, $0 \in \partial G_1$, $e^{i\theta_1} \in \partial G_1$, $0 \in \partial G_2$, $e^{i\theta_2} \in \partial G_2$ и углы области G_1 в точках 0, $e^{i\theta_1}$ равны $\frac{2t_1}{t_1+t_2}\pi$, π, а области G_2 в точках 0, $e^{i\theta_2}$ равны соответственно $\frac{2t_2}{t_1+t_2}\pi$, π.*

Тогда минимум величины $t_1^2 mod(G_1, 0, e^{i\theta_1}) + t_2^2 mod(G_2, 0, e^{i\theta_2})$ по всем парам (G_1, G_2) таких областей достигается для па-

ры (G_1^*, G_2^*), *где* $\overline{G_1^* \cup G_2^*} = \overline{U}$ *и на общей части границ* ∂G_1^*, ∂G_2^* *выполняется* $\arg\left\{(z - e^{i\theta_1})^{2t_1/(t_1+t_2)}(z - e^{i\theta_2})^{2t_2/(t_1+t_2)}/z\right\} =$ *const*. *Кроме того,* $mod(G_1^*, 0, e^{i\theta_1}) = -(t_2/\pi t_1)\log|2\sin((\theta_1 - \theta_2)/2)|$; $mod(G_2^*, 0, e^{i\theta_1}) = -(t_1/\pi t_2)\log|2\sin((\theta_1 - \theta_2)/2)|$.

Отметим, что данная теорема была впервые доказана другим методом в работе [4]. Наш метод доказательства позволяет заменить двуугольники на произвольные конечносвязные области.

[1] Karp D., Prilepkina E. Reduced modules with free boundary and its applications // Annales Academi Scient. Fen., 2009, V.34. P. 353–378.

[2] Дубинин В. Н., Кириллова Д. А. К задачам об экстремальном разбиении.// Зап. науч. семин. ПОМИ. 2008. Т.357. С.54–74.

[3] Кузьмина Г. В. О симметричных конфигурациях в задачах об экстремальном разбиении. II // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2008. Т.357. С.158–179.

[4] Pommerenke Ch., Vasil'ev A. Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partions of the unit disk // Pacific J. Math. 2002. V. 206, №2. P. 425–450.

ПУНКТИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЧУ

Е. Е. Скурихин, А. Г. Сухонос *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

1. Пунктированным пространством Чу называется тройка $(A^\star, r, X^\star)$, где $r : A^\star \times X^\star \longrightarrow \Sigma^\star$ – отображение пунктированных множеств такое, что если $a_\star \in A^\star$, $x_\star \in X^\star$, $\sigma_\star \in \Sigma^\star$ – отмеченные точки, то $r(a_\star, x) = r(a, x_\star) = \sigma_\star$ для любых $a \in A^\star$,

$x \in X^{\star}$. Пунктированные пространства Чу и их преобразования Чу образуют категорию, которую будем обозначать $Chu_{\Sigma^{\star}}$.

Изучаются пределы и копределы пунктированных пространств ЧУ, а также топологии Гротендика на них.

2. Рассматриваются G-пространства Чу, т.е. пространства с действиями групп. На G-пространства и пунктированные пространства Чу переносятся результаты работы [1].

[1] Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г. Топология Гротендика на пространствах Чу// Математические труды. 2008. Т. 1, № 2. С. 159–186.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ

О. В. Соболева *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Целью настоящей работы является анализ единственности и устойчивости решений обратных экстремальных задач для модели массопереноса описываемой стационарным уравнением диффузии-реакции с переменным коэффициентом диффузии.

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ с липшицевой границей Γ задачу нахождения функции φ из соотношений

$$-\mathrm{div}(\lambda \nabla \varphi) + k\varphi = f,\ \varphi|_{\Gamma} = \psi. \quad (1)$$

Здесь $\lambda \equiv \lambda(\mathbf{x}) > 0$ – коэффициент диффузии, k – величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, f – плотность объемных источников, ψ – заданная на Γ функция.

Исследуемая в работе обратная задача заключается в нахождении неизвестных коэффициента λ и граничной функции ψ, которые требуется опредеделить вместе с решением φ по дополнительной информации о состоянии среды в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. Указанная задача формулируется как задача минимизации функционала $J(\varphi, \lambda, \psi) \equiv \frac{\mu_0}{2}\|\varphi - \varphi_d\|^2_{1,Q} + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|^2_s + \frac{\mu_2}{2}\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma} \to \inf$ на решениях исходной краевой задачи. Исследование поставленной коэффициентной обратной задачи сводится к исследованию соответствующей экстремальной задачи [1, 2].

В работе доказывается разрешимость указанной экстремальной задачи, выводятся системы оптимальности и исследуются некоторые их свойства. Основываясь на этих свойствах, устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений обратной экстремальной задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00313-а).

[1] Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости, Владивосток: Дальнаука. 2008. 365 с.

[2] Алексеев Г. В., Вахитов И. С., Соболева О. В. Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диф-

фузии-реакции // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, №12. С. 2190–2205.

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

Д. А. Терешко *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Работа посвящена исследованию вопросов сходимости итерационного алгоритма, предложенного для решения системы оптимальности, возникающей при рассмотрении экстремальных задач для стационарной модели тепловой конвекции. Указанная модель представлена краевой задачей для системы нелинейных уравнений в частных производных. С помощью пространств Соболева стандартным образом получается ее слабая формулировка, которая для краткости записывается в виде операторного уравнения $F(\mathbf{u}, p, T, \chi) = 0$, где $\mathbf{u}$ – скорость, p – давление, T – температура, χ – поток тепла на участке границы, играющий в дальнейшем роль управления.

Экстремальные задачи обычно возникают при рассмотрении обратных задач либо задач управления. При помощи адекватно выбранного функционала качества J они сводятся к задаче условной минизизации

$$J(\mathbf{u}, p, T, \chi) \to \inf, \quad F(\mathbf{u}, p, T, \chi) = 0, \quad \chi \in K,$$

где K – некоторое выпуклое замкнутое множество управлений. Для нее выводится система оптимальности, имеющая смысл необходимых условий экстремума первого порядка. Она состоит из слабых формулировок исходной краевой задачи, сопряженной задачи и условия оптимальности управления.

Для решения системы оптимальности в монографии [1] предложен итерационной процесс, основанный на методе Ньютона-Канторовича для операторного уравнения в функциональных банаховых пространствах. Так как этот подход применяется до этапа дискретизации, то вопрос и сходимости алгоритма можно рассматривать в рамках теории краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных независимо от используемых далее численных методов. Основной целью исследования является получение условий на исходные данные, обеспечивающих сходимость итерационного процесса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00313-а).

[1] Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.

МЕТОД КТМ ДЛЯ ВОСЬМИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

Ю. Н. Харченко, А. С. Лосев *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

В настоящей работе рассматривается применение теории корневых трансфер-матриц (КТМ) для изучения глобального поведения и сингулярности макрохарактеристик восьмивершинной модели, представленной в виде четырехлинейной модели магнетиков на квадратной решетке.

Рассмотрим на плоскости квадратную решетку с узлами $(n,\ m)$, где $n = 1, , N + 1,\ m = 1, M + 1$ и $N,\ M$ некоторые натуральные числа. В каждом узле рассматривается бинарная переменная (спин) σ_n^m, которая принимает значения $-1,\ 1$. Каждый спин имеет несколько взаимодействий с из ближайшими спинами, по вертикали 2, по горизонтали 2 и по диагонали 4. В двумерной четырехлинейной модели на решетке рассмотрим статистическую сумму, которая имеет следующий вид

$$Z_{MN}^{(4)} = \sum_{\sigma} \prod_{n=1}^{N} \prod_{m=1}^{M} e^{K_1 \sigma_n^m \sigma_{n+1}^m + K_2 \sigma_n^m \sigma_n^{m+1} + K_3 \sigma_{n+1}^m \sigma_n^{m+1} + K_4 \sigma_n^m \sigma_{n+1}^{m+1} + H \sigma_n^m}.$$

Здесь суммирование распространяется по всем состояниям спинов, параметры $K_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ – параметры межспинового взаимодействия по одной из линий взаимодействия. Они имеют вид

$K_i = k_i/BT$, где k_i – коэффициент межспинового взаимодействия по той же линии, B – постоянная Больцмана, а T – температура; $H = h/BT$ - параметр взаимодействия с внешним полем с коэффициентом h. Свободная энергия $F^{(4)}$ будим определять через термодинамический предел

$$F^{(4)} = \lim_{M,N\to\infty} \frac{LnZ^{(4)}_{MN}}{MN} = \lim_{N\to\infty} \frac{Ln\Lambda^{(4)}}{N},$$

где в последнем равенстве используется главное собственное значении (ГСЗ) $\Lambda^{(4)}$ КТМ. КТМ позволяет выделить симметрийные свойства модели, в силу которых количество различных магнетиков сокращается до 9 видов. В свою очередь, в силу дополнительной симметрии, появляющейся в магнетиках без поля, количество типов магнетиков уменьшается до трех видов. С помощью методов степенных итерраций КТМ для данных видом магнетиков вычислена свободная энергия и построены сингулярные кривые.

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СВЯЗНОСТИ ПАР ВЕРШИН ГРАФА

Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Для случайных графов с низконадежными ребрами построен удобный в реализации алгоритм вычисления вероятности связности любой пары его вершин на основе доказанного асимптотического соотношения. Для параметров полученного соотношения (характеристик кратчайших путей) разработаны модификации классических алгоритмов. Особенностью предлагаемых алгоритмов является тот факт, что в них не требуется перечислять кратчайшие пути между узлами, а лишь определять их количество. Проведенный вычислительный эксперимент подтвердил быстродействие построенной процедуры для вероятности связности по сравнению с методом Монте-Карло.

Рассмотрим неориентированный связный простой граф G с множеством узлов U и множеством рчбер V. Предположим, что каждое ребро v графа G с вероятностью $p(v)$ работоспособно, приччм все ребра функционируют независимо. Обозначим $D(i,j)$ минимальное число ребер в путях, соединяющих узлы i,j графа G, а $C(i,j)$ число путей с $D(i,j)$ рчбрами. Для вероятности связности $P_{ij}(G)$ узлов i,j графа G доказаны следующие утверждения.

Теорема. *Если* $p(v)=h,\ v\in V$, *то*

$$P_{ij}(G)\sim C(i,j)h^{D(i,j)},\ h\to 0. \quad (1)$$

Следствие. *Если* $p(v)=h,\ v\in V$, *то*

$$\min_{1\le i,j\le n} P_{ij}(G)\sim Ch^{D},\ h\to 0,$$

$$D = \max_{1\le i,j\le n} D(i,j),\ C = \min_{(i,j):\, D(i,j)=D} C(i,j).$$

Для нахождения всех элементов матриц $||D(i,j)||_{i,j=1}^n$, $||C(i,j)||_{i,j=1}^n$ асимптотической формулы (1) были построены модификации известных в теории графов алгоритмов (в том числе Флойда-Стейнберга). Такая процедура является более экономичной, чем последовательное определение элементов этих матриц, имеет вычислительную сложность $O(n^3 \ln n)$ для матрицы $||D(i,j)||_{i,j=1}^n||$ и $O(n^4)$ для матрицы $||C(i,j)||_{i,j=1}^n$. Зная матрицу $||D(i,j)||_{i,j=1}^n$, можно вычислить диаметр D графа G. Для сетей с ограниченным диаметром D сложность вычисления матриц $||D(i,j)||_{i,j=1}^n$, $||C_s(i,j)||_{i,j=1}^n$ составляет $O(n^3)$ арифметических операций.

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ

М. А. Шепелов *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

В работе рассматривается задача восстановления коэффициента, входящего в дифференциальное уравнение для модели массопереноса, по дополнительной информации о решении исходной краевой задачи. Изучение указанной задачи можно свести к исследованию соответствующей экстремальной задачи при определенном выборе функционала качества. Для исследования обратных экстремальных задач в работе применяются методы условной минимизации [1].

Целью работы является разработка эффективного параллельного алгоритма решения задачи для модели массопереноса, имеющей вид стационарного уравнения диффузии-реакции с переменными коэффициентом химической реакции, рассматриваемой в области Ω при условии Дирихле на границе Γ.

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ с липшицевой границей Γ задачу идентификации для модели переноса (загрязняющего) вещества, описываемой следующими соотношениями:

$$-\mathrm{div}(\lambda \nabla \varphi) + k\varphi = f,\ \varphi|_\Gamma = \psi. \tag{1}$$

Здесь $\lambda \equiv \lambda(\mathbf{x}) > 0$ – переменный коэффициент диффузии, k – величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, f – плотность объемных источников, ψ – заданная на Γ функция. С использованием метода [2] в работе была получена система оптимальности. На основе ее анализа с помощью программного пакета FreeFem++ разработан параллельный алгоритм решения обратной экстремальной задачи, исследована его сходимость и эффективность.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00313-а) и Министерства образования и науки Российской Федерации (12-I-P17-03 ДВО РАН, соглашение 14.A18.21.0353).

[1] Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости, Владивосток: Дальнаука. 2008. 365 с.
[2] Алексеев Г. В., Шепелов М. А. Об устойчивости решений коэффициентных обратных экстремальных задач для стационарного уравнения конвекции-диффузии // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т.4. С. 3–16

СПИСОК УЧАСТНИКОВ

Abe Hiraku	Tokyo Metropolitan University, Tokyo	abe-hiraku@ed.tmu.ac.jp
Arzhantsev Ivan	Lomonosov Moscow State University, Moscow	arjantse@mccme.ru
Ayzenberg Anton	Moscow State University, Moscow	ayzenberga@gmail.com
Bernik Vasilii	Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Belarus, Minsk	bernik.vasili@mail.ru
Bodrenko Andrey	Volgograd State University, Volgograd	bodrenko@bodrenko.com
Bodrenko Irina	Volgograd State University, Volgograd	irina@bodrenko.org
Budarina Natalia	Institute of applied mathematics, Khabarovsk division, Khabarovsk	buda77@mail.ru
Choi Suyoung	Ajou University, Suwon	schoi@ajou.ac.kr
Duan Haibao	Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing	dhb@math.ac.cn

Hatanaka Miho	Department of Mathematics, Osaka City University, Osaka	hatanaka.m.123@gmail.com
Horiguchi Tatsuya	Osaka City University, Osaka	d13saR0z06@ex.media.osaka-cu.ac.jp
Ishida Hiroaki	Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University, Kyoto	ishida@kurims.kyoto-u.ac.jp
Jiang Yi	Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing	jiangyi@amss.ac.cn
Khovanskii Askold	Institute for System Studies of the Academy of Sciences of Russia, Moscow	askold @ math.toronto.edu
Kuroki Shintaro	OCAMI and University of Toronto, Osaka and Toronto	kuroki@scisv.sci.osaka-cu.ac.jp
Kuwata Hideya	Osaka City University, Osaka	hideya0813@gmail.com
Limonchenko Ivan	Lomonosov Moscow State University, Moscow	iylim@mail.ru
Lopatkin Viktor Yevgenyevich	South China Normal University, Guangzhou	wickktor@gmail.com
Lu Zhi	Fudan University, Fudan	zlu@fudan.edu.cn
Masuda Mikiya	Osaka City University, Osaka	masuda@sci.osaka-cu.ac.jp

Millionshchikov Dmitry	Lomonosov Moscow State University, Moscow	mitia_m@hotmail.com
Nishimura Yasuzo	University of Fukui, Fukui	nyasuzo@hkg.odn.ne.jp
Pan Jianzhong	Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing	pjz@amss.ac.cn
Panov Taras	Lomonosov Moscow State University, Moscow	tpanov@mech.math.msu.su
Park Hanchul	Ajou University, Suwon	hpark@ajou.ac.kr
Park Seonjeong	National Institute of Mathematical Sciences, Daejeon	seonjeong1124@nims.re.kr
Suh Dong Youp	Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon	dysuh@math.kaist.ac.kr
Ustinov Alexey	IAM FEB RAS, Khabarovsk	ustinov.alexey@gmail.com
Ustinovskiy Yury	Steklov Mathematical Institute, Moscow	yuraust@gmail.com
Woo Gyung Soo	Changwon National University, Changwon, South Korea	gswoo@changwon.ac.kr
Yu Li	Nanjing University, Nanjing	yuli@nju.edu.cn
Zeng Haozhi	Osaka City University, Osaka	zenghaozhi@163.com
Zhao Xuezhi	Capital Normal University, Beijing	zhaoxve@mail.cnu.edu.cn

Авдеева Мария Олеговна	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	avmariya@yandex.ru
Актанко Оксана Васильевна	ДВГГУ, Хабаровск	oksanaaktanko@mail.ru
Бабинер Елена Станиславовна	ПГУ им. Шолом-Алейхема, Биробиджан	mineeva_elena18@mail.ru
Базайкин Ярослав Владимирович	Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск	bazaikin@math.nsc.ru
Байдин Андрей Викторович	ДВФУ, Владивосток	thulf.m@gmail.com
Богоутдинова Юлия Геннадьевна	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	prosyanik@mail.ru
Бризицкий Роман Викторович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	mlnwizard@mail.ru
Бурмеха Роман Юрьевич	ТОГУ, Хабаровск	romanburmeha@mail.ru
Быковская Елена Владиленовна	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	elena@iam.khv.ru
Быковский Виктор Алексеевич	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	vab@iam.khv.ru
Вальковский Виталий Владимирович	Новосибирский государственный университет, Новосибирск	ValkovskiyVV@yandex.ru
Виноградова Полина Витальевна	ДВГУПС, Хабаровск	vpolina17@hotmail.com

Вихтенко Эллина Михайловна	ТОГУ, Хабаровск	vikht@mail.khstu.ru
Гайфуллин Александр Александрович	Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва	agaif@mi.ras.ru
Гаськова Тамара Андреевна	ДВГГУ, Хабаровск	white_woolf@bk.ru
Гореликов Евгений Юрьевич	Новосибирский государственный университет, Новосибирск	Ge-519@ngs.ru
Гореликова Анастасия Егоровна	Новосибирский государственный университет, Новосибирск	Gorelikova.a@gmail.com
Горкуша Ольга Александровна	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	684bmts@rambler.ru
Грицай Алексей Валерьевич	ТОГУ, Хабаровск	algasoph@bk.ru
Гузев Михаил Александрович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	guzev@iam.dvo.ru
Демидова Александра Олеговна	ДВГГУ, Хабаровск	bestiua@bk.ru
Деревцов Евгений Олегович	ТОГУ, Хабаровск	algasoph@bk.ru
Дмитриев Александр Алексеевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	dmitriev@iam.dvo.ru

Дряглина Ирина Владимировна	ДВГГУ, Хабаровск	cyhova@mail.ru
Дубинин Владимир Николаевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	dubinin@iam.dvo.ru
Ероховец Николай Юрьевич	МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва	erochovetsn@hotmail.com
Ефимова Мария Александровна	ТОГУ, Хабаровск	I.Irbissa@mail.ru
Зайкова Екатерина Романовна	ТОГУ, Хабаровск	c-giraffe@mail.ru
Зарубин Анатолий Георгиевич	ТОГУ, Хабаровск	sin@mail.khstu.ru
Звягина Анна Стефановна	ДВГГУ, Хабаровск	zviagina@khspu.ru
Иванчук Мария Ивановна	ДВГГУ, Хабаровск	mariya-ivanchuk@mail.ru
Илларионов Андрей Анатольевич	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	illar_a@list.ru
Ищенко Кристина Александровна	ДВГГУ, Хабаровск	christina_ischenko@mail.ru
Казинец Виктор Алексеевич	ДВГГУ, Хабаровск	matan@khspu.ru
Карачанская Елена Викторовна	ТОГУ, Хабаровск	chalykh@mail.khstu.ru

Карманов Дмитрий Александрович	ТОГУ, Хабаровск	zenbudd@mail.ru
Карп Дмитрий Борисович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	dmkrp@yandex.ru
Ким Виктория Юрьевна	ДВФУ, Владивосток	kimv@mail.primorye.ru
Ключников Анатолий Егорович	ДВГГУ, Хабаровск	anat.klych@yandex.ru
Ковтанюк Андрей Егорович	ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток	ankov@imcs.dvgu.ru
Ковтун Татьяна Борисовна	Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе, Новосибирск	takovtun@mail.ru
Ковтя Полина Алексеевна	ТОГУ, Хабаровск	jeid_93@mail.ru
Козлов Денис Егорович	ТОГУ, Хабаровск	nata_mark@mail.ru
Колисова Мария Вячеславовна	ТОГУ, Хабаровск	nata_mark@mail.ru
Коношко Ксения Николаевна	ТОГУ, Хабаровск	ksushka393@mail.ru
Копытина Дарья Сергеевна	ТОГУ, Хабаровск	daria.kopitina@gmail.com
Коржавин Валерий Александрович	ТОГУ, Хабаровск	nata_mark@mail.ru
Кочнев Антон Евгеньевич	ТОГУ, Хабаровск	kochnev93@mail.ru

Кривовезюк Никита Иванович	ТОГУ, Хабаровск	algasoph@bk.ru
Кузьмина Ольга Владимировна	ТОГУ, Хабаровск	olya.kuzmina@mail.ru
Лобанов Алексей Викторович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	alekslobanov1@mail.ru
Лосев Александр Сергеевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	Alexax@bk.ru
Лукина Элина Эдуардовна	ТОГУ, Хабаровск	yaoi-foreve@yandex.ru
Луковенко Сергей Афанасьевич	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	lsa@iam.khv.ru
Ляшенко Вадим Юрьевич	ТОГУ, Хабаровск	vadim.94.17@mail.ru
Мазитова Марина Гамиловна	ДВГГУ, Хабаровск	marina.g.mazitova@gmail.com
Майдуров Сергей Евгеньевич	ТОГУ, Хабаровск	pilgrim27@mail.ru
Маркова Наталья Владимировна	ТОГУ, Хабаровск	nata_mark@mail.ru
Маторов Тимур Валерьевич	ТОГУ, Хабаровск	timur_matorov@mail.ru
Мендель Виктор Васильевич	ДВГГУ, Хабаровск	vmendel@khspu.ru

Миронов Андрей Евгеньевич	Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск	mironov@math.nsc.ru
Монина Мария Дмитриевна	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	matemkrygok@gmail.com
Намм Роберт Викторович	ВЦ ДВО РАН, Хабаровск	namm@mail.khstu.ru
Нестеренко Максим Викторович	ТОГУ, Хабаровск	salazarblack@mail.ru
Нетай Елена Юрьевна	Математический Институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва	bunkova@mi.ras.ru
Нетай Игорь Витальевич	НИУ ВШЭ, Москва	i.v.netay@gmail.com
Новицкий Игорь Михайлович	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	novim@iam.khv.ru
О Виктория Олеговна	ДВФУ, ИПМ ДВО РАН, Владивосток	ovioy@list.ru
Огиенко Дарья Сергеевна	ТОГУ, Хабаровск	rp_94@mail.ru
Омельчук Алла Борисовна	ДВГГУ, Хабаровск	alla_omelchuk@mail.ru
Осипова Анастасия Кирилловна	ТОГУ, Хабаровск	ravenwhite_1@mail.ru
Островская Марина Евгеньевна	ТОГУ, Хабаровск	ostrovskayme@mail.ru

Паздникова Анастасия Эдуардовна	ТОГУ, Хабаровск	algasoph@bk.ru
Пащевская Софья Александровна	Факультет математики НИУ ВШЭ, Москва	closedown@yandex.ru
Первунин Владимир Викторович	ТОГУ, Хабаровск	Fal2enangel@mail.ru
Подгаев Александр Григорьевич	ТОГУ, Хабаровск	pvu1707@mail.ru
Подобашин Владимир Александрович	ТОГУ, Хабаровск	44Alucard44@mail.ru
Пономаренко Софья Геннадьевна	ТОГУ, Хабаровск	algasoph@bk.ru
Потапов Денис Александрович	ТОГУ, Хабаровск	RDA-94@mail.ru
Прилепкина Елена Гумаровна	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	pril-elena@yandex.ru
Прохоров Игорь Васильевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	prh@iam.dvo.ru
Прудников Виталий Яковлевич	ТОГУ, Хабаровск	prudnickov.vit@yandex.ru
Редько Екатерина Александровна	ДВГГУ, Хабаровск	catrh@mail.ru

Ржевский Вячеслав Сергеевич	ТОГУ, Хабаровск	vyaheslav_1986@mail.ru
Римлянд Владимир Иосифович	ТОГУ, Хабаровск	riml@fizika.khstu.ru
Романов Марк Анатольевич	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	romanov@iam.khv.ru
Руденко Даниил Глебович	Факультет математики НИУ ВШЭ, Москва	Rudenkodaniil@gmail.com
Сазонов Михаил Александрович	ДВГГУ, Хабаровск	mishanya.007@bk.ru
Семиборода Екатерина Олеговна	ДВГГУ, Хабаровск	ktk2008katya@mail.ru
Син Александр Земсуевич	ТОГУ, Хабаровск	sin@mail.khstu.ru
Скурихин Евгений Евгеньевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	eeskur@gmail.com
Смоляков Александр Евгеньевич	ТОГУ, Хабаровск	sashka1594@mail.ru
Смотров Михаил Николаевич	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	gsm@iam.khv.ru
Соболева Ольга Владимировна	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	soboleva22@mail.ru
Соседова Надежда Ивановна	ТОГУ, Хабаровск	umochkanadushka@mail.ru

Сухонос Андрей Григорьевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	agsukh@mail.ru
Сясина Татьяна Васильевна	ТОГУ, Хабаровск	tatyana_syasina@mail.ru
Табачук Наталья Петровна	ДВГГУ, Хабаровск	tabachuk@yandex.ru
Талько Анастасия Сергеевна	ТОГУ, Хабаровск	fllay@mail.ru
Терешко Дмитрий Анатольевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	ter@iam.dvo.ru
Терешко Ирина Сергеевна	ТОГУ, Хабаровск	nata_mark@mail.ru
Уварова Елена Сергеевна	ТОГУ, Хабаровск	nata_mark@mail.ru
Ушаков Андрей Андреевич	ТОГУ, Хабаровск	andrew_ushakov@inbox.ru
Филатова Мария Владимировна	ХГАЭП, Хабаровск	mafi@li.ru
Харченко Юрий Николаевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	Har@iam.dvo.ru
Хусаинов Ахмет Аксанович	КнАГТУ, Комсомольск-на-Амуре	husainov51@yandex.ru
Цициашвили Гурами Шалвович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	guram@iam.dvo.ru
Чапкина Анастасия Викторовна	ДВГГУ, Хабаровск	stasakr@bk.ru

Чеботарев Александр Юрьевич	ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток	cheb@iam.dvo.ru
Чепурко Сергей Александрович	ТОГУ, Хабаровск	prostomongol2040@mail.ru
Шевкун Дарья Владимировна	ТОГУ, Хабаровск	donechka-1994@mail.ru
Шевцова Оксана Александровна	ДВГГУ, Хабаровск	oksusha_1990@mail.ru
Шевченко Валентина Сергеевна	ТОГУ, Хабаровск	Valentina.Shevchenko .1993@list.ru
Шепелов Михаил Алексеевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	726577@mail.ru
Шулика Надежда Анатольевна	ДВГГУ, Хабаровск	shulika2006@yandex.ru
Эйрих Надежда Владимировна	ПГУ им. Шолом-Алейхема, Биробиджан	nadya_eyrikh@mail.ru
Юдич Алина Андреевна	ДВГГУ, Хабаровск	alina.yudich@mail.ru
Якшина Елена Алексеевна	Новосибирский государственный университет, Новосибирск	aneles_atoe@mail.ru

Оглавление

Научное издание

ДЕЙСТВИЯ ТОРОВ: ТОПОЛОГИЯ, ГЕОМЕТРИЯ, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ
Тезисы докладов
Международной открытой российско-китайской конференции

Отпечатано с оригинал-макета, изготовленного в Хабаровском отделении
Института прикладной математики ДВО РАН

Ответственный за выпуск *А. З. Син*
Оператор компьютерной верстки *Ю. Г. Богоутдинова*

Подписано в печать 16.07.13. Формат 60×84/16. Бумага писчая. Гарнитура «Таймс».
Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,5. Тираж 150 экз. Заказ № 163.

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136

Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136