INTERNATIONAL CONFERENCE

TORIC TOPOLOGY, NUMBER THEORY AND APPLICATIONS

CONFERENCE PROCEEDINGS

KHABAROVSK
2015

Математический институт РАН им. В.А. Стеклова
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
Тихоокеанский государственный университет
Министерство образования и науки Хабаровского края

ТОРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы Международной конференции
06–12 сентября 2015 года, Хабаровск

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2015

УДК 517, 519
ББК В 152 л 0
Т605

Торическая топология, теория чисел и их приложения: материалы
Т605 Международной конференции, Хабаровск, 6–12 сентября 2015 г. / под научной ред. В. М. Бухштабера, В. А. Быковского – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2015. – 139 с.
ISBN 978-5-7389-1774-5

Международная конференция проводится при поддержке Правительства Хабаровского края, Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-20662), Фонда «Династия».

Утверждено к печати ученым советом Института прикладной математики ДВО РАН.

ISBN 978-5-7389-1774-5

International conference
«Toric Topology, Number Theory and Applications»
September 6 - 12, 2015
Khabarovsk, Russia

Organizers:

- Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
- Institute for Applied Mathematics, Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences
- Pacific National University
- Ministry of Education and Science of the Khabarovsk Krai

Program committee:

Victor Buchstaber (Steklov Mathematical Institute, Moscow, chairman)

Mikhail Guzev (Institute for Applied Mathematics, Vladivostok, vice-chairman)

Yuri Nesterenko (Moscow State University, Moscow, vice-chairman)

Vasilij Bernik (Institute of Mathematics, Belarus)

Tudor Ratiu (Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Switzerland)

Zhi Lu (Fudan University, China)

Mikiya Masuda (Osaka City University, Japan)

Iskander Taimanov (Sobolev Institute of Mathematics)

Taras Panov (Moscow State University)

Alexander Podgaev (Pacific National University)

Dong Youp Suh (KAIST, South Korea)

Local organizing committee:

Victor Bykovskii (IAM FEB RAS, chairman)

Maria Avdeeva (IAM FEB RAS, vice-chairman)

Alexander Sin (PNU, vice-chairman)

Maria Monina (IAM FEB RAS, secretary)

Natalia Markova (PNU)

Ellina Vikhtenko (PNU)

Mark Romanov (IAM FEB RAS)

Alexey Sundukov (MES KHK)

Alexei Ustinov (IAM FEB RAS)

Plenary speakers:

Vasilij Bernik (Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of the Republic of Belarus, Minsk)

Dmitry Bolotov (B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Khar'kov)

Victor Buchstaber (Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow)

Nickolai Dobrovol'skii (Tula State Pedagogical University)

Nikolai Dolbilin (Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow)

Askold Khovanskii (University of Toronto, Canada)

Shintaro Kuroki (Graduate School of Mathematical Sciences The University of Tokyo, Japan)

Antanas Laurincikas (Department of Mathematics and Informatics, Vilnius University, Lithuania)

Mikiya Masuda (Osaka City University, Japan)

Andrey Mironov (Sobolev Institute of Mathematics)

Alexander Mikhailov (University of Leeds, UK)

Nikolai Moshchevitin (Lomonosov Moscow State University)

Taras Panov (Lomonosov Moscow State University)

Dong Youp Suh (KAIST, South Korea)

All participants of the conference are invited to submit a paper to the special volume of Far Eastern Mathematical Journal (FEMJ). FEMJ is an open access mathematical journal published by Institute for Applied Mathematics (Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences). Send your papers to `FEMJ@iam.khv.ru`.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Ayzenberg A. A., 8
Bernik V. I., 10, 60
Buchstaber V. M., 9, 69, 112
Budarina N. V., 10
Bunkova E. Yu., 12
Bykovskii V., 14
Chebotarev A. Yu., 15, 16, 72, 85
Cho Y., 18
Dmitriev A. A., 23
Dolbilin N. P., 21
Götze F., 10
Grinblat A., 24
Gudimenko A. I., 22
Guzev M. A., 22, 23
Husainov A. A., 25
Khovanskii A.G., 27
Kim M. K., 18
Konstantinou-Rizos S., 31
Kovtanyuk A. E., 15, 16, 85
Kuroki S., 33
Kustarev A., 37
Kuwata H., 41
Laurinčikas A., 41
Limonchenko I. Yu., 42
Masuda M., 43
Mauleshova G. S., 44
Mikhailov A., 48
Mironov A. E., 44
Namm R. V., 49, 80
Novitskii I. M., 50
Panov T. E., 51
Suh D. Y., 18
Sukhonos A. G., 53
Ustinov A., 14
Vikhtenko E. M., 49
Woo G., 49
Агапова Е. Г., 54
Алексеев Г. В., 56

Амосова Е. В., 57
Ахунжанов Р. К., 59
Болотов Д. В., 64
Бризицкий Р. В., 66, 67
Брюно А. Д., 68
Вербицкий В. А., 71
Гренкин Г. В., 72
Демшин И. Н., 73
Добровольский Н. М., 75
Добровольский Н. Н., 75
Дорофеев Я. К., 76
Дубинин В. Н., 78
Дымченко Ю. В., 79
Дьяконова О. Е., 87
Ероховец Н. Ю., 69
Жильцов А. В., 80
Казак М. С., 81
Казинец В. А., 82
Карачанская Е. В., 84
Козлов А. В., 99
Кукина Т. М., 56
Лисенков К. В., 95
Лобанов А. В., 87
Ломакина Е. Н., 88
Машков Д. В., 89
Мендель В. В., 91
Мощевитин Н. Г., 92
Осипова М. А., 119
Павлов Н. А., 94
Пестрецова В. В., 85
Подгаев А. Г., 95
Попова Т. М., 99
Прилепкина Е. Г., 100
Прокопьева Д. Б., 116
Прохоров И. В., 102
Прудников В. Я., 104
Птахов Д. О., 108
Сарицкая Ж. Ю., 67
Скурихин Е. Е., 109
Соболева О. В., 110
Соколов А. А., 68
Соломадин Г. Д., 112
Соснов В. В., 113
Спивак Ю. Э., 115
Степанова А. А., 116
Сущенко А. А., 102
Тарасенко А. А., 121
Терешко Д. А., 118
Устиновский Ю. М., 112
Цициашвили Г. Ш., 119
Чеканов С. Г., 121
Шлык В. А., 73

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

VOLUME POLYNOMIAL OF A MULTI-FAN AND CORRESPONDING DUALITY ALGEBRA

Anton A. Ayzenberg, based on joint work with M. Masuda
(Osaka City University and Higher School of Economics, Osaka/Moscow)

For a given complete simplicial fan $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ with m rays consider the set of all simple convex polytopes with normal fan Δ. Each such polytope is completely determined by a collection of support parameters $c_1, \ldots, c_m$, where c_i is the normalized distance from i-th facet to the origin. The volume of the polytope depends on support parameters thus determines a function $V_\Delta(c_1, \ldots, c_m)$ which happens to be a homogeneous polynomial of degree n. It is called the volume polynomial. Timorin showed that one can recover the cohomology algebra of the corresponding toric variety from V_Δ. He applied his technique to give an elementary proof of Stanley's g-theorem.

Multi-fans and multi-polytopes are combinatorial-geometrical notions which naturally generalize fans and polytopes. Masuda and Hattori introduced these notions in relation with their study of torus manifolds.

In our work we combined these two theories and found several interesting implications. For every complete simplicial multi-fan Δ one can define the volume polynomial V_Δ. This polynomial gives rise to a Poincare duality algebra $\mathcal{A}^*(\Delta)$. When the underlying simplicial complex K of a multifan is a sphere, we have

$\mathcal{A}^*(\Delta) \cong \mathbb{R}[K]/(l.s.o.p.)$ and $\dim \mathcal{A}^{2j}(\Delta) = h_j(K)$ as in Timorin's classical case. If K is an oriented manifold, we have $\mathcal{A}^*(\Delta) \cong \mathbb{R}[K]/(l.s.o.p.)/Soc^{<2n}$ and $\dim \mathcal{A}^{2j}(\Delta) = h''_j(K)$. This gives a connection of volume polynomials with a recent theory of h''-numbers of Buchsbaum complexes.

We found a precise formula for the volume polynomial of a multi-fan, which, in particular, can be used to compute volumes of ordinary polytopes and intersections of characteristic submanifolds in torus manifolds.

Finally, we proved a somewhat unexpected result: almost every polynomial (satisfying certain mild condition) is a volume polynomial of some multi-fan. Thus Stanley's generalized g-conjecture does not hold on the class of all complete multi-fans.

[1] A. Hattori, M. Masuda, "Theory of multi-fans", *Osaka J. Math.,* **40** (2003), 1–68.

[2] V. A. Timorin, "An analogue of the Hodge–Riemann relations for simple convex polytopes", *Russian Math. Surveys,* **54**:2 (1999), 381–426.

TORIC TOPOLOGY AND CARBON STRUCTURES (FULLERENES AND GRAFENES)

V. M. Buchstaber *(Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow)*

The talk is devoted to classical and modern mathematical results, which had drawn attention of physicists and chemists in connection with problems of nanotechnology.

- Fullerenes (Nobel Prize in Chemistry, 1996, R. F. Kurl, H. Kroto, R. E. Smalley).

- Graphenes (Nobel Prize in Physics, 2010, A. K. Geim and K. S. Novoselov).
- Pentagraphenes (the possibility for this carbon structure to exist was proved).

We will formulate combinatorial, geometrical, and topological tasks concerning molecular carbon structures in terms of convex polytopes, polygonal partitions of 2-surfaces, and edge paths on these surfaces. The connection of these tasks with known and new problems in graph theory and toric topology will be discussed.

The talk is prepared jointly with N. Yu. Erokhovets.

All necessary notions will be explained during the lecture.

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, "Toric Topology", *AMS Math Surveys and Monographs,* **204** (2015), 518 p.

[2] V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets, "Truncations of simple polytopes and applications", *Proc. Steklov Inst. Math.,* **289** (2015), 115–144.

EFFECTIVE ESTIMATES OF THE MEASURE OF THE SETS OF REAL NUMBERS WITH THE GIVEN APPROXIMATION PROPERTY BY ALGEBRAIC NUMBERS OF BOUNDED HEIGHT AND DEGREE

N. V. Budarina *(IAM FEB RAS, Khabarovsk)*,
V. I. Bernik *(Institute of Mathematics, Belarus Academy of Sciences, Minsk)*,
F. Götze *(University of Bielefeld, Bielefeld)*

The effective versions of metric theorems [1, 2, 3] have begun to develop in recent years. This led to estimates for the number of integer polynomials with given distance between the roots, to estimates for discriminants and resultants.

Let $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ be an integer polynomial of degree $\deg P = n$ and height $H(P) = \max_{0\leqslant j\leqslant n} |a_j|$. Denote by $\mathcal{P}_{\leq n}(Q)$ the class of integer polynomials P of degree at most n and $H(P) \leqslant Q$ where $Q \in \mathbb{N}$. Let $I = [0,1]$ and $\delta = \delta(n,Q)$. Denote by $M_n(Q,I,\delta)$ the set of $x \in I$ for which the inequality

$$|P(x)| < \delta$$

has a solution in polynomials $P \in \mathcal{P}_{\leq n}(Q)$. Let $\mu(A)$ be the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$. We are interested in the metric properties of the set $M_n(Q,I,\delta)$. We are going to prove a few theorems with estimations of the form

$$\mu(M_n(Q,I,\delta)) < s(n)Q^l \delta\mu(I), \tag{1}$$

where $s(n)$ is a function of n. Depending on whether we use known inequalities in the theory of transcendental numbers [4] or methods of Sprindzuk [1] and Bernik [3], we can obtain good estimations for the function $s(n)$ in (1) or the best possible result for the measure of the set $M_n(Q,I,\delta)$ in the terms of the height of the polynomials.

[1] V. G. Sprindzuk, *Mahler's problem in metric Number Theory,* Nauka i Tehnika, Minsk, 1967.

[2] V. V. Beresnevich, "On approximation of real numbers by real algebraic numbers", *Acta Arith.,* **90**:2 (1999), 97–112.

[3] V. Bernik, "On the exact order of approximation of zero by values of integral polynomials", *Acta Arith.,* **53** (1989), 17–28.

[4] G. V. Chudnovsky, "Contributions to the theory of transcendental numbers", *Math. Surveys Monogr., 19,* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

FORMAL GROUP FOR ELLIPTIC FUNCTION OF LEVEL 3

E. Yu. Bunkova *(Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow)*

The talk will expand results of [1].

Jacobi's elliptic sine $sn(x)$ has a realization as the elliptic function of level 2. The map $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $x \mapsto (\xi, \mu)$, $\xi = sn(x)$, $\mu = sn'(x)$, uniformizes the curve

$$\mu^2 = 1 - 2\delta\xi^2 + \varepsilon\xi^4.$$

The addition law for this curve is determined by the addition law for $sn(x)$ in A. Cayley's form

$$\psi(x+y) = \frac{\psi(x)^2 - \psi(y)^2}{\psi(x)\psi'(y) - \psi(y)\psi'(x)},$$

and $sn(x)$ is the exponent of the *universal* formal group of the form

$$F(u,v) = \frac{u^2 - v^2}{uB(v) - vB(u)}.$$

The coefficient ring $\mathcal{R}_2$ of this formal group was calculated in [2]. It turned out that $B(u)^2 = 1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4$, and thus $\mathcal{R}_2[\frac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$.

In the talk we will present analogous results for the elliptic function $f(x)$ of level 3. The map $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $x \mapsto (\xi, \mu)$, $\xi = f(x)$, $\mu = f'(x)$, uniformizes the curve

$$\mu^3 + 3a\xi\mu^2 = 1 + 2(a^3 + 3b)\xi^3 + (a^3 - 3b)^2\xi^6. \tag{1}$$

The elliptic function of level 3 is the exponential of the *universal* formal group of the form

$$F(u,v) = \frac{u^2C(v) - v^2C(u)}{uC(v)^2 - vC(u)^2}, \tag{2}$$

and thus it is determined by the corresponding addition law.

This formal group is determined over the ring $\mathcal{R}_3$, such that

$$\mathcal{R}_3\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right] = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right][a,b],$$

and $C(u)^2 = w(u) - au$, where $w(u) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{3}][a,b][[u]]$ is a solution of

$$w^3 + 3auw^2 = 1 + 2(a^3 + 3b)u^3 + (a^3 - 3b)^2u^6 \tag{3}$$

with initial conditions $w(0) = 1$.

The formal group of the form (2) is a specialization of the formal group of the form

$$F(u,v) = \frac{u^2A(v) - v^2A(u)}{uB(v) - vB(u)}, \tag{4}$$

introduced in [3]. This formal group is equivalent to Krichever formal group. It's ring of coefficients is described in [2].

[1] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova, "Universal formal group determining the elliptic function of level 3", *Chebyshev sb.,* **16**:2 (2015), 66–78.

[2] V. M. Buchstaber, A. V. Ustinov, "Rings of coefficients of formal groups", *Mat. Sbornik,* (in print).

[3] V. M. Buchstaber, "Functional equations associated with addition theorems for elliptic functions and two-valued algebraic groups", *Russian Math. Surveys,* **45**:3 (1990), 213–215.

DOUBLE SOMOS-4

Victor Bykovskii *(IAM FEB RAS, Khabarovsk)*,
Alexey Ustinov *(IAM FEB RAS, Khabarovsk)*

Let $\{A(n)\}$ and $\{B(n)\}$ be a pair of sequences defined by initial values

$$A(\pm 1), A(0), A(2), \quad B(\pm 1), B(0), B(2),$$

and recurrence relations

$$A(n+2)B(n-2) + \alpha A(n+1)B(n-1) + \beta A(n)B(n) = 0,$$

$$A(n-2)B(n+2) + \gamma A(n-1)B(n+1) + \delta A(n)B(n) = 0.$$

Theorem. The general pair of such sequences (subject to some natural restrictions on initial data) has the form

$$A(n) = e^{an^2+b_1n+c_1}\sigma_\Gamma(nz+z_1), \quad B(n) = e^{an^2+b_2n+c_2}\sigma_\Gamma(nz+z_2),$$

where $a,\ b_{1,2},\ c_{1,2},\ z,\ z_{1,2} \in \mathbb{C}$ and σ_Γ is Weierstrass σ–function associated with lattice Γ.

The case $A = B$ was previously studied by A. Hone [1] and C. Swart [2].

This work was supported by the RFBR (project no. 14-01-00203)

[1] A. Hone, "Elliptic Curves and Quadratic Recurrence Sequences", *Bull. Lon, Math. Soc.,* **37**:2 (2005), 161–171.

[2] C. Swar, "Elliptic curves and related sequences", *PhD thesis,* Royal Holloway, University of London (2003).

ANALYSIS OF THE SOLVABILITY IN THE COMPLEX HEAT TRANSFER PROBLEMS

A. Yu. Chebotarev *(IAM FEB RAS, Far Eastern Federal University, Vladivostok)*,
A. E. Kovtanyuk *(IAM FEB RAS, Far Eastern Federal University, Vladivostok)*

Stationary process of free convection of a viscous incompressible fluid with radiation in a bounded domain Ω with boundary Γ is modeled by the following boundary value problem, which uses a diffusion P_1 approximation for the radiative transfer equation.

$$-a\Delta\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4,$$

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \beta\theta\mathbf{g} = -\nabla p, \ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

$$\theta|_\Gamma = \Theta_0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \Theta_0^4)|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{v}|_\Gamma = \mathbf{v}_0.$$

Here, θ is the normalized temperature, φ the normalized radiation intensity averaged over all directions, $\mathbf{v}$ is the velocity field and p is the flow pressure, $\mathbf{g}$ is an acceleration of gravity. Through a, ν, β designated constant coefficients of thermal diffusivity, kinematic viscosity and thermal expansion. Parameters $\alpha > 0$, $b > 0$, and the absorption coefficient κ_a describes the radiation-thermal properties of the medium.

Analysis of complex heat transfer in scattering media with reflecting boundaries is important for applications. A lot of work is connected with the numerical simulation of complex heat transfer processes in continuous media. At the same time, few papers devoted to the theoretical analysis of the corresponding boundary value problems, that allows you to assess the adequacy of the models of radiative heat transfer.

The main result of this work is to obtain new a priori estimates of temperature and radiation intensity in the space L^∞, which is possible to prove the solvability of the problem. It is shown that the class of weak solutions is homeomorphic to finite-dimensional compact. It is proved that the solution is unique, if the viscosity and thermal diffusivity are sufficiently large.

[1] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model", *Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* **20** (2015), 776–784.

[2] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, "Stationary Free Convection Problem with Radiative Heat Exchange", *Differential Equations,* **50**:12 (2014), 1592–1599.

BOUNDARY OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR COMPLEX HEAT TRANSFER MODEL

A. Yu. Chebotarev *(IAM FEB RAS, Far Eastern Federal University, Vladivostok)*,
A. E. Kovtanyuk *(IAM FEB RAS, Far Eastern Federal University, Vladivostok)*

The interest in studying problems of complex heat transfer [1–3](where the radiative, convective, and conductive contributions are simultaneously taken into account) is motivated by their importance for many engineering applications.

The most interest is caused by optimal control problems for models of complex heat transfer. A considerable number of works is devoted to control problems for evolutionary models involving radiative heat transfer. Nevertheless, theoretical analysis of optimal control problems for steady-state models of complex heat transfer is a poorly studied. The main difficulty here is, in addition to nonlinearities of the governing equations, the absence of appropriate energy estimates.

The problem addressed is the design of reflection properties of the boundary or determine the boundary temperature in order to optimize a cost functional, e.g. to maximize the energy outflow from the domain or to obtain the desired temperature in the part of domain. The application of the P_1 approximation to the radiative heat transfer equation yields an optimal boundary multiplicative control problem for a nonlinear elliptic system. The solvability of this system is proven on the basis of new a priori estimates of solution norms. Necessary optimality conditions of first order are derived. The results of numerical simulations are presented.

[1] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem", *J. Math. Anal. Appl.,* **409** (2014), 808–815.

[2] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.,* **412** (2014), 520–528.

[3] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Solvability of P1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem", *Applied Math. and Comput.,* **249** (2014), 247–252.

EXISTENCE OF COMPACT LIE GROUP ACTIONS ON SYMPLECTIC MANIFOLDS

Yunhyung Cho *(Instituto Superior Técnico, Lisbon, Portugal)*,
Min Kyu Kim *(Gyeongin National University of Education, Incheon, Korea)*,
Dong Youp Suh *(KAIST, Daejeon, Korea)*

In this lecture, we consider the existence of symplectic actions of connected compact Lie groups on a symplectic manifold (M, ω) satisfying the condition $c_1(M, \omega) = \lambda \cdot [\omega]$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$, and determine when such actions are Hamiltonian. Before we give the precise statement of the theorem, let us consider the special case when M is a compact oriented surface Σ_g of genus g as a motivation. In this case, the following proposition is well-known.

Proposition 1. *Let Σ_g be a closed Riemann surface with genus g, and let G be a compact connected Lie group acting on Σ_g effectively. Then,*

1. *if $\Sigma_g \cong S^2$ $(g = 0)$, then G must be a closed subgroup of* $\mathrm{SO}(3)$,
2. *if $\Sigma_g \cong T^2$ $(g = 1)$, then G must be a closed subgroup of* $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2) \cong S^1 \times S^1$, *and*
3. *if $g \geq 2$, then $G = \{1\}$ by the connectivity of G.*

Let ω be any G-invariant volume form on Σ_g so that (Σ_g, ω) is a symplectic surface. Suppose the G action is symplectic, i.e., $g^*\omega = \omega$ for all $g \in G$. Since we can give an ω-invariant almost complex structure J on $T\Sigma_g$, and for any other such almost complex structure J' two complex bundles $(T\Sigma_g, J)$ and $(T\Sigma_g, J')$ are isomorphic, the first Chern class $c_i(\Sigma_g, \omega)$ of the symplectic surface (Σ_g, ω) is well-defined. Moreover since $H^2(\Sigma_g; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, there exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $c_1(\Sigma_g, \omega) = \lambda \cdot [\omega]$. Then Proposition 1 can be reformulated for symplectic actions as follows.

Proposition 2. *(Symplectic version of Proposition 1). Let (Σ_g, ω) be a closed two-dimensional symplectic manifold with genus g such that $c_1(\Sigma_g, \omega) = \lambda \cdot [\omega]$ and let G be a compact connected Lie group acting on Σ_g. Suppose that the G action is effective and it preserves ω. Then,*

1. *if $\lambda > 0$ ($g = 0$), then G is a closed subgroup of* $\mathrm{SO}(3)$,
2. *if $\lambda = 0$ ($g = 1$), then G is a closed subgroup of* $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2) \cong S^1 \times S^1$, *and*
3. *if $\lambda < 0$ ($g > 1$), then $G = \{1\}$.*

If $\Sigma_g = S^2$, since the sphere is simply connected, the symplectic action of G on S^2 is Hamiltonian. If $\Sigma_g = T^2$, then the symplectic action of G on T^2 can not be Hamiltonian, because any Hamiltonian action of a circle on a compact manifold must have at least two fixed points, but the action of any circle subgroup of $SO(2) \times SO(2)$ on T^2 does not have a fixed point. Therefore we have the following Hamiltonian version of Proposition 1.

Proposition 3. *(Hamiltonian version of Proposition 1). Let (Σ_g, ω) be a closed two-dimensional symplectic manifold with genus g such that $c_1(\Sigma_g, \omega) = \lambda \cdot [\omega]$ and let G be a compact connected Lie group. Suppose that the G action is effective symplectic. Then,*

1. *if $\lambda > 0$ ($g = 0$), then the G-action is Hamiltonian and G is a closed subgroup of* $\mathrm{SO}(3)$,

2. *if $\lambda = 0$ ($g = 1$), then the G-action is non-Hamiltonian and G is a closed subgroup of* $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$, *and*

3. *if $\lambda < 0$ ($g > 1$), then $G = \{1\}$.*

We generalize this proposition to higher dimensional manifold case as follows.

Theorem. *Let (M, ω) be any smooth closed symplectic manifold such that $c_1(M, \omega) = \lambda \cdot [\omega]$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$. Let G be a compact connected Lie group which acts on (M, ω) effectively and preserves ω. Then,*

1. *If $\lambda > 0$, then the G-action is Hamiltonian.*

2. *If $\lambda = 0$, then the G-action is non-Hamiltonian.*

3. *If $\lambda < 0$, then G is trivial.*

This theorem is proved in [1] and [2] by Ono, but we give a more elementary proof of it in this lecture. Indeed, we prove that if the G-action is non-Hamiltonian, then there exists a symplectically embedded 2-torus T in (M, ω) such that $< c_1(M, \omega), [T] >= 0$, and from this result we can prove the theorem.

[1] K. Ono, "Some remarks on group actions in symplectic geometry", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.,* **35** (1988), 431–437.

[2] K. Ono, "Equivariant projective embedding theorem for symplectic manifolds", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.,* **35** (1988), 381–392.

THE MINKOWSKI THEOREM ON PARALLELOHEDRA AND ITS RECENT DEVELOPMENT

N. P. Dolbilin *(Steklov Mathematical Institute, RAS, Moscow)*

A *parallelohedron* of dimension d is defined as a convex bounded euclidean d-dimensional polyhedron P that admits a face-to-face tiling of space $\mathbb{R}^d$ by its translates. The concept and the term of a parallelohedron were introduced by E. S. Fedorov. Three-dimensional parallelohedra play important role in crystallography. Multidimensional parallelohedra are used in the geometry of numbers, discrete geometry, and other areas of mathematics.

Theorem (H.Minkowski, [1]). *Any parallelohedron P fulfils the following conditions:*
(1) *P is centrally symmetrical polyhedron;*
(2) *each $(d-1)$-face of P is centrally symmetrical;*
(3) *the projection of P along a $(d-2)$-plane that contains a $(d-2)$-face onto the 2-dimensional complement is either parallelogram or a centrally symmetrical hexagon.*

Later B.A.Venkov [2] proved that the conditions (1), (2), and (3) are also sufficient for a convex polyhedron to be a parallelohedron.

Let us call a convex polyhedron P a *homothetohedron* if there is a tiling of $\mathbb{R}^d$ by its homothetes $\mu_i P$, where $0 < M_1 < \mu_i < M_2$. It is clear that any parallelohedron is a homothetohedron. However, the inverse statement is also true.

Theorem (N.Dolbilin, A.Magazinov, [4]). *Any homothetohedron is a parallelohedron*

The theorem implies that any convex polyhedron that admits whatever tiling by its translates necessarily admits a face-to-face tiling.

In the talk we are going to discuss the mentioned above theorems and some other related issues (see e.g.[3]).

[1] H. Minkowski, “Allgemeine Leherzätze über konvexe Polyeder”, *Nach. Ges. Wiss. Göttingen,* (1987), 198–219.

[2] B. A. Venkov, “On some class of euclidean polyhedra”, *Vestnik Leningradskogo Universiteta, ser. mathem., phys.,chem.,* **9** (1954), 11–31.

[3] N. P. Dolbilin, “Properties of Faces of Parallelohedra”, *Proc. Steklov Inst. Math.,* **266** (2009), 105–119.

[4] N. P. Dolbilin, A. N. Magazinov, “On a generalization of the Minkowski theorem for parallelohedra”, (in preparation).

FIBER BUNDLE THEORY AND INVARIANT FORM OF CONSERVATION LAWS IN CONTINUUM MECHANICS

A. I. Gudimenko *(IAM FEB RAS, Vladivostok)*,
M. A. Guzev *(IAM FEB RAS, Vladivostok)*

The apparatus of differential geometry is used to represent the continuum mechanics conservation laws in a form that is invariant under the time-dependent coordinate transformations. The material continuum is described in the framework of four-dimensional formalism in which the space-time is considered as the bundle $\pi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ over the time axis $\mathbb{R}$, where π is the projection on the first factor.

It is shown that the mass conservation law is written in the form

$$\mathcal{L}_u(\rho dt \wedge \omega) = 0, \qquad (1)$$

where $u = \partial/\partial t + u^i\partial/\partial x^i$ is the continuum 4-velocity field on the bundle, $\mathcal{L}_u$ is the Lie derivative of differential forms along this vector field, ρ is the mass density, and $\omega = \sqrt{|g|}dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$ is the space-like volume form determined by a space-like metric g on the bundle.

The proposed equation is really invariant under the time-dependent coordinate transformations because it is expressed in terms of invariant manifold calculus operations, such as the Lie derivative in (1), and invariant operands u and $\rho dt \wedge \omega$.

Invariant representations of conservation laws equations are used in constructing new theories and models of continuum mechanics, especially in modeling of materials with defects. The full account of our study of conservations laws, including a consideration of the momentum balance equation and some applications of the representations obtained, is published in the papers [1, 2].

[1] A. I. Gudimenko, M. A. Guzev, "Geometrical aspects of the mass conservation law", *Far Eastern Mathematical Journal,* **14**:2 (2014), 173–190 (in Russian) .

[2] A. I. Gudimenko, M. A. Guzev, "On covariant form of the momentum balance equation for perfect fluid", *Far Eastern Mathematical Journal,* **15**:1 (2015), 41–53 (in Russian).

CRITICAL POINTS OF COUPLED PENDULUMS

M. A. Guzev *(IAM FEB RAS, Vladivostok)*,
A. A. Dmitriev *(IAM FEB RAS, Vladivostok)*

The report presents the problem about the equilibrium states of the two coupled pendulums with an arbitrary potential interaction. The case of sympathetic pendulums is described in literature [1]. Symmetric equilibrium states are investigated for Hooke's potential [2]. It this work we consider a modified system of two pendulums, rods of which intersect and glide without friction relatively to each other. The pendulums are fixed in a vertical plane of the gravity field and have the masses at the end of each one.

The problem under consideration is reduced to finding the critical points of the function

$$\Pi(\theta_1, \theta_2) = f(s) - \nu \cos\theta_1 \cos\theta_2, \qquad s^2 = \sin^2\theta_1 + 2\mu \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \mu^2.$$

Here $f(s)$ defines the interaction potential, the variables $\theta_1,\ \theta_2$ are linked with the angles $\varphi_1,\ \varphi_2$ deflection rods from the horizontal line by relations $\theta_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$,$\theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \varphi_1 - \varphi_2)$, s is the distance between the pendulums, μ is the ratio of rod's length to the distance between the points of suspension, ν is determined through the mass.

It is shown that there are symmetric and asymmetric equilibrium states, and we formulated conditions of their existence. The critical points can have stable and unstable character and corresponding restrictions on the parameters $\mu,\ \nu$ are obtained.

The obtained results allow us to study the equilibrium state in the case of Hooke's potential $f(s) = \frac{1}{2}(s - \mu)^2$ and Coulomb's one $f(s) = 1/s$.

[1] A. Sommerfeld , *Mechanics,* N. Y.: Academic press inc., Publishers, 1952, 289 p.

[2] A. P. Markeev, "The motion coupled pendulums", *Nonlinear Dynamics,* **9**:6 (2013), 27–38 (in Russian).

PARALLELIZATION OF PETRI NETS VIA POLYNOMIALS

Andrey Grinblat *(Komsomolsk-on-Amur)*

A Petri net (also known as a place/transition net or P/T net) is one of several mathematical modeling languages for the description of distributed systems. A Petri net is a directed bipartite graph, in which the nodes represent transitions (i.e. events that may occur, signified by bars) and places (i.e. conditions, signified by circles). The directed arcs describe which places are pre- and/or post conditions for which transitions (signified by arrows). Some sources state that Petri nets were invented in August 1939 by Carl Adam Petri Ч at the age of 13 Ч for the purpose of describing chemical processes.

Like industry standards such as UML activity diagrams, BPMN and EPCs, Petri nets offer a graphical notation for stepwise processes that include choice, iteration, and concurrent execution. Unlike these standards, Petri nets have an exact mathematical definition of their execution semantics, with a well-developed mathematical theory for process analysis.

In this report we introduce for any Petri net N the polynomials $P(N) \in \mathbb{Z}_+[x, y]$, also we will see that there is one to one correspondence between polynomials from $\mathbb{Z}_+[x, y]$ and Petri nets. From this correspondence we get

Теорема. *The computational process can be can be parallelized iff for the correspondence Petri Net N, the polynomial $P(N)$ can be decompose in the ring $\mathbb{Z}_+[x, y]$.*

The construction of these polynomials allows us to use the methods and concepts of algebraic geometry. The author promise he will continue to study in this way.

THE CATEGORY OF TORIC SETS

A. A. Husainov *(KnASTU, Komsomolsk-on-Amur)*

We continue the investigations started in [1]. This work is devoted to the category of precubical sets which admit representations as colimits of precubical tori.

A *precubical set* $(X_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$ consists of a sequence of sets X_0, X_1, X_2, ... with a family of maps $\partial_i^{n,\varepsilon} : X_n \to X_{n-1}$ $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon \in$

$\{0,1\}$, satisfying $\partial_i^{n-1,\nu} \circ \partial_j^{n,\varepsilon} = \partial_{j-1}^{n-1,\varepsilon} \circ \partial_i^{n,\nu}$ for $n \geqslant 2, 1 \leqslant i < j \leqslant n, \varepsilon \in \{0,1\}, \nu \in \{0,1\}$. Let $PCubes$ be the category of precubical sets whose morphisms $f : (X_n, \partial_i^{n,\varepsilon}) \to (X'_n, \partial_i'^{n,\varepsilon})$ are sequences of maps $f_n : X_n \to X'_n$ satisfying $f_{n-1}\partial_i^{n,\varepsilon} = \partial_i'^{n,\varepsilon} f_n$.

We call a precubical set $(X_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$ to be *toric* if for every cube $x \in X_n$, under conditions $n \geqslant 1$ and $1 \leqslant i \leqslant n$, the equality $\partial_i^{n,0}(x) = \partial_i^{n,1}(x)$ holds.

Every toric precubical set is isomorphic to the disjoint union of toric sets with one vertex.

We introduce precubical tori as follows. Let $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ be the additive monoid of nonnegative integers. The *category of tori* $\mathbb{T}_+$ consists of monoids $\mathbb{N}^0 = \{0\}$, $\mathbb{N}^1 = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\cdots$. Morphisms $\mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ are compositions of maps $\delta_i^k : \mathbb{N}^{k-1} \to \mathbb{N}^k$ defined as $\delta_i^k(x_1, \cdots, x_{k-1}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{k-1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$. For each integer $d \geqslant 0$, the sequence of sets $(\mathbb{T}_+(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}^d))_{n \geqslant 0}$ with the maps $\partial_i^{n,\varepsilon} : \mathbb{T}_+(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}^d) \to \mathbb{T}_+(\mathbb{N}^{n-1}, \mathbb{N}^d)$, $x \mapsto x \circ \delta_i^n$, for $n \geqslant 1$ and $1 \leqslant i \leqslant n$ is the precubical set called the *precubical (d-dimensional) torus*. Its geometric realization is the real d-dimensional torus.

Let $PTori \subset PCubes$ be the full subcategory consisting of all toric precubical sets. The category $PTori$ is complete and cocomplete. It is easy to see that the embedding $PTori \subset PCubes$ preserves limits and colimits. We construct left and right adjoint functors to this embedding and show that for every object X of the category $PTori$, there is a diagram of precubical tori that colimit in $PCubes$ is isomorphic to X. We study homology of toric sets and the relationship between toric sets and free partially commutative monoids.

[1] Ahmet A. Husainov, "Cubical Sets and Trace Monoid Actions", *The Scientific World Journal,* **2013** (2013), 285071.

IRREDUCIBLE COMPONENTS OF GENERIC COMPLETE INTERSECTIONS

Askold Khovanskii *(The University of Toronto, Canada)*

Newton polyhedra theory connects algebraic geometry to the geometry of convex polyhdra with integral vertices in the framework of toric geometry.

A *Laurent polynomial* P is a linear combination of monomials (possibly of negative powers). The *support* $s(P)$ of P is the set of the powers of monomials appearing in P with nonzero coefficients. The *Newton polyhedron* $\Delta(P)$ of P is the convex hull of $s(P)$. Fix k finite subsets $A_1, \dots, A_k$ in the lattice $\mathbb{Z}^n$ and consider a generic k-tuple of Laurent polynomials $P_1, \dots, P_k$ with the supports $s(P_1) = A_1, \dots, s(P_k) = A_k$. Let X be the algebraic variety defined by the system

$$P_1 = \cdots = P_k = 0 \tag{1}$$

in $(\mathbb{C}^*)^n$. Let $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ be Newton polyhedra of $P_1, \dots, P_k$.

Definition 1. For fixed k-tuple of convex bodies $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ in $\mathbb{R}^n$ for any nonempty subset $J \subset \{1, \dots, k\}$ we define the *defect* $d(J)$ of J to be the number $d(J) = \dim(\Delta_J) - |J|$, where $\Delta_J = \sum_{i \in J} \Delta_i$ and $|J|$ is the number of elements in J.

Definition 2. We call k-tuple $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ of convex bodies *independent* if the defect of any nonempty subset $J \subset \{1, \dots, k\}$ is nonnegative.

Theorem (David Bernstein, 1975). *The algebraic variety $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ defined by a generic system (1) is nonempty if and only if the k-tuple of Newton polyhedra $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ is independent (in the sense of Definition 2).*

According to the Newton polyhedra theory *all natural discrete* *invariants of the variety X defined by a generic system (1) depend only on* $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ (and are independent of a choice of supports $A_1, \dots, A_k$ whose convex hulls are $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ and of a choice of generic k-tuple of Laurent polynomials with these supports).

We compute the number of irreducible components of the algebraic variety X defined by a generic system (1). Our results (see theorem 1-3) generalize the famous Bernstein-Kouchnirenko theorem (see its statement below). This amazing theorem inspired much activity that eventually lead to the creation of the Newton polyhedra theory, of a birationally invariant version of the intersection theory for divisors [3] and of the theory of Newton-Okounkov bodies [4,5].

Let L be a real m-dimensional linear space containing a fixed discrete additive subgroup $\Lambda \subset L$ of rank m. One can defined the unique translation invariant *integral volume* on L normalized by the following condition: a m-dimensional parallepiped based on vectors $e_1, \dots, e_m \in \Lambda$ has the integral volume one if and only if vectors $e_1, \dots, e_m$ form a basis in Λ.

The *space* $\mathbb{R}^n$ *of characters* of the torus $(\mathbb{C}^*)^n$ is equipped with the *lattice* $\mathbb{Z}^n$ *of characters*, so the integral volume on $\mathbb{R}^n$ is well defined. Newton polyhedra of Laurent polynomials on the torus $(\mathbb{C}^*)^n$ belong to the space $\mathbb{R}^n$ of characters, so one can talk about the integral volume of Newton polyhedra.

Theorem (Bernstein-Koushnerenko, 1975). *For $k = n$ the variety X defined by a generic system (1) is a finite set containing $n!V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ points where $V(., \dots, .)$ is the mixed volume associated with the integral volume on $\mathbb{R}^n$.*

The David Bernstein theorem follows from the Bernstein-Koushnirenko theorem and from a Minkowsky theorem state below (its proof can be found in [7]).

Theorem (Minkowsky). *A given n-tuple of convex bodies in $\mathbb{R}^n$ has the mixed volume equal to zero if and only if the n-tuple of convex bodies is dependent.*

If $k = n$ then the variety X is zero dimensional and number of its irreducible components is equal to the number of points in X. Let us drop the assumption that $k = n$. One can assume that the k-tuple of Newton polyhedra $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ is independent: otherwise according to the David Bernstein theorem the variety X defined by a generic system (1) is empty.

Theorem 1 ([7]). *If for the k-tuple of Newton polyhedra $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ the defect $d(J)$ of each nonempty subset $J \subset \{1, \dots, k\}$ is positive then the algebraic variety X defined by a generic system (1) is irreducible.*

The theorem 1 generalizes the following previously know result.

Theorem 1' ([2]). *If all Newton polyhedra $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ have dimension n and $k < n$ then the algebraic variety X is irreducible.*

Our proof of the theorem 1 (see [7]) is based on toric technique, including toric resolution of singularities of toric varieties and computations of cohomologies of invariant linear bundles on toric varieties. Very similar arguments allow to compute the arithmetic genus of X. For zero dimensional varieties X it implies the Bernstein-Koushnirenko theorem (see [1,2]).

Let $J = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, k\}$ be a biggest with respect to inclusion subset among all nonempty subsets with zero defect. Denote by Δ_J the polyhedron $\Delta_J = \sum_{i \in J} \Delta_i$. Let $L_J \subset \mathbb{R}^n$ be the linear space parallel to the smallest affine subspace containing the polyhedron Δ_J. Consider the p-tuple $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_p}$ of Newton polyhedra (where $\{i_1, \dots, i_p\} = J$). Polyhedra Δ_{i_j} for $i_j \in J$ can be shifted by parallel translation into the space L_J. Thus the mixed volume

$V(\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_p})$ with respect to the integral volume on L_J is well defined.

Theorem 2 ([7]). *In the above notations the number $b_0(X)$ of the irreducible components of X is equal to $p!V(\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_p})$.*

The theorem 2 could be easily reduced to the theorem 1 (see [7]).

Corollary. *The variety X is irreducible only in the following cases: 1) the k-tuple $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ of Newton polyhedra is independent (see theorem 1); 2) the number $p!V(\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_p})$ (see theorem 2) is equal to one.*

Remark 1. Because of the corollary 1 the following question is important for us: is it possible to classify geometrically all p-tuples of integral polyhedra in p-dimensional space whose integral mixed volume multiplied by $p!$ is equal to one? The answer on this question is positive. Such classification is described in [6].

With the rational p-dimensional space $L_J \subset \mathbb{R}^n$ one can associate the subtorus T^m of dimension $m = n - p$ in the torus $(\mathbb{C}^*)^n$, defined by the following condition: $g \in T^m$ if and only if $\chi(q) = 1$ for each character χ whose power belongs to the lattice $\mathbb{Z}^n \bigcap L_J$. The embedding $\pi : T^m \to (\mathbb{C}^*)^n$ induces t he linear map $\pi^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ from the space $\mathbb{R}^n$ of characters on $(\mathbb{C}^*)^n$ to the space $\mathbb{R}^m$ of characters on T^m. With each polyhedron with integral vertices $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ one can associate the polyhedron with integral vertices $\pi^*(\Delta) \subset \mathbb{R}^m$.

Theorem 3 ([7]). *In the assumptions of the theorem 2 each irreducible component of the variety X is isomorphic to a variety $Y \subset T^m$ defined by a system $Q_{q_1} = \cdots = Q_{q_m} = 0$ where $\{q_1, \ldots, q_m\} = \{1, \ldots, k\} \backslash J$ and $Q_{q_1}, \ldots, Q_{q_m}$ is a generic m-tuple of Laurent polynomials with Newton polyhedra $\pi^*(\Delta_{q_1}), \ldots, \pi^*(\Delta_{q_m})$.*

Our proof of the theorem 3 is based on a simple explicit construction (see [7]).

Remark 2. The theorem 2 computes the number $b_0(X)$ of irreducible components of X and the theorem 3 allows to compute all natural discrete invariants of each component of X (each such invariant takes the same value at all components of X). Indeed, according to the Newton polyhedra theory all natural discrete invariants of Y can be computed in terms of Newton polyhedra $\pi^*(\Delta_{q_1}), \ldots, \pi^*(\Delta_{q_m})$.

[1] A. Khovanskii, "Newton polyhedra, and toroidal varieties", *Funct. Anal. Appl.,* **11**:4 (1978), 289–296 .

[2] A. Khovanskii, "Newton Polyhedra and the genus of complete intersections", *Funct. Anal. Appl.,* **12**:1 (1978), 38–46.

[3] A. Khovanskii, K. Kaveh, "Mixed volume and an extension of intersection theory of divisors", *MMJ,* **10**:2 (2010), 343–375.

[4] A. Khovanskii, K. Kaveh, "Newton-Okounkov convex bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory", *Annals of Math.,* **176**:2 (2012), 925–978.

[5] R. Lazarsfeld, M. Mustata, "Convex bodies associated to linear series", *Ann. de l'ENS,* **42**:5 (2009), 783–835.

[6] A. Esterov, G. Gusev, "Systems of equations with a single solution", *arXiv:1211.6763v2,* 2012.

[7] A. Khovanskii, "Newton polyhedra and irreducible components of complete intersections", *To appear in Izvestiya RAN,* seria matematichtskaia, 2015.

INTEGRABILITY PROPERTIES OF NLS TYPE EQUATIONS VIA DARBOUX TRANSFORMATIONS, AND RELATED YANG-BAXTER MAPS

S. Konstantinou-Rizos *(Chechen State University, Grozny)*

Darboux transformations constitute a very important tool in the theory of integrable systems. They map trivial solutions of integrable partial differential equations to non-trivial ones and they link the former to discrete integrable systems. On the other hand, they can be used to construct Yang-Baxter maps which can be restricted to completely integrable maps (in the Liouville sense) on invariant leaves.

In this talk we present Darboux transformations related to particular Lax operators of NLS type which are invariant under the action of the so-called reduction group. Specifically, we consider the cases of: 1) the nonlinear Schrödinger equation (with no reduction), 2) the derivative nonlinear Schrödinger equation, where the corresponding Lax operator is invariant under the action of the $\mathbb{Z}_2$-reduction group and 3) a deformation of the derivative nonlinear Schrödinger equation, associated to a Lax operator invariant under the action of the dihedral reduction group. These reduction groups correspond to recent classification results of automorphic Lie algebras.

We derive Darboux matrices for all the above cases and we use them to construct novel discrete integrable systems together with their Lax representations [2]. For these systems of difference equations, we discuss the initial value problem and, moreover, we consider their integrable reductions [2]. Furthermore, the derivation of the Darboux matrices gives rise to many interesting objects, such as Bäcklund transformations for the corresponding partial differential equations as well as symmetries and conservation laws of their associated systems of difference equations [2].

Finally, we employ these Darboux matrices to construct six-dimensional Yang-Baxter maps for all the afore-mentioned cases [1]. These maps can be restricted to four-dimensional Yang-Baxter maps on invariant leaves, which are completely integrable [1].

[1] S. Konstantinou-Rizos and A. V. Mikhailov, "Darboux transforma-

tions, finite reduction groups and related Yang-Baxter maps", *J. Phys. A.: Math. Theor.,* **46** (2013), 425201, 16.

[2] S. Konstantinou-Rizos, A. V. Mikhailov and P. Xenitidis, "Reduction groups and integrable difference systems of NLS type", *accepted for publication to J.Math.Phys,* (2015).

ON A MAXIMAL TORUS WHICH ACTS ON A GKM-MANIFOLD

S. Kuroki *(Graduate School of Mathematical Sciences The University of Tokyo, Tokyo)*

An (m,n)-type GKM manifold is a $2m$-dimensional compact, connected, almost complex manifold M with an n-dimensional torus T-action preserving the almost complex structure, whose one-skelton (i.e., the set of all elements whose orbit dimension is less than or equal to 1) has the structure of a graph; we often denote it as (M, T), where $n \leq m$. By using the orbit space of the one-skelton of (M, T) and the tangential representations around fixed points, we can obtain a labeled graph called a *GKM graph*, say $(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$.

Abstractly (without (M, T)), a GKM graph $(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$ is defined as follows. The abstract graph $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ is an m-valent graph, i.e., the number of the set of all outgoing edges from every $p \in V(\Gamma)$, say $E_p(\Gamma)$, is exactly m. The label $\mathcal{A} : E(\Gamma) \to H^2(BT^n)$ on edges is defined by a function which satisfies the following three conditions:

(1) $\mathcal{A}(e) = -\mathcal{A}(\overline{e})$ (where $\overline{e}$ is the edge e with the reversed orientation);

(2) for every $p \in V(\Gamma)$, the set $\mathcal{A}(E_p(\Gamma))$ is *pairwise linearly independent*, i.e., each pair of ielements is linearly independent in $H^2(BT)$;

(3) for all $e \in E(\Gamma)$, there exists a bijective map $\nabla_e : E_{i(e)}(\Gamma) \to E_{t(e)}(\Gamma)$ (where $i(e)$ is the initial vertex of e and $t(e)$ is its terminal vertex) such that

1. $\nabla_{\overline{e}} = \nabla_e^{-1}$,
2. $\nabla_e(e) = \overline{e}$, and
3. for each $e' \in E_{i(e)}(\Gamma)$, there exists an integer $c_e(e')$ such that

$$\mathcal{A}(\nabla_e(e')) - \mathcal{A}(e') = c_e(e')\mathcal{A}(e) \in H^2(BT). \qquad (1)$$

The collection $\nabla = \{\nabla_e \mid e \in E(\Gamma)\}$ is called a *connection* on the labelled graph $(\Gamma, \mathcal{A})$. We denote the labelled graph with connection as $(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$, and call it a(n) (abstract) (m, n)-type *GKM graph*. In this talk, we consider only GKM graphs with the following condition, called an *effectiveness*:

(4) for each $p \in V(\Gamma)$, the set $\mathcal{A}(E_p(\Gamma))$ spans $H^2(BT)$.

The goal of this talk is to define a free $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{O}(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$ on $(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$, and introduce that its rank gives the upper bound of the dimention of the torus action which is the extension of the torus action on a GKM manifold (M, T). In order to define $\mathcal{O}(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$, we first fix an order of outgoing edges on each vertex p, i.e., we may put $E_p(\Gamma)$ as

$$E_p(\Gamma) = \{e_{1,p}, \ldots, e_{m,p}\}.$$

Then, we can define the free $\mathbb{Z}$-module with rank m on each p, say $\mathbb{Z}E_p(\Gamma)$, by regarding $\{e_{1,p}, \ldots, e_{m,p}\}$ as the formal generator of

$\mathbb{Z}E_p(\Gamma)$. Namely,

$$\mathbb{Z}E_p(\Gamma) := \mathbb{Z}e_{1,p} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_{m,p} \simeq \mathbb{Z}^m.$$

Because an order on each $E_p(\Gamma)$ is fixed, the connection $\nabla_e : E_{i(e)}(\Gamma) \to E_{t(e)}(\Gamma)$ can be written as the permutation $(m \times m)$-matrix induced from the permutation on $\{1, \dots, m\}$. We denote this permutation matrix induced from ∇_e as

$$N_e : \mathbb{Z}E_{i(e)}(\Gamma) \to \mathbb{Z}E_{t(e)}(\Gamma) \in GL(m; \mathbb{Z}).$$

Take an edge $e \in E(\Gamma)$. Note that the coefficient $c_e(e')$ in E.q. (1) may be regarded as an integer attached on every edge $e' \in E_{i(e)}(\Gamma)$ for fixed edge $e \in E(\Gamma)$. Therefore, the m-tuple of these coefficients on e defines the element in $\mathbb{Z}E_{i(e)}(\Gamma)$ by

$$c_e = (c_e(e_{1,i(e)}), \dots, c_e(e_{m,i(e)})) \in \mathbb{Z}e_{1,i(e)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_{m,i(e)} \simeq \mathbb{Z}^m.$$

Thus we may define the function

$$c_{(\Gamma,\mathcal{A},\nabla)} : E(\Gamma) \to \mathbb{Z}^m \quad \text{by} \quad c_{(\Gamma,\mathcal{A},\nabla)}(e) = c_e.$$

Then, a free $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{O}(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$ is defined as the submodule of

$$\{f : V(\Gamma) \to \mathbb{Z}^m\} = \bigoplus_{p \in V(\Gamma)} \mathbb{Z}E_p(\Gamma) \simeq \bigoplus_{p \in V(\Gamma)} \mathbb{Z}^m$$

which satisfies that the following relations for all $e \in E(\Gamma)$:

$$N_e(f(p)) - f(q) = f(q)_{\overline{e}} c_{(\Gamma,\mathcal{A},\nabla)}(\overline{e}) \tag{2}$$

where $i(e) = p$, $t(e) = q(= i(\overline{e}))$ and $f(q)_{\overline{e}} \in \mathbb{Z}$ is the integer appearing on the edge $\overline{e}$; note that $\overline{e} \in E_{i(\overline{e})} = \{e_{1,q}, \ldots, e_{m,q}\}$ and $f(q) \in \mathbb{Z}E_{i(\overline{e})}(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}^m$ can be written as

$$f(q) = (f(q)_{e_{1,q}}, \ldots, f(q)_{e_{m,q}}) \in \mathbb{Z}^m.$$

This module $\mathcal{O}(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$ is said to be an *extension module* of $(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$.

Now we may state our main theorem:

Theorem 1. *Let $(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$ be an (m, n)-type GKM graph. Then the following two statements are equivalent:*

1. *there is an (m,k)-type GKM graph $(\Gamma, \widetilde{\mathcal{A}}, \nabla)$ extending the $(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)$ for some $k \geq n$, i.e., $\widetilde{\mathcal{A}} : E(\Gamma) \to H^2(BT^k)$ is an extension of the function $\mathcal{A} : E(\Gamma) \to H^2(BT^n)$;*

2. *$k \leq \mathrm{rank}\ \mathcal{O}(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla)(\leq m)$.*

In particular, if $\mathrm{rank}\ \mathcal{O}(\Gamma, \mathcal{A}, \nabla) = k$, then there is an extended (m,k)-type GKM graph $(\Gamma, \widetilde{\mathcal{A}}, \nabla)$ which is the maximal among extensions.

From this theorem, we have the following corollary:

Corollary. *Let (M^{2m}, T^n) be a GKM manifold and $(\Gamma_M, \mathcal{A}_M, \nabla_M)$ be its GKM graph. If $\mathrm{rank}\ \mathcal{O}(\Gamma_M, \mathcal{A}_M, \nabla_M) = n$, then the torus action of (M^{2m}, T^n) is the maximal effective torus action. In other words, if there is an extended (effective) torus action (M^{2m}, T^k) of (M^{2m}, T^n), then $k = n$.*

As an application of this result, the following fact can be proved:

Theorem 2. *The T^n-action on the flag manifold $\mathcal{F}l(\mathbb{C}^{n+1}) \simeq U(n+1)/T^{n+1}$, induced from the standard multiplication of T^n on the first n coordinates of $\mathbb{C}^{n+1}$, is the maximal effective torus action. In other words, there are no effective T^{n+1}-actions on $\mathcal{F}l(\mathbb{C}^{n+1})$ extending this T^n-action.*

This result may be regarded as the generalization of Shunji Takuma's result.

[1] M. Goresky, R. Kottwitz and R. MacPherson, "Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem", *Invent. Math.,* **131** (1998), 25–83.

[2] V. Guillemin and C. Zara, "One-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology", *Duke Math. J.,* **107**:2 (2001), 283–349.

[3] S. Kuroki, "An obstruction to the extension of a torus action on a GKM manifold" , in preparation.

[4] S. Takuma, "Extendability of symplectic torus actions with isolated fixed points", *Duke Math. J.,* **1393** (2004), 72–78.

PROJECTIVE EMBEDDINGS OF QUASITORIC MANIFOLDS

Andrey Kustarev *(Higher School of Economics, Moscow)*

This is a joint work with Prof. V. M. Buchstaber.

1. Moment-angle manifolds

Suppose that the polytope $P = P^n$ is defined by m inequalities of the form $(a_i, x) + b_i \geqslant 0$, $i = 1 \dots m$. P is called *simple* if every face of codimension k is an intersection of exactly k facets (faces of codimension one). In matrix form we have $A_P x + b_P \geqslant 0$, where $b_P \in \mathbb{R}^m$ and A_P is an $(m \times n)$-matrix of rank n. The map $i_P(x) = A_P x + b_P$ is an affine embedding and we have $i_P(P) = i_P(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$. Let $\rho\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ be the map given by the formula $z \mapsto (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$.

Definition 1. The compact set $\mathcal{Z}_P = \rho^{-1}(i_P(P))$ is called the *moment-angle manifold* corresponding to simple polytope P.

Theorem 1. *(Buchstaber-Panov-Ray). $\mathcal{Z}_P$ is an $(m+n)$ real-algebraic submanifold in $\mathbb{C}^m$. It is given by $(m-n)$ equations* *of the form* $C_P(\rho(z) - b_P) = 0$, *where* C_P *is* $((m-n)\times m)$*-matrix such that* $C_P A_P = 0$ *and* $\operatorname{rk} C_P = m - n$. *Equivalently,* C_P *fits into the exact sequence* $0 \to \mathbb{R}^n \xrightarrow{A_P} \mathbb{R}^m \xrightarrow{C_P} \mathbb{R}^{m-n} \to 0$.

The rows of A_P and columns of C_P are in one-to-one correspondence with the facets of P.

Example 1. $P = \Delta^1$, $A_P = (1, -1)^T$ and $b_P = (0, 1)^T$. Then $i_P(x) = (x, 1-x)$. We may take $C_P = (1, 1)$ so that $\mathcal{Z}_P = \{|z_1|^2 + (|z_2|^2 - 1) = 0\} = S^3$.

Similarly for $P = \Delta^n$ we have $\mathcal{Z}_P = S^{2n+1}$. The manifold $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$ is invariant under the standard action of torus $T^m = (t_1, \ldots, t_m)$, $|t_i| = 1$. Clearly, $\mathcal{Z}_P/T^m = P$.

2. Quasitoric manifolds

If $F_1, \ldots, F_m$ are facets of P, we let $F_I = \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ and

$$T_I = \{(t_1, \ldots, t_m) \in T^m \mid t_j = 1 \text{ for all } j \notin I\}$$

for a given index subset $I \subset [1, m]$. Consider an arbitrary subgroup $K \subset T^m$.

Lemma 1. $K \subset T^m$ *acts freely on* $\mathcal{Z}_P \Leftrightarrow$ *for every* $F = F_I \subset P$ *we have* $K \cap T_I = 1$.

Clearly, in this case $\dim K \leqslant (m-n)$. Suppose that for the given polytope P there exists $(m-n)$-dimensional toric subgroup $K \subset T^m$ acting freely on $\mathcal{Z}_P$ (not for any P such K exists).

Definition 2. The smooth manifold $\mathcal{Z}_P/K = M$ is called a *quasitoric manifold*.

M is equipped with an action of torus $T^m/K \simeq T^n$. We have a projection map $\pi\colon M \to M/T^n = P$. Since $T^m/K \simeq T^n$, we have a short exact sequence $1 \to K \to T^m \to T^n \to 1$. One can describe K in terms of this sequence.

Lemma 2. *Suppose Λ is an $(n \times m)$-integer matrix defining epimorphism $l\colon T^m \to T^n$. Then $K = \ker l$ acts freely on $\mathcal{Z}_P \Leftrightarrow$ for every vertex $v = F_I \in P$ the matrix Λ_v formed by columns of Λ from index set I has* $\det \Lambda_v = \pm 1$.

Example 2. Let $P = \Delta^n$ and $\mathcal{Z}_P = S^{2n+1}$. We have $m - n = 1$. Consider

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Then $K = \ker l$ is the diagonal subgroup. We have $S^{2n+1}/K = \mathbb{C}P^n$.

Example 3. When $A_P = \Lambda^T$ and $b_P \in \mathbb{Z}^m$, M is *a projective non-singular toric variety*. The action of K on $\mathbb{C}^m$ is Hamiltonian and in this case $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$ is a level set of Hamiltonian defined by K. So $M = \mathcal{Z}_P/K$ also has a symplectic structure invariant under the action of $T^m/K = T^n$. The map $M \to M/T^n = P$ is a moment map.

3. Equivariant embeddings

Whitney theorem is a classical result on embeddings of manifolds: any smooth M^n can be embedded into $\mathbb{R}^{2n}$. There is an equivariant version:

Theorem 2. *(Mostow-Palais). Smooth manifold M with a smooth action of compact Lie group G can be equivariantly embedded into $\mathbb{R}^N$.*

There is also Kodaira's theorem on complex submanifolds of $\mathbb{C}P^N$:

Theorem 3. *(Kodaira). Let M be a compact complex manifold with a positive holomorphic linear bundle (in particular, this is true, if M has a rational Kähler form). Then there exists a holomorphic embedding $M \to \mathbb{C}P^N$.*

These are existence theorems: no bounds on N are provided. In the case of quasitoric manifolds we may use information encoded in the polytope P and the matrix Λ to obtain stronger results.

Here is our main result.

Theorem 4. *For any $x \in H^2(M,\mathbb{Z})$ there exists a T^n-equivariant map $\tilde{\varphi}_x\colon M \to \mathbb{C}P^{q-1}$ s.t. $\tilde{\varphi}_x^*([\mathbb{C}P^{q-2}]^*) = x$ and $\{\pi \times \tilde{\varphi}_x\colon M \to P \times \mathbb{C}P^{q-1}\}$ is a smooth embedding.*

The map $\tilde{\varphi}_x$ is constructed explicitly and $q \leqslant (n+1)$(number of vertices of P). In practice, q is often smaller. If $x = 0$, then $\tilde{\varphi}_x(M)$ lies in some affine chart $\mathbb{C}^{q-1} \subset \mathbb{C}P^{q-1}$.

Construction of the map $\tilde{\varphi}_x$. We have $H^2(M,\mathbb{Z}) =$ (characters of K), so $x \in H^2(M,\mathbb{Z})$ determines some character $\chi\colon K \to S^1$. We construct q monomial maps $\varphi_i\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ of the form $\hat{z}_1^{a_1} \ldots \hat{z}_m^{a_m}$ where $\hat{z}_i = z_i$ or $\bar{z}_i$ and $a_i \geqslant 0$. The maps φ_i all satisfy the condition $\varphi_i(tz) = \chi(t)\varphi_i(z)$ for all $t \in K$. Let $\varphi = \prod \varphi_i$. Then $\varphi\colon \mathcal{Z}_P \to \mathbb{C}^q$ induces a map $\tilde{\varphi}_x\colon (\mathcal{Z}_P/K) \to \mathbb{C}P^{q-1}$.

We know from toric geometry that sometimes we do not need π to define an embedding.

Theorem 5. *Suppose that $A_P = \Lambda^T$ and $b_P \in \mathbb{Z}^m$. Then the map $\tilde{\varphi}_{[b_P]}$ is a smooth embedding of M to $\mathbb{C}P^{q-1}$.*

In this case all of the monomial functions φ_i do not contain $\bar{z}_j$'s and therefore are holomorphic on $\mathbb{C}^m$. Their coefficient vectors are described explicitly: these are vertices of $i_P(P)$ and points on edges of $i_P(P)$ that are next to vertices.

The author was supported by NSF grant №14-11-00414.

ON THE SPACE OF SECTIONS OF A LINE BUNDLE ON A TOPOLOGICAL TORIC MANIFOLD

H. Kuwata *(Department of Mathematics Graduate school of science Osaka City University, Osaka)*

It is well known that the space of sections $\Gamma(X, L)$ of a line bundle L on a toric manifold X (i.e. a compact smooth toric variety) is finite dimensional and the direct sum of $\Gamma(X, L)$, with running over isomorphism classes of line bundles over X, is isomorphic to a polynomial ring ([1]). In this talk, we discuss a generalization of this result to the category of topological toric manifolds, where topological toric manifolds are a topological generalization of toric manifolds introduced by Ishida-Fukukawa-Masuda ([2]).

[1] David A. Cox, "The homogeneous coordinate ring of a toric variety", *J. Algebraic Geom.,* **4**:1 (1995), 17–50.

[2] H. Ishida, Y. Fukukawa and M. Masuda, "Topological toric manifolds", *Mosc. Math. J.,* **13**:1 (2013), 189–190.

UNIVERSALITY OF ZETA-FUNCTIONS

A. Laurinčikas *(Department of Mathematics and Informatics, Vilnius University, Lithuania)*

We will present some new results on the discrete universality of the Riemann and Hurwitz zeta-functions. The main attention will be devoted to joint universality theorems.

TOPOLOGY OF SOME POLYHEDRAL PRODUCTS ARISING FROM MINIMALLY NON-GOLOD COMPLEXES

I. Yu. Limonchenko *(Moscow State University, Moscow)*

A simplicial complex K on m vertices and its face ring $k[K]$ are called Golod (over a field k) if all Massey operations in $Tor_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k[K],k)$ are trivial. This is a graded version of an original notion of a Golod local ring, introduced in homological algebra by T. Gulliksen and G. Levin [4] in 1969 as a generalization of a class of local rings with rational Poincaré series studied by E. S. Golod [3]. In 2007 A. Berglund and M. Jöllenbeck [1] introduced a notion of a minimally non-Golod simplicial complex, that is a non-Golod complex which turns into a Golod one after deleting any of its vertices. Since 2007 combinatorial and algebraic properties of these two classes of simplicial complexes K and the topology of their polyhedral products $(X,A)^K$ were studied intensively in toric topology by J. Grbić, K. Iriye, D. Kishimoto, T. E. Panov, S. Theriault, J. Wu and others (see [2]).

We show that certain operations on simplicial complexes (e.g., simplicial multiwedge, connected sum) preserve Golodness and minimal non-Golodness. Using this we introduce infinite families of Golod and minimally non-Golod simplicial complexes K, starting from some neighbourly triangulations of manifolds with few vertices, and discuss the topology of their polyhedral products $(D^2,S^1)^K$.

The author was supported by RFBR grants nn. 14-01-31398 and 14-01-92612.

[1] A. Berglund, M. Jöllenbeck, “On the Golod property of Stanley–Reisner rings”, *J. Algebra,* **315**:1 (2007), 249–273.

[2] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, "Toric Topology", *Amer. Math. Soc.,* Providence, R.I., 2015.

[3] E. S. Golod, "On the cohomology of some local rings", *Soviet Math. Dokl.,* **3** (1962), 745–749 (in Russian).

[4] T. H. Gulliksen, G. Levin, "Homology of local rings", *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics,* V. 20, Queen's University, Kingston, Ontario, 1969.

THE ROOT SYSTEMS OF TORUS MANIFOLDS

Mikiya Masuda *(Osaka City University, Japan)*

One of the original motivation of toric geometry initiated by Demazure was to study the automorphism group $\mathrm{Aut}(X)$ of a toric variety X. He described $\mathrm{Aut}(X)$ when X is complete and non-singular, by introducing a root system associated to the fan of X (see [2]). In this case $\mathrm{Aut}(X)$ is an algebraic group (of finite dimension) and the $\mathbb{C}^*$-torus acting on X is a maximal torus of $\mathrm{Aut}(X)$.

A torus manifold M is a closed smooth manifold of even dimension, say $2n$, with an effective smooth action of a compact n-dimensional torus T having a fixed point. A complete non-singular toric variety with the restricted compact torus action is a torus manifold. The torus T can be regarded as a subgroup of the group $\mathrm{Diff}(M)$ of diffeomorphisms of M but $\mathrm{Diff}(M)$ is infinite dimensional unlike $\mathrm{Aut}(X)$.

In this talk I introduce a root system $R(M)$ for a torus manifold M and show that if there is a compact Lie subgroup G of $\mathrm{Diff}(M)$ containing the T, then the root system of G must be a subsystem of $R(M)$. This talk is based on a joint work with Shintaro Kuroki ([1]).

[1] S. Kuroki and M. Masuda, *Root systems and symmetries of torus manifolds,* arXiv:1503.05264.

[2] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties,* Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

COMMUTING DIFFERENCE KRICHEVER – NOVIKOV OPERATORS

Gulnara S. Mauleshova *(Novosibirsk State University, Novosibirsk)*,

Andrey E. Mironov *(Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Novosibirsk)*

We denote by L_k, L_s the difference operators of orders $k = N_- + N_+$ and $s = M_- + M_+$, where

$$L_k = \sum_{j=N_-}^{N_+} u_j(n)T^j, \quad L_s = \sum_{j=M_-}^{M_+} v_j(n)T^j, \quad n \in \mathbb{Z},$$

T is the shift operator. The condition of their commutativity is equivalent to a complicated system of nonlinear difference equations on the coefficients. These equations have been studied since the beginning of the 20th century (see [1]). An analogue of the Burchnall – Chaundy lemma holds. Namely, if $L_kL_s = L_sL_k$, then there exists a nonzero polynomial $F(z, w)$ such that $F(L_k, L_s) = 0$ [2]. The polynomial F defines the *spectral curve*

$$\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 | F(z, w) = 0\}.$$

The spectral curve parametrizes common eigenvalues, i.e. if

$$L_k\psi = z\psi, \qquad L_s\psi = w\psi,$$

then $(z, w) \in \Gamma$. The dimension of the space of common eigenfunctions with the fixed eigenvalues is called the *rank* of the pair L_k, L_s

$$l = \dim\{\psi : L_k\psi = z\psi, \quad L_s\psi = w\psi\},$$

where the point $(z, w) \in \Gamma$ is in general position.

The maximal commutative ring of difference operators containing L_k and L_s is isomorphic to the ring of meromorphic functions on an algebraic spectral curve Γ with poles $q_1, \dots, q_m \in \Gamma$ (see [3]). Such operators are called *m-points operators*. The commuting difference operators of rank one were found by I. M. Krichever [2] and D. Mumford [4]. Eigenfunctions (Baker – Akhiezer functions) and coefficients of such operators can be found explicitly with the help of theta-functions of the Jacobi varieties of spectral curves. In the case of $l > 1$ eigenfunctions cannot be found explicitly. Finding such operators is still an open problem. Rank two one-point operators at $g = 1$ were found in [3], operators with polynomial coefficients among them were obtained in [5].

In this paper we consider one-point operators of rank two L_4, L_{4g+2} corresponding to the hyperelliptic spectral curve Γ

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + c_{2g-1}z^{2g-1} + ... + c_0,$$

herewith

$$L_4 = \sum_{i=-2}^{2} u_i(n)T^i, \quad L_{4g+2} = \sum_{i=-(2g+1)}^{2g+1} v_i(n)T^i, \quad u_2 = v_{2g+1} = 1,$$

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi, \quad \psi = \psi(n,P), \quad P = (z,w) \in \Gamma.$$

Common eigenfunctions of L_4 and L_{4g+2} satisfy the equation

$$\psi(n+1,P) = \chi_1(n,P)\psi(n-1,P) + \chi_2(n,P)\psi(n,P),$$

where $\chi_1(n,P)$ and $\chi_2(n,P)$ are rational functions on Γ having $2g$ simple poles, depending on n (see [3]). The function $\chi_2(n,P)$ additionally has a simple pole at $q = \infty$. To find L_4 and L_{4g+2} it is sufficient to find χ_1 and χ_2. Let σ be the holomorphic involution on Γ, $\sigma(z,w) = \sigma(z,-w)$. The main results of this paper are Theorems 1–4.

Theorem 1. *If*

$$\chi_1(n,P) = \chi_1(n,\sigma(P)), \qquad \chi_2(n,P) = -\chi_2(n,\sigma(P)),$$

then L_4 has the form

$$L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n,$$

where

$$\chi_1 = -V_n\frac{Q_{n+1}}{Q_n}, \quad \chi_2 = \frac{w}{Q_n}, \quad Q_n(z) = z^g + \alpha_{g-1}(n)z^{g-1} + \ldots + \alpha_0(n).$$

Functions V_n, W_n, Q_n satisfy

$$F_g(z) = \\ = Q_{n-1}Q_{n+1}V_n + Q_nQ_{n+2}V_{n+1} + Q_nQ_{n+1}(z - V_n - V_{n+1} - W_n). \tag{1}$$

It is a remarkable fact that (1) can be linearized. Namely, if we replace $n \to n+1$ and take the difference with (1), then the result can be divided by $Q_{n+1}(z)$. Finally we obtain the linear equation on

$Q_n(z)$.

Corollary 1. *Functions $Q_n(z), V_n, W_n$ satisfy the equation*

$$Q_{n-1}V_n + Q_n(z - V_n - V_{n+1} - W_n) -$$
$$- Q_{n+2}(z - V_{n+1} - V_{n+2} - W_{n+1}) - Q_{n+3}V_{n+2} = 0.$$

At $g = 1$, the equation (1) allows us to express V_n, W_n via a functional parameter γ_n.

Corollary 2. *The operator $L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n$, where*

$$V_n = \frac{F_1(\gamma_n)}{(\gamma_n - \gamma_{n-1})(\gamma_n - \gamma_{n+1})}, \qquad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1},$$

commutes with

$$L_6 = T^3 + (V_n + V_{n+1} + V_{n+2} + W_n - \gamma_{n+2})T +$$

$$+ V_n(V_{n-1} + V_n + V_{n+1} + W_n - \gamma_{n-1})T^{-1} + V_{n-2}V_{n-1}V_n T^{-3}.$$

The spectral curve of L_4, L_6 is $w^2 = F_1(z)$.

Theorem 1 allows us to construct the examples.

Theorem 2. *The operator*

$$L_4^\sharp = (T + (r_3 n^3 + r_2 n^2 + r_1 n + r_0)T^{-1})^2 + g(g+1)r_3 n, \qquad r_3 \neq 0$$

commutes with a difference operator $L_{4g+2}^\sharp$.

Theorem 3. *The operator*

$$L_4^\checkmark = (T + (r_1 a^n + r_0)T^{-1})^2 + r_1(a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1)a^{n-g}, \qquad r_1, a \neq 0,$$

where $a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1 \neq 0$, commutes with a difference operator $L_{4g+2}^\checkmark$.

Theorem 4. *The operator*

$$L_4^{\natural} = (T + (r_1 \cos(n) + r_0)T^{-1})^2 - 4r_1 \sin(\frac{g}{2}) \sin(\frac{g+1}{2}) \cos(n + \frac{1}{2}),$$
$$r_1 \neq 0$$

commutes with a difference operator $L_{4g+2}^{\natural}$.

[1] G. Wallenberg, "Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differenzenausdrücke", *Arch. Math. Phys. bd.,* **15** (1909), 151–157.

[2] I. M. Krichever, "Algebraic curves and non–linear difference equations", *Russian Math. Surveys,* **33**:4 (1978), 255–256.

[3] I. M. Krichever, S. P. Novikov, "Two-dimensional Toda lattice, commuting difference operators, and holomorphic bundles", *Russian Math. Surveys,* **58**:3 (2003), 473–510.

[4] D. Mumford, "An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg–de Vries equation and related non-linear equations", *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977),* Kinokuniya, Tokyo, 1978, 115–153.

[5] A. E. Mironov, "Discrete analogues of Dixmier operators", *Sbornik: Math.,* **198**:10 (2007), 1433–1442.

DIFFERENTIAL-DIFFERENCE AND FINITE-DIFFERENCE INTEGRABLE SYSTEMS ASSOCIATED WITH KAC-MOODY ALGEBRAS

A. Mikhailov *(University of Leeds, Leeds)*

We consider Lax operators for two–dimensional "periodic" Toda type systems corresponding to classical series of Kac-Moody algebras and $G_2^{(1)}$ [1]. For these Lax operators we construct systematically elementary Darboux transformations and integrable differential-difference systems (Bäcklund transformations). Conditions of Bianchi permutability for Bäcklund transformations, or, more precisely, the commutativity conditions for the Darboux transformations lead to systems of integrable partial difference equations.

Thus, with every classical Kac-Moody Lie algebra and $G_2^{(1)}$ we associate an integrable Toda type system, a pair of differential-difference systems and a partial difference system. These differential-difference systems represent Bäcklund transformations for the Toda type system and serve as (non-local) symmetries for the partial-difference system of equations. For some of these partial-difference systems we have constructed local symmetries and corresponding Yang-Baxter maps.

[1] V. G. Drinfeld and V. V. Sokolov, "Lie Algebras and Equations of Korteweg-de Vries type", *J. Sov. Math.,* **30** (1985), 1975–2036.

SENSITIVITY FUNCTIONALS IN CONTACT PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

R. V. Namm *(Computing Center Far East Division Russian Academy of Sciences, Khabarovsk)*,
E. M. Vikhtenko *(Pacific National University, Khabarovsk)*,
G. Woo *(Changwon National University, Changwon)*

Sensitivity functionals arise in the construction and analysis of duality schemes based on modified Lagrangian functionals. The convergence of modified duality methods leans heavily on the characteristic properties of sensitivity functionals. The lower semicontinuity is its main property. We show that the sensitivity functional corresponding to the variational elasticity problem with a given friction is lower semicontinuous.

ON COMPUTING THE RESOLVENT KERNELS FOR CARLEMAN INTEGRAL OPERATORS

Igor M. Novitskii *(IAM FEB RAS, Khabarovsk)*

If k is in $\mathbb{N}$ and B is a Banach space with norm $\|\cdot\|_B$, let $C(\mathbb{R}^k, B)$ denote the Banach space, with the norm

$$\|f\|_{C(\mathbb{R}^k,B)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^k} \|f(x)\|_B \,,$$

of all continuous functions f from $\mathbb{R}^k$ into B such that

$$\lim_{|x|\to\infty} \|f(x)\|_B = 0,$$

where $|\cdot|$ is the euclidian norm in $\mathbb{R}^k$. A function $\boldsymbol{T} \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ is called a K^0-kernel [1] if the so-called *Carleman functions* $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t'}\colon \mathbb{R} \to L^2$, defined via $\boldsymbol{T}$ by $\boldsymbol{t}(s) = \overline{\boldsymbol{T}(s,\cdot)}$, $\boldsymbol{t'}(s) = \boldsymbol{T}(\cdot, s)$, belong to $C(\mathbb{R}, L^2)$, where $L^2 = L^2(\mathbb{R})$. Let $0 < \tau_n \nearrow +\infty$ as $n \to \infty$ and let P_n stand for an L^2 orthogonal projection defined on each $f \in L^2$ by $P_n f = \chi_{(-\tau_n,\tau_n)} f$. Let $\boldsymbol{T}_{|\lambda}$ (resp., $\boldsymbol{T}_{n|\lambda_n}$) denote that K^0-kernel which induces the Fredholm resolvent $T(I-\lambda T)^{-1}$ (resp., $T_n(I-\lambda_n T_n)^{-1}$) for the integral operator T (resp., $T_n = P_n T$) on L^2 at its regular value $\lambda \in \Pi(T)$ (resp., $\lambda_n \in \Pi(T_n)$).

Given an arbitrary sequence $\{\lambda_n\}$ of complex numbers satisfying $\lambda_n \in \Pi(T_n)$ for each n and converging to some $\lambda \in \mathbb{C}$, the sequence $\left\{\boldsymbol{T}_{n|\lambda_n}\right\}$ (*) (all of whose terms are computed explicitly in terms of the original K^0-kernel $\boldsymbol{T}_{|0}$ of T, as the quotient of the first Fredholm minor and the Fredholm determinant for the corresponding T_n [2]) is not known to converge in general. Natural questions to arise are for example these: if the sequence (*) converges in $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, possibly up to the extraction of a subsequence, to a function $\boldsymbol{A}$ say, whether

λ is necessarily a regular value for T; and if λ turns out to belong to $\Pi(T)$, whether $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}_{|\lambda}$, and if not, what further connections between $\{\lambda_n\}$ and λ guarantee the existence of the limit-relation $\boldsymbol{T}_{|\lambda} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{T}_{n|\lambda_n}$ in $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$? Similar questions can be asked concerning the $C(\mathbb{R}, L^2)$ sequences $\{\boldsymbol{t}_{n|\lambda_n}\}$, $\{\boldsymbol{t}'_{n|\lambda_n}\}$ formed by the respective Carleman functions for the resolvent kernels $\boldsymbol{T}_{n|\lambda_n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

The object of this talk is to discuss some old and some new results in answering the above questions.

[1] I. M. Novitskii, "Integral representations of linear operators by smooth Carleman kernels of Mercer type", *Proc. Lond. Math. Soc. (3),* **68**:1 (1994), 161–177.

[2] I. M. Novitskii, "Fredholm minors for completely continuous operators", *Dal'nevost. Mat. Sb.,* **7** (1999), 103–122, (in Russian).

ON TORIC GENERATORS IN THE UNITARY AND SPECIAL UNITARY BORDISM RINGS

Taras E. Panov *(Moscow State University; Institute for Theoretical and Experimental Physics; Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences, Moscow)*

Finding geometric representatives of bordism classes is a classical problem on the borders of geometry and topology. The theory of bordism and cobordism is one of the deepest and most influential parts of algebraic topology, which experienced a spectacular development in the 1960s. Although the original definition of bordism, going back to Pontryagin and Thom, was very geometric, it soon became clear that elaborate homotopy-theoretic, algebraic and number-theoretic techniques were required to obtain structural results on bordism groups and (co)bordism rings.

Here we consider a family of projective toric manifolds obtained by iterated projectivisation of sums of line bundles, starting from a complex projective space. Such iterated projectivisations are also known as *generalised Bott manifolds*. Our first result (Theorem 1) shows that the complex bordism ring Ω^U can be generated by the most simple nontrivial 2-stage projectivisations: manifolds $L(n_1, n_2) = \mathbb{C}P(\xi)$, where ξ is the sum of a tautological line bundle and an n_2-dimensional trivial bundle over $\mathbb{C}P^{n_1}$. This new toric generator set is somewhat simpler than either of the set of Milnor hypersurfaces $\{H(n_1, n_2)\}$ or Buchstaber and Ray's toric set $\{B(n_1, n_2)\}$.

Theorem 1. *The bordism classes* $[L(n_1, n_2)] \in \Omega^U_{2(n_1+n_2)}$ *generate the ring* Ω^U.

Recall that a stably complex (or unitary) manifold M is *special unitary* (an *SU-manifold* for short) if $c_1(M) = 0$. We proceed by providing explicit families of quasitoric SU-manifolds which contain polynomial generators of the SU-bordism ring $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ (Theorem 2). In fact, our quasitoric SU-manifolds are genuinely indecomposable and indivisible elements in Ω^{SU} (integrally, without inverting any prime), however Ω^{SU} is not a polynomial ring.

Theorem 2. *There exist quasitoric SU-manifolds* M^{2i}, $i \geq 5$, *with* $s_i(M^{2i}) = m_i m_{i-1}$ *if* i *is odd and* $s_i(M^{2i}) = 2m_i m_{i-1}$ *if* i *is even. These quasitoric manifolds represent polynomial generators of the ring* $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Characteristic numbers of SU-manifolds satisfy intricate divisibility conditions. Ochanine's theorem asserting that the signature of a $8k+4$-dimensional SU-manifold is divisible by 16 is one of the most famous examples. We therefore find it quite miraculous that polynomial generators for the SU-bordism ring Ω^{SU} occur within the most basic families of examples that one can produce using toric methods: 2-stage complex projectivisations, and 3-stage projectivisations with the first stage being just $\mathbb{C}P^1$. The proof of Theorem 2 involves calculating the characteristic numbers and checking various divisibility conditions. We use both classical and more recent results on binomial coefficients modulo a prime.

This is a joint work with Zhi Lu (Fudan University, China).

Supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00414)

[1] Zhi Lu and Taras Panov, "On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings", *Preprint (2014),* arXiv:1412.5084.

COHOMOLOGICAL DIMENSIONS OF POINTED CHU SPACES

A. G. Sukhonos *(IAM FEB RAS, Vladivostok)*

A triple $\mathcal{A} = (A^\star, r, X^\star)$, where $r : A^\star \times X^\star \longrightarrow \Sigma^\star$ is a mapping of pointed sets, such that $a_\star \in A^\star$, $x_\star \in X^\star$, $\sigma_\star \in \Sigma^\star$ — basepoint and $r(a_\star, x) = r(a, x_\star) = \sigma_\star$ for all $a \in A^\star$, $x \in X^\star$ is called a *Pointed Chu space over the alphabet* $\Sigma^\star$. Pointed Chu spaces and their homomorphisms consitute a category, which we will denote by $Chu_{\Sigma^\star}$.

We study the Aleksandrov–Čech cohomology and Grothendieck cohomology on Pointed Chu spaces.

Suppose that $(A^\star, X^\star)$ is a normal Pointed Chu space, τ is the Grothendieck $X^\star$-topology on $2^{A^\star}$, $a \in 2^{A^\star}$, S_τ is the category of abelian τ-sheaves on $2^{A^\star}$, and $\alpha = \{a_i \leq a \mid i \in I\}$ is a family of elements. The functors $\Gamma_{\tau,a}$, $\Gamma_{\tau,\alpha}$, and $\Gamma_{\tau,a,\alpha} : \mathcal{S}_\tau \to Ab$ are defined as follows: $\Gamma_{\tau,a}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(a)$, $\Gamma_{\tau,\alpha}(\mathcal{A}) = H^0(\alpha, \mathcal{A})$ and $\Gamma_{\tau,a,\alpha}(\mathcal{A}) = ker\{\mathcal{A}(a) \to H^0(\alpha, \mathcal{A})\}$.

Define the Grothendieck cohomology $H^n_\tau(a, \mathcal{A})$, $H^n_\tau(\alpha, \mathcal{A})$, and $H^n_\tau(a, \alpha, \mathcal{A})$ with coefficients in an abelian presheaf $\mathcal{A}$ as the values at the τ-sheaf defined by $\mathcal{A}$ of the nth right derived functors $\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,a}$, $\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,\alpha}$, and $\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,a,\alpha}$. Namely, $H^n_\tau(a, \mathcal{A}) = (\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,a})(S_\tau(\mathcal{A}))$, $H^n_\tau(\alpha, \mathcal{A}) = (\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,\alpha})(S_\tau(\mathcal{A}))$ and $H^n_\tau(a, \alpha, \mathcal{A}) = (\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,a,\alpha})(S_\tau(\mathcal{A}))$, where $S_\tau(\mathcal{A})$ is the τ-sheaf generated by $\mathcal{A}$.

The *Aleksandrov–Čech cohomologies* $H^n(\alpha, \mathcal{A})$ and $\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A})$ are defined similarly to the case of topological spaces.

It is proved that the Aleksandrov–Čech cohomology is isomorphic to the Grothendieck cohomology.

We consider the problems of the cohomological characterization of the dimension of a Pointed Chu space.

[1] E. E. Skurikhin and A. G. Sukhonos, “Grothendieck topologies on Chu spaces”, *Siberian Adv. Math.,* **19**:3 (2009), 192–210.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е. Г. Агапова *(ТОГУ, Хабаровск)*

Несмотря на значительное число публикаций, посвященных теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений, нет общих методов доказательства существования, единственности решения краевых задач для подобных уравнений. Одним из факторов, определяющих сложность проблемы, является нелинейность в главной части дифференциального уравнения в частных производных и его вырождение не на заданных многообразиях, а на решении, которое само неизвестно. Рассмотрим третью краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t}[|2u+1|^{1/2}(2u+1)]-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f,\ x\in(0,\ 1),\ 0<t\le T<\infty,\quad (1)$$

и условиям

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+ku(0,t)=0,\qquad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}+ku(1,t)=0,\\ k>C=const>0,\end{gathered}\qquad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in(0,1).\qquad (3)$$

В общем случае решение существует в обобщенном смысле [1, 2]. Уравнение (1) является нелинейным и вырождающимся при производной по времени; к подобным уравнениям классические методы не применимы. Решение задачи (1)–(3) приближенным методом при различных входных и начальных данных имеет порядок погрешности 10^{-3}, что говорит об эффективности предлагаемого приближенного метода и о достаточной адекватности построенной разностной схемы исходной задаче. Из сравнения полученных результатов наблюдается скачок в начальный момент времени в зависимости от начальных условий и затухание с течением времени.

[1] Е. Г. Агапова, А. Г. Подгаев, “Разрешимость нелинейного с вырождением при производной по времени на решении уравнения теплопроводности в классах неограниченных функций”, *ДАН,* **382**:3 (2002), 1–3.

[2] Е. Г. Агапова, “Разрешимость нелинейного с вырождением при производной по времени на решении уравнения теплопроводности в классах неограниченных функций”, *Дальневосточный математический журнал,* **7**:(1–2) (2007), 3–16.

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ МАСКИРОВКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ ВОЛНОВОГО ОБТЕКАНИЯ

Г. В. Алексеев *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*,
Т. М. Кукина *(ДВФУ, Владивосток)*,
О. С. Ларькина *(ДВФУ, Владивосток)*

В докладе рассматриваются задачи маскировки материальных тел от их обнаружения с помощью электромагнитной и акустической локации на основе метода волнового обтекания. Дается краткий обзор ряда методов маскировки и результатов решения задач маскировки, полученных с помощью этих методов. Развивается приближенный метод маскировки, основанный на использовании оптимизационного метода.

Сущность данного метода состоит во введении определенного функционала качества, адекватно отвечающего рассматриваемой обратной задаче маскировки, и последующем сведении ее к задаче нахождения минимума введенного функционала качества. В качестве управлений выбираются неизвестные физические параметры среды или границы, входящие коэффициентами в дифференциальные уравнения рассматриваемых моделей или в импедансное граничное условие. Роль указанного функционала качества играет средне-квадратичная норма рассеянного акустического поля. Если, в частности, на решении экстремальной задачи указанный функционал обращается в нуль, то это эквивалентно равенству нулю рассеянного акустического поля. Последнее может означать, что указанный объект невозможно обнаружить с помощью локации. Для решения так сформулированной задачи управления применяются хорошо разработанные к настоящему времени методы решения экстремальных задач. Важно отметить, что данный метод применим для решения задач, возникающих как при использовании пассивных средств маскировки, так и в случае смешанного метода маскировки, основанного на совместном использовании пассивных и активных средств маскировки. Более детально о данном методе можно прочитать [1–2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00313-а).

[1] G. V. Alekseev, "Cloaking via impedance boundary condition for the 2-D Helmholtz equation", *Appl. Anal.,* **93** (2014), 254–268.

[2] Г. В. Алексеев, "Оценки устойчивости в задаче маскировки материальных тел для уравнений Максвелла", *Журн. вычисл. матем. матем. физ.,* **54** (2014), 1863–1878.

КОНЕЧНОМЕРНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ С ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ ДВУМЕРНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

Е. В. Амосова *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Одним из важных направлений исследований системы уравнений, описывающих движения вязкого газа, являются вопросы качественной теории, включая анализ равномерных по t свойств решений и поведения решений при $t \to \infty$. Соответствующие результаты имеют особый интерес, когда они получены «в большом» по данным.

Будем предполагать, что газ заполняет ограниченную область $Q = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей класса C^2 и его состояние характеризуется распределением плотности и поля скоростей, которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\rho_t + \mathrm{div}\ (\mathbf{u}\rho) = 0, \quad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \tau(\mathbf{x},t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad (1)$$

где $\tau(\mathbf{x},t) = \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\ \mathbf{u} - c^2\nabla(\rho^\gamma)$, λ, μ — коэффициенты динамической и объемной вязкости, γ — показатель адиабаты, $\gamma \geq 1$. Уравнения (1) дополняются краевыми и начальными условиями:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0; \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \Omega. \qquad (2)$$

Пусть распределения плотности $\rho_s \in L^{2\gamma}(\Omega)$ и поля скоростей $\mathbf{u}_s \in H_0^1(\Omega)$ являются стационарным решением задачи (1)–(2), то есть

$$\mathrm{div}\ (\mathbf{u}_s\rho_s) = 0, \quad (\mathbf{u}_s\cdot\nabla)\mathbf{u}_s = \mu\Delta\mathbf{u}_s + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\ \mathbf{u}_s - c^2\nabla(\rho_s^\gamma) + \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

$\mathbf{u}_s|_{\partial\Omega} = 0$, и пара $(\rho_s;\mathbf{u}_s)$ является неустойчивой особой точкой динамической системы, порождаемой эволюционными уравнениями (1) в пространстве $L^2(\Omega)$. Задача стабилизации заключается в следующем. Для заданного $\sigma > 0$ требуется найти оператор управления с обратной связью $\mathbf{S}(\cdot,t)\colon L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ размерность образа которого зависит от стабилизируемого стационарного решения и предписанной скорости стабилизации, причем образ оператора $\mathbf{S}(\cdot,t)$ лежит в шаре заданного радиуса и такой, что решение задачи для замкнутой системы

$$\rho_t + \mathrm{div}\ (\mathbf{u}\rho) = 0, \quad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \tau(\mathbf{x},t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}(\cdot,t) = 0$$

при $t > 0$ сходится к $(\rho_s;\mathbf{u}_s)$ с заданной скоростью σ:

$$\|\rho(t) - \rho_s\| \leq C_1 e^{-\sigma t}, \quad \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s\| \leq C_2 e^{-\sigma t} \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

если норма $\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_s\|_{H_0^1(\Omega)}$ достаточно мала, а $\rho_0 = \rho_s$.

О МНОГОМЕРНЫХ СПЕКТРАХ ЛАГРАНЖА И ДИРИХЛЕ

Р. К. Ахунжанов *(Астраханский государственный университет, Астрахань)*

Одномерным спектром Лагранжа называется множество

$$\mathbb{L} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists v \in \mathbb{R} : \liminf_{q \to \infty} q||qv|| = \lambda \right\}.$$

Хорошо известно, что дискретная часть спектра Лагранжа содержит последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{221}}, \frac{13}{\sqrt{1517}}, \ldots$$

которая сходится к $\frac{1}{3}$. Также известно, что спектр Лагранжа содержит некоторый отрезок $[0, \lambda^*]$, который называют лучом Холла (Холл первый доказал, что $\lambda^* > 0$).

Определим s-мерный спектр Лагранжа

$$\mathbb{L}_s = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^s : \liminf_{q \to \infty} q^{1/s} \max_{1 \leqslant i \leqslant s} ||qv_i|| = \lambda \right\}.$$

Одномерным спектром Дирихле называется множество

$$\mathbb{D} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists v \in \mathbb{R} : \limsup_{t \to \infty} t \cdot \min_{1 \leqslant q \leqslant t} ||qv|| = \lambda \right\}.$$

Структура одномерного спектра Дирихле изучалась многими математиками. В частности $\mathbb{D} \subset [1/2 + 1/2\sqrt{5}, 1]$ и существует так называемая "дискретная часть спектра". Кроме того известно, что $[d^*, 1] \subset \mathbb{D}$ для некоторого $d^* < 1$.

Определим s-мерный спектр Дирихле в евклидовой норме

$$\mathbb{D}_s = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^s : \limsup_{t\to\infty} t \cdot \min_{1\leqslant q\leqslant t} \left(\sum_{i=1}^{s} ||qv_i||^2 \right)^{s/2} = \lambda \right\}.$$

Т е о р е м а I(2013). *Пусть $0 < t < T$, тогда*

$$\mathbb{L}_s \bigcap \left[t, t(1 + B \cdot t^{1+1/s}) \right] \neq \emptyset,$$

где константы $T > 0$ и $B > 0$ зависят только от размерности s.

Т е о р е м а II(2013).

$$\mathbb{D}_2 = \left[0, \frac{2}{\sqrt{3}} \right].$$

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ, ДИСКРИМИНАНТОВ И РЕЗУЛЬТАНТОВ

В. И. Берник *(Институт математики НАН Беларуси, Минск)*

В 30-ых годах прошлого века К. Малер и Ф. Коксма предложили две классификации действительных и комплексных чисел. В классификации Малера число $\gamma \in \mathbb{R}$ относилось к одному из четырех типов в зависимости от значений целочисленных многочленов $P(x)$ в точке γ. В классификации Коксма во главу угла ставилось значение $|\gamma - \alpha|$, где α — алгебраическое число степени $\deg \alpha = n$ с высотой минимального многочлена $H = H(\alpha)$. В середине 60-ых годов В. Г. Спринджук решил центральную проблему классификации Малера [1]. Он доказал, что для любого

$\epsilon > 0$ мера Лебега множества тех $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H(P)^{-n-\epsilon} \qquad (1)$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $H = H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$, равна нулю. В конце 20-го века задача о разрешимости неравенства вида (1) была доведена до уровня теоремы Хинчина о приближении действительных чисел рациональными числами. Пусть $\Psi(x)$ — монотонно убывающая функция положительного аргумента x, $L_n(\Psi)$ — множество точек x из некоторого интервала I с мерой Лебега μI, для которого неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\Psi(H) \qquad (2)$$

имеет бесконечно много решений в многочленах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда

$$\mu L_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu I, & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

Случай сходимости ряда $\sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H)$ был рассмотрен в [2], а расходимости в [3]. Несколько ранее этих работ в статье [4] А. Бейкер и В. Шмидт ввели понятие регулярной системы и доказали, что действительные алгебраические числа образуют регулярную систему. Это принципиально важный результат, так как недавно Д. Коледа [5] доказал, что алгебраические числа распределены неравномерно.

В последние годы неравенства (1) и (2) изучаются в классах полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P \leq n, H(P) \leq Q\},$$

определенных для достаточно больших натуральных чисел Q. Было установлено, что для "большинства" значений $x \in I$ ни многочлен $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, ни одна из его производных не могут принимать значения сильно отличающиеся от тех, которые получаются при применении принципа Дирихле к неравенствам вида (1) и (2).

Теорема 1. *[6] Обозначим через $B_1(\delta_0, c_0)$ множество точек некоторого интервала I, для которых система неравенств*

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-v_0} < |P(x)| < c_0 Q^{-v_0}, \\ \delta_0 Q^{-v_j} < |P^(j)(x)| < c_0 Q^{-v_j}, \quad 1 \leq j \leq m < n, \\ \delta_0 Q < |P^(j)(x)| < c_0 Q, \quad m+1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

имеет решение в полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, $-1 \leq v_j$, $0 \leq j \leq m$, $v_0 + v_1 + \ldots + v_m = n - m$. Тогда существуют такие величины (δ_0, c_0), что

$$\mu B_1(\delta_0, c_0) > \frac{3}{4} \mu I.$$

На основании теоремы 1 можно за счет выбора величин v_j, $0 \leq j \leq m$ получить информацию о распределении корней α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ в окрестности точки $x \in B_1(\delta_0, c_0)$ и доказать ряд теорем о распределении как самих алгебраических чисел, так и различных функций, определенных на корнях полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$.

Теорема 2. *[10] Существует не менее, чем $c_1(n) Q^{\frac{n+1}{3}}$ полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, для пары (α_1, α_2) корней которых вы-*

полняется неравенство $|\alpha_1 - \alpha_2| < c_2(n)Q^{-\frac{n+1}{3}}$.

Теорема 3. *Обозначим через* $\mathcal{P}_n(Q,u) \in \mathcal{P}_n(Q)$ *множество полиномов, дискриминанты которых удовлетворяют неравенству* $1 \le |D(P)| < Q^{2n-2-2u}$, $0 \le u \le n-1$. *Тогда*

$$\#\mathcal{P}_n(Q,u) > c_3(n)Q^{n+1-\frac{n+2}{n}u}.$$

Аналогичное теореме 3 утверждение выполняется для количества пар полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$ с заданными результантами.

При построении регулярных систем из действительных алгебраичских чисел все зависимости между основными параметрами распределений эффективны, за исключением зависимости от Q и длины интервала,которому принадлежат алгебраические числа. Вид этой зависимости — это гипотеза Я. Бюжо [7]. На основании новых метрических теорем, в которых $\mu I = Q^{-\gamma_1}$, $\gamma_1 > 0$ удалось построить регулярные системы на интервалах I с $\gamma_1 = 1$ и показать, что при $\gamma_1 > 1$ существуют интервалы без алгебраических точек α, $H(\alpha) \le Q$.

В докладе будут проанализированы методы доказательства приведеных теорем и сформулированы гипотезы, решение которых позволит получить новую информацию о распределении алгебраических чисел.

Новые и частично находящиеся в печати результаты по теме доклада были получены автором совместно с Н. В. Будариной, А. Г. Гусаковой и Ф. Гетце.

[1] В. Г. Спринджук , *Проблема Малера в метрической теории чисел,* Минск: Наука и техника, 1967, 184 с.

[2] V. Bernik, “The exact order of approximating zero by values of integer polynomials”, *Acta Arith.,* **53**:1 (1989), 17–28.

[3] V. Beresnevich, “On approximation of real numbers by real algebraic numbers”, *Acta Arith.,* **90**:2 (1999), 97–112.

[4] A. Baker, W. Schmidt, “Diophantine approximation and Hausdorff dimension”, *Proc. London Math. Soc.,* **21**:3 (1970), 1–11.

[5] Д. В. Коледа, “Аб размеркаванні рэчаісных алгебраічных лікау дадзенай ступені”, *Доклады НАН Беларуси,* **56**:3 (2012), 28–33.

[6] V. Beresnevich, “Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation”, *Ann. of Math.,* **175**:1 (2012), 178–235.

[7] Y. Bugeaud, “Approximation by algebraic numbers”, *Cambridge Tracts in Mathematics, 160, CUP,* (2004), xvi + 274 p.

[8] В. И. Берник, Ф. Гетце, “Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах”, *Известия РАН. Сер. мат.,* **79**:1 (2014), 21–42.

[9] V. Beresnevich, V. Bernik, F. Goetze, “The distribution of close conjugate algebraic numbers”, *Compos. Math.,* **146**:5 (2010), 1165–1179.

[10] В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гетце, “Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов”, *Доклады НАН Беларуси,* **54**:2 (2010), 26–27.

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ PSC-МНОГООБРАЗИЙ С ВИРТУАЛЬНО АБЕЛЕВОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ

Д. В. Болотов *(ФТИНТ, Харьков)*

Мы представляем совместный результат с А. Н. Дранишниковым о макроскопической размерности универсального накрытия замкнутого PSC-многообразия (т.е. многообразия, допускающего метрику положительной скалярной кривизны) с виртуально абелевой фундаментальной группой.

Напомним определение макроскопической размерности, данное М. Громовым [1].

Определение. Макроскопическая размерность метрического пространства X не превышает k, или $\dim_{mc} X \leq k$, если существует k-мерный полиэдр P^k и собственное непрерывное отображение $h : X \to P^k$ такое, что $Diam(h^{-1}(p)) \leq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и произвольного $p \in P^k$. Скажем, что $\dim_{mc} X = k$, если k наименьшее из чисел, для которых выполнено $\dim_{mc} X \leq k$.

Теорема. *Предположим, что замкнутое n-мерное PSC-многообразие M имеет виртуально абелеву фундаментальную группу $\pi_1(M)$ ранга $r \neq n$ и неспиновое универсальное накрытие. Тогда $\dim_{mc} \widetilde{M} \leq n - 2$. Это подтверждает гипотезу Громова о макроскопической размерности PSC-многообразий.*

Замечание. Для многообразий со спиновым универсальным накрытием теорема верна без ограничения на r (см. [2], когда M — спиновое, и [3], когда M — неспиновое

[1] M. Gromov, “Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures”, *Functional analysis on the Eve of the 21 st century, V. II (New Brunswick, NJ, 1993),* 1–213, Progr. Math., 132, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1996.

[2] D. Bolotov, A. Dranishnikov, “On Gromov's scalar curvature conjecture”, *Proc. AMS,* **138** (2010), 1517–1524.

[3] A. Dranishnikov, “On Gromov's positive scalar curvature conjecture for virtual duality groups”, *Journal of Topology and Analysis,* **6**:3 (2014), 397–419.

КРАЕВЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МГД ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Р. В. Бризицкий *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, состоящей из двух частей Σ_τ и Σ_ν рассматривается краевая задача для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости:

$$\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f},\ \ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\nu_1 \operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{E} + æ\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_1\mathbf{j},\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = q,\ \mathbf{H}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\nu} = \mathbf{q},\ \ \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = \mathbf{k}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$ — векторы скорости и магнитного поля, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'/\rho_0$, $p = p'/\rho_0$, где $\mathbf{E}'$ — электрическое поле, p' — давление, $\rho_0 = \text{const}$ — плотность жидкости, $æ = \mu/\rho_0$, $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma = æ\nu_m$, ν и ν_m — постоянные коэффициенты кинематической и магнитной вязкости, σ — постоянная электропроводность, μ – постоянная магнитная проницаемость, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\mathbf{j}$ — плотность сторонних токов, $\mathbf{f}$ — объемная плотность внешних сил. Ниже на задачу (1)–(3) при заданных функциях $\mathbf{f}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{q}$ и q будем ссылаться как на задачу 1. Все величины в (1)–(3) являются размерными и записаны в системе СИ.

Доказана глобальная разрешимость задачи 1 при условиях на область Ω и ее границу Σ, не исключающих пересечения замыканий Σ_τ и Σ_ν. Глобальная разрешимость краевой задачи для уравнений (1), (2) при однородных условиях (3) доказана в [1].

Для задачи 1 исследованы задачи управления, когда роль управления играет функция $q \in L^2(\Sigma_\tau)$.

[1] G. Alekseev, R. Brizitskii, "Solvability of the boundary value problem for stationary magnetohydrodynamic equations under mixed boundary conditions for the magnetic field", *Applied Mathematics Letters,* **32** (2014), 13–18.

КРАЕВЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ – РЕАКЦИИ

Р. В. Бризицкий *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*, **Ж. Ю. Сарицкая** *(ДВФУ, Владивосток)*

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ, рассматривается краевая задача

$$-\lambda\Delta\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{1}$$

Здесь функция φ имеет смысл концентрации загрязняющего вещества, $\mathbf{u}$ — заданный вектор скорости, f — объемная плотность внешних источников вещества, λ — постоянный коэффициент диффузии, функция $k = k(\varphi)$ имеет смысл коэффициента реакции.

При достаточно общем виде нелинейной зависимости $k(\varphi)$ доказана глобальная разрешимость краевой задачи (1) и локальная единственность ее решения. При доказательств использовались методы [1]. Для задачи (1) доказана разрешимость задач управления, когда роль управления играет плотность источников f. Отметим, что при частных случаях функции k, например,

$k = \varphi^2$ и $k = \varphi^4$ имеет место нелокальная единственность решения задачи (1).

Для функции $k = \varphi^2$ выведена система оптимальности и доказана локальная единственность решения задачи управления для определенного функционала качества.

[1] Г. В. Алексеев, *Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики,* Научный мир: Москва, 2010.

ГЛОБАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМА ЦЕПНОЙ ДРОБИ

А. Д. Брюно *(Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва)*,
А. А. Соколов *(Имперский колледж, Лондон)*

Пусть в n-мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы l линейных и k квадратичных форм ($n = l + 2k$). Модули этих форм задают отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в положительный ортант $\mathbf{S} = \mathbb{R}^m_+$ m-мерного вещественного пространства $\mathbb{R}^m$, $m = l + k \geqslant 2$. При этом целочисленная решчтка $\mathbb{Z}^n$ в $\mathbb{R}^n$ отображается в некоторое множество $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{S}$. Замыкание выпуклой оболочки $\mathbf{H}$ множества $\mathbf{Z}\backslash 0$ является многогранным множеством. Целочисленные точки из $\mathbb{R}^n$, отображающиеся на границу $\partial\mathbf{H}$ многогранника $\mathbf{H}$, дают наилучшие диофантовы приближения к совокупности корневых подпространств m заданных форм. В алгебраическом случае, когда заданные формы определчнным образом связаны с корнями многочлена степени n, доказывается, что многогранник $\mathbf{H}$ имеет $m - 1$ независимый период. Это обобщение теоремы Лагранжа о периодичности цепной дроби квадратичной иррациональности. По теореме Дирихле соответствующее поле алгебраических чисел имеет ровно $m-1$ фундаментальных единиц. Граница $\partial\mathbf{H}$ многогранника $\mathbf{H}$ вычисляется стандартной программой вычисления выпуклых оболочек. Будут примеры таких вычислений для разных l и k. При $l=2$ и $k=0$ получаются обычные цепные дроби.

[1] А. Д. Брюно, “Обобщения цепной дроби”, *Чебышевский сборник,* **7**:3(19) (2006), 4–71.

ТОРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ ФУЛЛЕРЕНОВ

В. М. Бухштабер *(МИАН имени В.А. Стеклова, Москва)*,
Н. Ю. Ероховец *(МГУ имени М.В. Ломоносва, Москва)*

В торической топологии каждому простому выпуклому n-мерному многограннику P с m гипергранями $F_1,\dots,F_m$ канонически сопоставляется $(m+n)$-мерное *момент-угол многообразие* $\mathcal{Z}_P$ с действием тора $(S^1)^m$. Это позволяет изучать комбинаторику многогранников при помощи алгебраической топологии момент-угол многообразий и наоборот.

$R^*(P)=\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/(u_iv_i,v_j^2,v_{i_1}\dots v_{i_k}\colon\ F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_k}=\varnothing)$, $\mathrm{mdeg}u_i=(-1,2\{i\})$, $\mathrm{mdeg}v_i=(0,2\{i\})$, $du_i=v_i$, $dv_i=0$.

Теорема. [1] Имеем изоморфизм колец $H[R^*(P)]\simeq H^*(\mathcal{Z}_P,\mathbb{Z})$.

Этот изоморфизм задаёт мультиградуированную структуру в кольце $H^*(\mathcal{Z}_P)$. Положим $\beta^{-i,2j}=\sum_{\omega\subset[m],|\omega|=j}\beta^{-i,2\omega}$.

Фуллереном называется простой выпуклый трёхмерный многогранник, у которого все грани являются пятиугольниками и шестиугольниками (см. [3]). *k-поясом* называется циклическая последовательность двумерных граней $(F_{i_1},\dots,F_{i_k})$, в которой поднабор граней пересекается тогда и только тогда, когда он состоит из двух соседних граней.

Теорема 1. [2] У фуллерена нет 3-поясов.

Теорема 2. У фуллерена нет 4-поясов.

Теорема 3. Фуллерен P имеет $12+k$ пять-поясов: 12 поясов вокруг пятиугольных граней и k поясов из шестиугольников, граничащих с соседними по противоположным сторонам. Если $k>0$, то P состоит из k последовательных поясов шестиугольников и двух «додекаэдрических шапок».

Следствие. Для фуллерена P имеем $\beta^{-1,6}=\beta^{-2,8}=0$, $\beta^{-3,10}=12+k$, причём если $k>0$, то фуллерен имеет вид, описанный в теореме 3. Умножение $H^3(\mathcal{Z}_P)\otimes H^3(\mathcal{Z}_P)\to H^6(\mathcal{Z}_P)$ тривиально.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ МК-600.2014.1 и РФФИ 14-01-00537-а и 14-01-31398-мол-а.

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, “Toric Topology”, *AMS Math Surveys and Monographs,* **204** (2015), 518 p.

[2] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, “Усечения простых многогранников и приложения”, *Труды МИАН им. В.А.Стеклова,* **289** (2015), 115–144 .

[3] М. Деза, М. Дютур Сикирич, М. И. Штогрин, “Фуллерены и диск-фуллерены”, *УМН,* **68**:4(412) (2013), 69–128.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

В. А. Вербицкий *(ХГАЭП, Хабаровск)*

Пусть

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = essup|f(x)|$$

норма функции f в лебеговом пространстве функций L_p. Обозначим через $F(f)$ преобразование Фурье функци f из L_1 следующим образом

$$F(f)(x) = \left(\int\limits_{\infty}^{\infty} |f(y)|e^{2\pi ixy} dy\right),$$

где i — мнимая единица. Говорят, что функция $m(x)$ является мультипликатором интеграла Фурье L_p, если оператор T_m определенный равенством

$$F(T_m f)(x) = m(x)F(f)(x),$$

для функции f из $L_1 \cap L_p$ является ограниченным отображением из L_p в L_p.

В работе рассматривается класс функций

$$m(x, \alpha, \beta) = \frac{sin(|x|^\alpha)}{|x|^\beta}\varphi(x),$$

где α, β — вещественные числа, а $\varphi(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(x) = 1$, если $|x| < 1$, и $\varphi(x) = 0$, если $|x| > 2$. Для каждой пары значений α, β указан нтервал $I = (p_0, p_1)$ такой, что для всех p из I функция $m(x, \alpha, \beta)$ является мультипликатором интеграла Фурье L_p.

Аналогичные результаты получены для класса функций

$$M(x, \alpha, \beta) = \frac{sin(|x|^\alpha)}{|x|^\beta}(1 - \varphi(x)).$$

ГРАНИЧНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Г. В. Гренкин *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*,
А. Ю. Чеботарев *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*

Рассматривается задача мультипликативного граничного управления для полустационарной модели сложного теплообмена, в которой используется P_1 приближение для уравнения переноса излучения:

$$\partial\theta/\partial t - a\Delta\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \tag{1}$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \;\; t \in (0, T), \tag{2}$$

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)\big|_\Gamma = 0, \; \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4)\big|_\Gamma = 0, \; \theta\big|_{t=0} = \theta_0. \tag{3}$$

Функция $u(x)$, $x \in \Gamma$, играет роль управления. Требуется минимизировать функционал качества

$$J(\theta, \varphi) = J_1(\theta, \varphi) + J_2(\theta|_{t=T}) \to \inf \tag{4}$$

при ограничениях на управление $u_1(x) \le u(x) \le u_2(x)$. Здесь J_1, J_2 — ограниченные снизу, слабо полунепрерывные снизу и дифференцируемые в соответствующих пространствах функционалы.

Задача (1)–(3) однозначно разрешима, при этом решение ограничено. Доказана разрешимость задачи управления (4). Необходимые условия оптимальности выводятся без явного использования принципа Лагранжа. Для оптимального управления выполняется принцип bang-bang, т.е. оптимальное управление принимает либо минимальное, либо максимальное значение:

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} u_1(x), & \psi(x) < 0 \\ u_2(x), & \psi(x) > 0, \end{cases} \qquad \psi(x) = \int\limits_0^T (\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 dt, \quad x \in \Gamma.$$

Здесь $p_2(x,t)$ — сопряженное состояние.

Для нахождения оптимального управления предложен численный алгоритм, который является вариантом градиентного метода и обобщает метод простой итерации. Решение ищется в виде bang-bang управления. Следующее приближение пересчитывается не более чем в k узлах, при этом выбираются узлы с максимальным модулем градиента приведенного функционала качества $\widehat{J}(u) = J(\theta(u), \varphi(u))$. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

РАВЕНСТВО ЕМКОСТИ И МОДУЛЯ ОБОБЩЕННОГО ПОЛИКОНДЕНСАТОРА

И. Н. Демшин *(ДВФУ, Владивосток)*,
В. А. Шлык *(ДВФУ, Владивосток)*

В задачах теории плоских конформных и квазиконформных отображений наиболее эффективным оказалось использование конформного модуля набора семейств кривых, соединяющих соответствующие наборы пластин поликонденсатора [2, 4]. В. В. Асеев и Б. Ю. Султанов [1] нашли теоретико-функциональное выражение этого модуля поликонденсатора через емкость данного поликонденсатора. Этот результат Ю. В. Дымченко и В. А. Шлык [3] распространили на весовые модуль и емкость поликонденсатора.

В данной работе вводится конформный модуль набора семейств кривых, как соединяющих, так и разделяющих соответствующие наборы пластин плоского поликонденсатора.

Затем, модифицируя приемы из [3] применительно к семейству кривых, разделяющих пластины поликонденсатора, устанавливаем равенство модуля поликонденсатора и его емкости в нашем случае.

[1] В. В. Асеев, Б. Ю. Султанов, *Модули поликонденсаторов и изоморфизмы пространств следов непрерывных фунций класса* W_n^1, Новосибирск, 1989, препринт №31 /АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.

[2] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения,* М.: ИЛ, 1962, 268 с.

[3] Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, “Некоторые свойства емкости и модуля поликонденсатора и устранимые множества”, *Аналитическая теория чисел и теория функций. 26. (Зап. научн. семин. ПОМИ),* **392** (2011), 84–94.

[4] Г. В. Кузьмина, “Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы”, *Тр. Института математики АН СССР. Ленинградское отделение.,* **139** (1980), 1–216.

ПРИВЕДЕННЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЧИСТО ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Н. М. Добровольский *(ТГПУ им. Л. Н. Толстого, Тула)*,
Н. Н. Добровольский *(МБОУ СОШ №56, г. Тула)*

В работе изучается вид и свойства минимальных многочленов остаточных дробей в разложении алгебраических чисел в цепные дроби.

Показано, что для чисто-вещественных алгебраических иррациональностей α степени $n \geq 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью приведённых алгебраических иррациональностей.

Дано определение обобщенного числа Пизо, которое отличается от определения чисел Пизо отсутствием требования целочисленности.

Показано, что для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени $n \geq 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью обобщенных чисел Пизо.

Найдена асимптотическая формула для сопряженных чисел к остаточным дробям обобщчнных чисел Пизо. Из этой формулы вытекает, что сопряженные к остаточной дроби α_m концентрируются около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ либо в интервале радиуса $O\left(\frac{1}{Q_{m-1}^2}\right)$ в случае чисто-вещественной алгебраической иррациональности, либо в круге такого же радиуса в общем случае вещественной алгебраической иррациональности, имеющей комплексные сопряженные числа.

Установлено, что, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, справедлива рекуррентная формула для неполных частных

q_m разложения вещественной алгебраической иррациональности α, выражающая q_m через значения минимального многочлена $f_{m-1}(x)$ для остаточной дроби α_{m-1} и его производной в точке q_{m-1}.

Найдены рекуррентные формулы для нахождения минимальных многочленов остаточных дробей с помощью дробно-рациональных преобразований.

[1] Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, “О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей”, *Чебышевский сборник,* **16**:3 (2015), (в печати).

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕКРЕСТНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Я. К. Дорофеев *(ТОГУ, Хабаровск)*

Для моделирования процессов на контакте блоков горных пород используется система уравнений в частных производных с линейной кросс-диффузией:

$$\partial u/\partial t = u(u-a)(1-u) - v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$
$$\partial v/\partial t = \varepsilon(u-v) - D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$D_u \geq 0, \quad D_v \geq 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad a < 0,5,$$

где u, v — соответственно, скорость смещения блока и скорость волны деформации; D_u, D_v — коэффициенты диффузии; a, ε — численные параметры [1], [2]. С помощью данной модели предлагается смоделировать распространение волн упругой деформации при землетрясении. Проведены численные эксперименты по системе уравнений для $x \in [0, L]$, где размер среды L варьировался для разных экспериментов. На границах среды выполнялись условия:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0,L} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0,L} = 0.$$

Начальные условия выбирались двух видов:

$$u(x,0) = \Theta(\delta - x), v(x,0) = 0$$

для запуска одной волны (на левом конце); и

$$u(x,0) = \Theta(\delta - x) + \Theta(x - (L - \delta)), v(x,0) = 0$$

для запуска двух волн с обоих концов, где Θ — функция Хевисайда, а $\delta = 2$.

Проведены численные расчеты с использованием неявных разностных схем и стандартной конечно-разностной аппроксимацией. Для граничных условий использовался метод фиктивных узлов. По результатам численного расчета получены графики фронта распространения волны при различных значениях параметра источника возмущения и времени. Установлена погрешность аппроксимации. При расчетах неустойчивость счета не наблюдалась.

[1] R. Burridge, L. Knopoff, “Model and theoretical seismicity”, *Bull. Seismol. Soc. Am.,* **57** (1967), 341–371.

[2] J. H. E. Cartwright, E. Hernandez-Carcia, O. Piro, “Burridge-Knopoff Models as Elastic Excitable Media”, *Physical Review Letters,* **79**:3 (1997), 527–530.

НОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРУГОВОЙ СИММЕТРИЗАЦИИ В ТЕОРИИ МНОГОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Н. Дубинин *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

В работах [1]–[2] дано определение круговой симметризации конденсаторов на римановых поверхностях, изучены свойства симметризации и даны некоторые приложения в геометрической теории функций. В данном сообщении приводятся новые приложения этой симметризации для мероморфных в круге функций [3] и для комплексных полиномов [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант №14-11-00022).

[1] В. Н. Дубинин, "Новая версия круговой симметризации с приложениями к p-листным функциям", *Матем. сб.,* **203**:7 (2012), 79–94.

[2] В. Н. Дубинин, "Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях", *Матем. сб.,* **206**:1 (2015), 69–96.

[3] В. Н. Дубинин, "Неравенства для модулей функций, p-листных в среднем по окружности", *Зап. научн. сем. ПОМИ.,* **429** (2014), 44–54.

[4] В. Н. Дубинин, "Об одной экстремальной задаче для комплексных полиномов с ограничениями на их критические значения", *Сиб. матем. журн.,* **55**:1 (2014), 79–89.

РАВЕНСТВО ЕМКОСТИ И МОДУЛЯ В СУБФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ю. В. Дымченко *(ДВФУ, Владивосток)*

Равенство емкости и модуля конденсатора имеет важное значение в геометрической теории функций. Оно позволяет связать теоретико-функциональные и геометрические свойства множеств. В случае евклидовой метрики равенство емкости и модуля в самых общих предположениях было доказано В. А. Шлыком [1]. В случае римановой метрики равенство было доказано в [2].

Финслеровы пространства были введены как обобщение римановых многообразий на случай, когда метрика зависит не только от координат, но и от направления. Равенство емкости и модуля конденсатора в финслеровых пространствах в самых общих предположениях было установлено в работе [3].

Пространства Карно-Каратеодори и субфинслеровы пространства отличаются от римановых и финслеровых пространств соответственно ограничением класса допустимых путей. Равенство чмкости и модуля конденсатора было установлено И. Г. Маркиной в работе [4].

В данной работе доказано равенство емкости и модуля конденсатора в субфинслеровых пространствах.

[1] В. А. Шлык, “О равенстве p-емкости и p-модуля”, *Сиб. мат. журн.*, **34**:6 (1993), 216–221 .

[2] Ю. В. Дымченко, “Равенство емкости и модуля конденсатора на поверхности”, *Аналитическая теория чисел и теория функций. 17 (Зап. научн. семин. ПОМИ),* СПб.: Наука, **276** (2001), 112–133.

[3] Ю. В. Дымченко, “Равенство емкости и модуля конденсатора в финслеровых пространствах”, *Матем. заметки,* **85**:4 (2009), 594–602.

[4] I. Markina, “On coincidence of p-module of a family of curves and p-capacity on the Carnot group”, *Rev. Mat. Iberoamericana,* **19**:1 (2003), 143–160.

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕЩИНОЙ

А. В. Жильцов *(ДВГУПС, Хабаровск)*,
Р. В. Намм *(ВЦ ДВО РАН, Хабаровск)*

Рассматривается задача о равновесии мембраны, содержащей разрез, на берегах которого заданы нелинейные краевые условия. В задаче полагается, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, а $\gamma \subset \Omega$ — это трещина внутри Ω, $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \overline{\gamma}$. В области Ω_γ требуется найти функцию u, такую, что:

$$-\triangle u = f \text{ в } \Omega_\gamma, \qquad u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{1}$$
$$[u] \geqslant 0, \quad [u_{x_2}] = 0, \quad u_{x_2} \leqslant 0, \quad u_{x_2}[u] = 0 \text{ на } \gamma.$$

Здесь $f \in L^2(\Omega)$ — заданная функция, описывающая давление на область; $u_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$ — производная по нормали к трещине; $[u] = u^+ - u^-$ — скачок функции u на γ.

Задача (1) записывается в виде задачи минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla v|^2 dx - \int\limits_{\Omega_\gamma} f v dx \to \min_{v \in K}, \tag{2}$$

$$K = \{v \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)\colon [v] \geqslant 0 \text{ п. в. на } \gamma\}.$$

Доказывается выпуклость и полунепрерывность снизу функционала чувствительности. На основе доказанного свойства строится двойственный метод решения модельной задачи.

[1] А. М. Хлуднев, *Задачи теории упругости в негладких областях,* М.: Физматлит, 2010.

[2] К. Гроссман, А. А. Каплан, *Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации,* Новосибирск: Наука, 1981.

[3] Э.М. Вихтенко, Г. Ву, Р.В. Намм, “О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.,* **50**:8 (2010), 1357–1366.

РЕШЕТКИ КОНГРУЭНЦИЙ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛИГОНОВ НАД МОНОИДОМ $(\mathcal{N}; max)$

М. С. Казак *(ДВФУ, Владивосток)*

Структура любой алгебры частично определяется строением решетки конгруэнций этой алгебры. В работе [1] описаны несвязные полигоны, решетки конгруэнций которых модулярны и дистрибутивны. В данной работе рассмотрены полигоны над моноидом $(\mathcal{N}; max)$ с линейной решеткой конгруэнций, где $\mathcal{N}$ — множество натуральных чисел.

Напомним некоторые определения из универсальной алгебры, которые можно найти в [2, 3].

Пусть S — моноид. Левым S-*полигоном* (или, просто, *полигоном*) $_SA$ называется множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Полигон $_SA$ называется циклическим, если существует $a \in A$ такой, что $A = Sa$.

Конгруэнцией θ полигона ${}_SA$ называется отношение эквивалентности на множестве A такое, что

$$\langle a, b\rangle \in \theta \Rightarrow \langle sa, sb\rangle \in \theta$$

для любых $a, b \in A, s \in S$.

Заметим, что совокупность всех конгруэнций полигона ${}_SA$ образует решетку относительно следующих операций:

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2,$$

$$\theta_1 \vee \theta_2 \text{ — наименьшая конгруэнция, содержащая } \theta_1 \cup \theta_2,$$

где θ_1, θ_2 — конгруэнции полигона ${}_SA$. Эту решетку будем обозначать $Con({}_SA)$.

Теорема. Если ${}_{\mathcal{N}}A$ — циклический полигон, то решетка $Con({}_{\mathcal{N}}A)$ конгруэнций полигона ${}_{\mathcal{N}}A$ дистрибутивна.

[1] Д. О. Птахов, А. А. Степанова, “Решетки конгруэнций несвязных полигонов”, *Дальневосточный математический журнал,* **13**:1 (2013), 107–116.

[2] M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev, *Acts and Categories,* Berlin: Walter de Gruyet, 2000.

[3] Л. А. Скорняков, *Элементы общей алгебры,* М.: Изд-во Наука, 1983.

СВОЙСТВА СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ЗАДАННОЙ ГЕНЕТИЧЕСКИМ КОДОМ

В. А. Казинец *(ГОУ ВПО ДВГГУ, Хабаровск)*

Обозначим через S_n симметрическую группу на множестве $M = \{0, 1, \cdots, n-1\}$. В работе [1] был представлен генетический код группы S_n.

Т е о р е м а 1. *Пусть $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ образующие элементы свободной группы G, тогда соотношения*

$$x_i^{i+1} = e,$$
$$x_i x_k = x_1 x_{k+1} x_i, \quad i > k,$$

e — единичный элемент группы G. Образуют генетический код группы S_n.

Данные соотношения позволяют доказать теорему о представлении элементов группы S_n через образующие x_i.

Т е о р е м а 2. *Любой элемент группы S_n однозначно представим в виде $g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, где $0 \leq \alpha_i \leq i$.*

Рассмотрим перестановку множества M, заданную стандартным образом

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \end{pmatrix},$$

и установим её связь с представлением элементов группы в виде одночлена.

Лемма 1. Имеет место равенство

$$\gamma_i = (\cdots((i + i\alpha_i)_{i+1} + (i+1)\alpha_{i+1})_{i+2} + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1})_n,$$

где $(m)_k$ — остаток от целочисленного деления m на k.

Данные леммы позволяют наложением условий на α_i выделять подгруппы симметрической группы. Например в следующей теореме.

Т е о р е м а 3. *Элемент $g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ принадлежит* *подгруппе* A_n *четных подстановок тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{n-1} i\alpha_i \equiv 0 \; mod \; 2.$$

[1] В. А. Казинец, “Копредставление симметрической группы”, *Дальневосточная школа-семинар им. ак. Е.В.Золотова: тез. Докл.,* Хабаровск: ТОГУ (2009), 33–35 .

[2] Г. С. М. Коксетер, У. О. Дж. Мозер, *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп,* Москва: Наука, 1980, 240 с.

УПРАВЛЯЕМАЯ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 1 ВРАЩАТЕЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ В МУТНОЙ СРЕДЕ

Е. В. Карачанская *(ТОГУ, Хабаровск)*

Известно [1, 2], что вращательная диффузия частицы в трехмерном пространстве может быть описана с помощью уравнения типа Ланжевена, которое можно привести к виду стохастического линейного дифференциального уравнения Ито вида

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\,\mathbf{v}(t)\,dt + a(t)\sum_{k=1}^{3} B_k\mathbf{v}(t)d\mathbf{w}(t),$$

где $\mathbf{v}(t)$ — скорость, $\mathbf{w}(t)$ — трехмерный винеровский процесс, функции $\mu(t) > 0$ и $a(t)$ — непрерывны, матрицы B_k, $k = 1, 2, 3$ составляют группу поворотов. Случайная скорость $\mathbf{v}(t) = \big(v_1(t), v_2(t), v_3(t)\big)$ при этом обладает является решением ОДУ [1]:

$$d|\mathbf{v}(t)|^2 = h\big(t, |\mathbf{v}(t)|\big)\,dt,$$

где $h\big(t, |\mathbf{v}(t)|\big)$ — некоторая неслучайная функция.

Двигаясь в мутной (случайной) среде, частица сталкивается со случайными препятствиями, вследствие чего ее скорость может существенно меняться. Если необходимо, чтобы модуль скорости все же оставался постоянным, можно ввести управление $u(t, \mathbf{v}(t))$:

$$d\mathbf{v}(t) = \big(-\mu(t)\,\mathbf{v}(t) + \alpha(t)u(t, \mathbf{v}(t))\big)dt + \sum_{k=1}^{3} \widetilde{B}_k(t, \mathbf{v}(t))d\mathbf{w}(t),$$

которое позволит выполнить это требование, представленное в виде $v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t) = C, \quad C > 0,$ с вероятностью 1 [3].

[1] В. А. Дубко , *Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений : препринт,* Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978, 22 с.

[2] Е. В. Карачанская, *Случайные процессы с инвариантами,* Хабаровск: Из-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2014, 148 с.

[3] Е. В. Карачанская, “Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями”, *Вестник Тихоокеанского государственного университета,* **2 (21)** (2011), 51–60.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СЛОЕ

А. Е. Ковтанюк *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*,
В. В. Пестрецова *(ДВФУ, Владивосток)*,
А. Ю. Чеботарев *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*

Моделирование радиационно-кондуктивного теплообмена является важным для многих инженерных задач. Обычно этот процесс описывается нелинейной системой двух дифференциальных уравнений: уравнения переноса теплового излучения и уравнения теплопроводности [1–3]. Задача характеризуется анизотропным рассеянием среды и зеркальным и диффузным отражением границ. Используется диффузионное приближение (так называемое P_1 приближение) для упрощения модели сложного теплообмена. Это приближение дает хорошее описание температурных полей в вычислительно сложных случаях высоких температур и может успешно применяться для различных задач теплообмена, в которых не требуется высокая точность. Целью данной работы является доказательство однозначной разрешимости краевой задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в рассеивающем слое с отражающими границами. Предлагаемый подход связан с нахождением неподвижной точки нелинейного оператора решения краевой задачи. На основании свойства монотонности оператора решения обосновывается сходимость итерационного алгоритма. Проведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие эффективность предложенного алгоритма.

[1] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem”, *J. Math. Anal. Appl.,* **409** (2014), 808–815.

[2] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, “An iterative method for solving a complex heat transfer problem”, *Applied Math. Comput.,* **219** (2013), 9356–9362.

[3] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Solvability of P1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem”, *Applied Math. and Comput.,* **249** (2014), 247–252.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МАСКИРОВКИ НА ОСНОВЕ ВОЛНОВОГО ОБТЕКАНИЯ

А. В. Лобанов *(ИПМ ДВО РАН, Дальрыбвтуз, Владивосток)*,
О. Е. Дьяконова *(ДВФУ, Владивосток)*

Начиная с 2006 г., значительное внимание уделяется дизайну устройств, служащих для маскировки материальных тел [1]. Нужно отметить, что решения задач маскировки обладают рядом недостатков. Основным недостатком является трудность технической реализации полученных решений. Чтобы упростить проблему технической реализации полученных решений, в работе предлагается заменить задачу построения точной маскировочной оболочки приближенной задачей построения слабо рассеивающей оболочки.

В работе рассматривается задача маскировки для модели акустического рассеяния, описываемой 2D уравнением Гельмгольца. Доказывается ее разрешимость и выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума. На основе ее анализа развивается численный алгоритм. Указанный алгоритм применяется для численного моделирования маскировочных свойств оболочки, заполненной специальной средой (так называемым PEMC-материалом, который является обобщением PEM и PEC материалов). Целью моделирования является нахождение набора постоянных параметров среды. Указанные параметры подбираются путем решения задачи минимизации интегральной нормы поля [2], рассеянного искомой маскировочной оболочкой при падении на нее плоской волны. Исследуется зависимость решения от параметра полной проводимости (адмиттанс) M, размеров оболочки, частоты падающей волны и ряда других параметров, входящих в рассматриваемую задачу. В заключение обсуждаются результаты проведенных вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00079).

[1] J. Pendry, D. Shurig, D. Smith, "Smith D. Controlling electromagnetic fields", *Science,* **312** (2006), 1780–1782.

[2] G. V. Alekseev, "Cloaking via impedance boundary condition for the 2-D Helmholtz equation", *Appl. Anal.,* **93** (2014), 254–268.

ОЦЕНКИ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЕЛ ОПЕРАТОРА ХАРДИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Е. Н. Ломакина *(ХГАЭП, Хабаровск)*

Поведение аппроксимативных чисел оператора Харди, действующего в весовых пространствах Лебега, изучено достаточно подробно и получено много обощений, но исследований для данного оператора в классе других пространств почти не проводилось. В работах Е. Н. Ломакиной и В. Д. Степанова [1], [2] рассмотрены ограниченность, компактность, мера некомпактности и оценки аппроксимативных чисел в пространствах Лоренца, когда оператор $T : L_v^{rs}(R^+) \to L_u^{pq}(R^+)$ действует при условии $1 < \max(r, s) \leq \min(p, q) < \infty$, и далее, уже в более общих банаховых функциональных пространствах удовлетворяющие $\ell-$ условию.

В данных исследованиях получены двусторонние оценки поведения аппроксимативных чисел оператора Харди и оценки норм

Шаттена – Неймана в новом случае, когда компактный оператор

$$Tf(x) = \int\limits_0^x f(\tau)\,d\tau,$$

действует из пространство Лебега в пространство Лоренца $T : L^r_v(R^+) \to L^{pq}_\omega(R^+)$, в области $1 < p < r \le q < \infty$. Установлена эквивалентность нормы Шаттена – Неймана оператора $T : L^r_v(R^+) \to L^{pr}_\omega(R^+)$, $1 < p < r < \infty,\ \ 1 < s < \infty$ интегральному выражению, зависящему от весовых функций оператора

$$\left(\sum_n a_n^s(T)\right)^{1/s} \approx \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^x v^{1-r'}(t)\,dt\right)^{s/r'} \left(\int\limits_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1} \omega(x)\,dx\right)^{1/s}.$$

[1] E. Lomakina, V. Stepanov, “On the compactness and approximation numbers of Hardy type integral operators in Lorentz spases”, *J. London Math. Soc.,* **53**:2 (1996), 360–382.

[2] E. Lomakina and V. Stepanov, “On the Hardy-type integral operators in Banach function spaces”, *Public. Matem. Universsitat Autonoma de Barselona,* **42** (1998), 165–194.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Д. В. Машков *(Дальрыбвтуз, Владивосток)*

В последние годы большое внимание было уделено разработке и исследованию новых классов задач для моделей тепло- и массопереноса. В этой работе мы рассмотрим задачу идентификации коэффициентов в дифференциальном уравнений для модели теплопереноса с использованием дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Изучение этой задачи может быть сведено к изучению соответствующей задачи экстремума для некоторого функционала качества [1–3].

Целью работы является создание эффективного численного алгоритма решения коэффициентных обратных экстремальных задач и численный анализ оптимальных решений. Рассматривается модель тепло–переноса в ограниченной области с липшицевой границей. Исследуемая краевая задача для модели теплопереноса содержит ряд параметров, которые должны быть заданы для обеспечения единственности решения. На практике могут возникать ситуации, когда некоторые из параметров неизвестны, и их требуется определить из измерения температуры в некоторой подобласти. Для данной задачи идентификации мы применяем метод оптимизации и сводим решение к соответствующей экстремальной задаче (см [3]). Используя математический аппарат из [3], в работе выводится система оптимальности. Эта система имеет смысл необходимого условия экстремума первого порядка. Она состоит из прямой задачи, сопряженной задачи и вариационного неравенства в виде принципа минимума. Основываясь на системе оптимальности и методе Ньютона, в работе разрабатывается алгоритм численного решения задач идентификации, исследуется сходимость и проводятся численные эксперименты. Эксперименты показали эффективность алгоритма и методов распараллеливания для решения задач идентификации.

[1] Г. И. Марчук, *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды,* Наука, Москва, 1982.

[2] А. А. Самарский, П. Н. Вабишевич, *Численные методы реше-*

ния обратных задач математической физики, Едиториал УРСС, Москва, 2004.

[3] Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко, *Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости,* Дальнаука, Владивосток, 2008.

КОПРЕДСТВЛЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ И ИНВЕРСИИ

В. В. Мендель *(ГОУ ВПО ДВГГУ, Хабаровск)*

Симметрические группы (группы всевозможных перестановок элементов) являются важнейшим видом групп, так как любая конечная группа представима в виде подгруппы подходящей симметрической. Существует множество способов представления этих групп, одним из которых является представление с помощью порождающих элементов и определяющих соотношений. В данной работе рассматривается один из способов реализации такого подхода. А именно следующее копредставление симметрической группы порядка n [1]

$$x_i^{i+1} = e,\ i = \overline{1,\ n-1},$$
$$x_k x_i = x_1 x_{i+1} x_k,\ k > i,$$

здесь $x_i = e_1 e_2 \dots e_i$, а e_i транспозиция соседних элементов $i-1$ и i.

В работе исследуется групповая операция в выбранных терминах и его свойства. В процессе изучения свойств умножения выявлена связь между представлением элемента симметрической группы и его таблицей инверсий.

Теорема. Если элемент симметрической группы порядка n задан в виде одночлена $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, то его таблица инверсий имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix},$$

где $b_i = \sum\limits_{j=n-1}^{i} \alpha_j mod(j+1)$, при $i = \overline{1,\, n-1}$, $b_0 = 0$, то есть $b_{n-1} = \alpha_{n-1}$, $b_{n-2} = (b_{n-1} + \alpha_{n-2}) mod\, n, \cdots$, $b_1 = (b_2 + \alpha_1) mod\, 2$. На основе этой связи описан способ перемножения элементов в терминах таблиц инверсий. Это позволяет расширить математический аппарат и одновременно исследовать свойства симметрической группы, как с помощью выбранного копредставления, так и с помощью таблиц инверсий не прибегая к сложным вычислениям для перехода.

[1] В. А. Казинец, "Копредставление симметрической группы", *Дальневосточная школа-семинар им. ак. Е. В. Золотова: тез. Докл.,* Хабаровск: ТОГУ (2009), 33–35.

[2] Г. С. М. Коксетер, У. О. Дж. Мозер, *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп,* Москва: Наука, 1980, 240 с.

[3] В. В. Мендель, "Умножение в симметрической группе в терминах порождающий и соотношений", *Сборник статей аспирантов и студентов ДВГГУ,* (2012), 297–303.

О НЕКОТОРЫХ НЕРЕШЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Н. Г. Мощевитин *(МГУ имени М.В. Ломоносва, Москва)*

Мы обсудим несколько вопросов, касающихся некоторых нерешенных задач, в-основном связанных с совместными диофантовыми приближениями.

Итак, пусть $\alpha_1, ..., \alpha_n$ суть вещественные числа, линейно независимые вместе с единицей над $\mathbb{Z}$. Практически вся информация о совместных диофантовых приближениях к этим числам содержится в функции Ярника

$$\psi(t) = \min_{q \le t, q \in \mathbb{Z}} \max_{1 \le j \le n} ||q\alpha_j||$$

(здесь через $||\cdot||$ обозначено расстояние до ближайшего целого).

В частности, мы затронем следующие задачи.

• *Вычисление и оценка диофантовых констант.* Известная теорема Гурвица утверждает, что при $n = 1$ для любого $\alpha_1 = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ выполнено $\liminf_{t\to\infty} t\psi(t) \le 1/\sqrt{5}$ и что константа $1/\sqrt{5}$ точна. Каковы многомерные аналоги этого результата?

• *Спектры Лагранжа, Дирихле, Минковского и их многомерные обобщения.* Мы обсудим классические и новые задачи, связанные с дискретными частями спектров $\mathbb{L}, \mathbb{D}, \mathbb{M}$ и "лучами Холла".

• *Показатели роста наилучших диофантовых приближений.* Теорема Хинчина-Леви гласит, что для почти всех $\alpha_1 = \alpha$ знаменатели подходящих дробей удовлетворяют асимптотическому равенству $q_n^{1/n} \sim \pi^2/12 \log 2, n \to \infty$. С другой стороны, ясно, что всегда $q_n \ge \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$. Мы обсудим многомерные аналоги этих утверждений.

• *Неравенства между диофантовыми экспонентами.* Задачи о соотношениях между показателями

$$\omega = \sup\{\gamma : \liminf_{t\to\infty} t^\gamma \psi(t) < \infty\},$$

$$\hat{\omega} = \sup\{\gamma : \limsup_{t\to\infty} t^\gamma \psi(t) < \infty\},$$

рассмотренные в 30-50х годах прошлого века В. Ярником, в последнее десятилетие оказались очень популярными. Параметрическая геометрия чисел Шмидта-Зуммерера и теория Руа дали новый подход к старым проблемам. В завершении выступления докладчик сделает попытку изложить некоторое осмысление этой теории и соответствующих результатов.

ТЕОРЕМА ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. А. Павлов *(ДВФУ, Владивосток)*

Пусть функция f голоморфна в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| < 1$ при $z \in U$. Точка z, $|z| = 1$, называется неподвижной граничной точкой функции f, если существует угловой предел $\angle \lim\limits_{\zeta \to z} f(\zeta) = z$. По лемме Жюлиа – Вольфа существование углового предела $f(z)$ в неподвижной граничной точке z влечет за собой существование угловой производной $f'(z)$ [1, с. 79–83]. В недавней статье [2, теорема 6] получена нижняя оценка $f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})$, зависящая от величины $\Phi(f(0))$. Здесь Φ есть дробно-линейный автоморфизм круга U, такой, что $\Phi(f(0)) \in (0, 1)$, $\Phi(e^{\pm i\theta}) = e^{\pm i\theta}$. В данной работе устанавливается точное неравенство, включающее произведение $f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})$ и производную Шварца, вычисленную в точке $z = 0$. Следующее утверждение получено методами теории потенциала [3].

Теорема. *Для любой голоморфной и однолистной в круге U функции f с неподвижными граничными точками $e^{\pm i\theta}$, $\theta \in$*

$(0, \pi)$ *выполняется неравенство*

$$|S_f(0)| \leq 6 \left(1 - \frac{|f'(0)|^2}{(1-|f(0)|^2)^2}\right) - 3\log|f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})| -$$
$$- 3\log\frac{1-\Phi^2(f(0))}{1-2\Phi(f(0))\cos\theta + \Phi^2(f(0))}.$$

Равенство достигается в случае тождественного отображения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект 14-11-00022).

[1] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps,* Springer, 1992, 299 p.

[2] A. Frolova, M. Levenshtein, D. Shoikhet, A. Vasil'ev, "Boundary distortion estimates for holomorphic maps", *Complex Analysis and Operator Theory,* **8**:5 (2014), 1129–1149.

[3] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного,* Владивосток, Дальнаука, 2009, 401 с.

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И МЕТОДЫ КОМПАКТНОСТИ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С НЕМОНОТОННОЙ НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Г. Подгаев *(ТОГУ, Хабаровск)*,
К. В. Лисенков *(ТОГУ, Хабаровск)*

Указанными методами исследуется существование регулярных решений для квазилинейных параболических уравнений в нецилиндрической области с заданной границей класса W_2^1 в случае одной пространственной переменной [1] или с границей класса $C_{x,t}^{2,1}$ в многомерном случае [2]. При этом не предполагается монотонность границы. Допускается вырождение уравнения на решении.

Проекционные методы и методы компактности, хорошо развитые для случая цилиндрических границ, не могут без существенной доработки использоваться в существенно нелинейных задачах в нецилиндрических областях. На основании разработанных ранее и предложенных в указанных работах методов получены утверждения о существовании решений квазилинейных уравнений в таких областях.

Представлены также результаты исследования задачи Стефана, когда часть границы неизвестна и находится вместе с решением [3].

Для случая заданной границы приближенные решения строятся проекционным методом с использованием семейства проекторов зависящих от временно́го параметра. Доказывается, что некоторый предел этих решений будет решением задачи.

Этот метод при доказательстве теорем существования практически никем не использовался, поскольку отсутствовали соответствующие теоремы компактности, а в многомерном случае еще возникали трудности с обоснованием наличия семейств функций, которые были бы базисами в пространствах $W_p^k(D_t)$ на каждом сечении $t = const$ нецилиндрической области и достаточно гладкими по параметру t. Трудности оставались и при обосновании предельных переходов даже после того как такие системы удавалось построить. Подробное описание построения таких систем имеется в упомянутой работе [2].

Для обоснования существования предела в одномерном случае используются разработанные в [4], [5] и приспособленные к данным задачам методы компактности множества функций из шкалы банаховых пространств.

В случае n переменных развивается метод монотонности на случай нецилиндрических областей.

Одномерная задача для случая монотонной границы класса W_2^1 рассматривалась в [6] .

Как и в [4] рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(u_x) + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)u,$$

но граница $x = s(t) \in W_2^1(0,T)$ необязательно должна быть монотонной. При этом основным дополнительным условием на $s(t)$ является предположение, что отрезок $[0,T]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $s'(t) \geq 0$ почти всюду, либо $s'(t) \leq 0$ почти всюду. Случай $s(T) = 0$ допустим. В этом случае ни одна часть границы не освобождается от краевых условий.

Установлены теоремы существования решений краевых задач при допущении возможного вырождения уравнения ($\varphi' \geq 0$).

В многомерном случае с границей класса $C_{x,t}^{2,1}$ изучено уравнение

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(u_{x_i}) + f$$

в нецилиндрической области $\bigcup\limits_{t\in(0,T)} \{t\} \times \Omega_t = Q_t$. Обосновано существование и единственность решения первой начально-краевой задачи. Показано, какие изменения можно внести в метод монотонности, чтобы он “работал” в нестационарном случае нецилиндрических областей (основное неравенство выводится существенно более долгим путем).

[1] А. Г. Подгаев, К. В. Лисенков, “Разрешимость квазилинейного параболического уравнения в области с кусочно-монотонной границей”, *Дальневосточный математический журнал,* **13**:2 (2013), 250–272 .

[2] А. Г. Подгаев, Н. Е. Истомина, “О методах Фаэдо – Галеркина и монотонности в нецилиндрической области для вырождающегося квазилинейного уравнения”, *Дальневосточный математический журнал,* **14**:1 (2014), 73–89.

[3] А. Г. Подгаев, “Краевые задачи и задачи управления для вырождающихся параболических уравнений в областях с нецилиндрической или неизвестной границей”, *Научное обеспечение технического и социального развития Дальневосточного региона: сб. науч. ст. к 55-летию Тихоокеан. гос. ун-та,* Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013.

[4] А. Г. Подгаев, “Об относительной компактности множества абстрактных функций из шкалы банаховых пространств”, *Сиб. мат. журн.,* **34**:2 (1993), 135–137.

[5] А. Г. Подгаев, “Теоремы компактности в нестационарных областях и некоторые их применения”, *Неклассические уравнения математической физики. Всероссийский научный семинар. Тезисы докладов. Часть I,* Якутск, 2010, 15–18.

[6] К. В. Лисенков, “Проекционный метод решения задачи для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрической области с границей класса W_2^1 ”, *Дальневосточный математический журнал,* **12**:1 (2012), 48–59 .

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Т. М. Попова *(ТОГУ, Хабаровск)*,
А. В. Козлов *(ТОГУ, Хабаровск)*

Исследуется вопрос о численном решении начально-краевой задачи с разрывными граничными условиями для уравнения синоптических течений в океане [1–2]

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} - \gamma\Delta^2\psi + R\big(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\big) + \frac{\partial\psi}{\partial x} = f(x,y,t), \quad (1)$$

$$\psi(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in \Omega \quad (2)$$

$$\psi(x,y,t) = \Delta\psi(x,y,t) = 0, \quad (x,y,t) \in S_{1,T}, \quad (3)$$

$$\psi(x,y,t) = \frac{\partial\psi}{\partial n}(x,y,t) = 0, \quad (x,y,t) \in S_{2,T}. \quad (4)$$

Здесь Ω — выпуклая область в R^2, ограниченная отрезками, лежащими на прямой $y = 1$, с концами в точках (0,1) и (1,1), и на прямой $y = 0$ с концами в точках (0,0) и (1,0), а также гладкими кривыми γ_1 и γ_2, соединяющими соответственно точки (0,0), (0,1) и (1,0), (1,1), $\partial\Omega$ — граница области Ω, $\Gamma_1 = \gamma_1(y) \cup \gamma_2(y)$, $\Gamma_2 = \partial\Omega\backslash\Gamma_1$, $Q = \Omega \times (0,T)$ — цилиндр с боковой поверхностью $S_T = S_{1,T} \cup S_{2,T}$, где $S_{1,T} = \Gamma_1 \times (0,T)$, $S_{2,T} = \Gamma_2 \times (0,T)$, где T — конечное число, n — внешняя нормаль к Γ_2. Параметры R, γ — положительные постоянные, $\psi(x,y,t)$ — характерная величина функции полного потока, $f(x,y,t)$ — функция, характеризующая внешние воздействия.

Обобщенное решение задачи существует [3] Для численного решение поставленной задачи применим метод конечных разностей, который представляет решение задачи в виде сеточной функции u_h, с некоторой степенью точности аппроксимирующей точное решение.Построим разностные аппроксимации дифференциальных операторов до четвертого порядка, и аппроксимируем краевые условия путем сноса значений в ближайшие к границе узловые точки. Практический интерес представляет оценка близости полученной сеточной функции к точному решению или сравнение близости двух сеточных функций между собой.

[1] Г. И. Марчук, *Математические модели циркуляции в океане,* Под ред. Марчука Г.И., Саркисяна С.А., М.: Наука, 1988.

[2] А. С. Саркисян, *Моделирование динамики океана,* Санкт-Петербург, Гидрометеоиздат, 1991.

[3] Т. М. Попова, “Разрешимость начально-краевой задачи уравнения синоптических течений с разрывными граничными условиями”, *Альманах современной науки и образования. Серия “Математика, физика, технические науки и методика их преподавания”,* **1**:8 (2008), 164–168.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА ОТ H-ФУНКЦИИ ФОКСА

Е. Г. Прилепкина *(ДВФУ, ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Пусть $\mathbf{A} = (A_1, A_2, ..., A_p)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, ..., B_q)$ положительные и $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_p)$, $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_q)$ произвольные вещественные числа, причем $\sum_{i=1}^{p} A_i = \sum_{j=1}^{q} B_j$. В данной работе рассмотрим частный случай H-функции Фокса, определяемой интегралом

$$H_{q,p}^{p,0}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} (\mathbf{B},\mathbf{b}) \\ (\mathbf{A},\mathbf{a}) \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{\prod_{k=1}^{p}\Gamma(A_k s + a_k)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(B_j s + b_j)} z^{-s} ds.$$

Детали выбора контура подробно изложены в теореме 1.1 книги [1]. Свойства функции Фокса во многом зависят от условий на параметры $A_0=(2\pi)^{(p-q)/2}\prod_{k=1}^p A_k^{a_k-1/2}\prod_{j=1}^q B_k^{1/2-b_j}$, $\rho=\prod\limits_{k=1}^p A_k^{A_k}\prod\limits_{j=1}^q B_j^{-B_j}$, $\quad \mu=\sum\limits_{j=1}^q b_j-\sum\limits_{k=1}^p a_k+\frac{p-q}{2}$. Хорошо известно [1], что в случае $\mu>1$ существует преобразование Меллина от Н-функции при $\Re s>-\min\limits_{1\le k\le p}(a_k/A_k)$, и

$$\int_0^\rho H_{q,p}^{p,0}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(\mathbf{B},\mathbf{b})\\(\mathbf{A},\mathbf{a})\end{matrix}\right)x^{s-1}dx=\frac{\prod_{k=1}^p\Gamma(A_k s+a_k)}{\prod_{j=1}^q\Gamma(B_j s+b_j)}.$$

Нам удалось установить справедливость данного равенства и для $\mu>0$. Кроме этого, доказано, что при $\mu=-m$, где m неотрицательное целое, преобразование Меллина Н-функции также существует и

$$\int\limits_0^\rho H_{q,p}^{p,0}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(\mathbf{B},\mathbf{b})\\(\mathbf{A},\mathbf{a})\end{matrix}\right)x^{s-1}dx=\frac{\prod_{k=1}^p\Gamma(A_k s+a_k)}{\prod_{j=1}^q\Gamma(B_j s+b_j)}-A_0\rho^s\sum_{k=0}^m l_{m-k}s^k,$$

где $l_0=1$ и коэффициенты l_r, $r\ge 1$ определены рекурсионными соотношениями

$$l_r=\frac{1}{r}\sum_{t=1}^r q_t l_{r-t}t,$$

$$q_t=\frac{(-1)^{t+1}}{t+1}\left[\sum_{k=1}^p\frac{\mathcal{B}_{t+1}(a_k)}{A_k^t}-\sum_{j=1}^q\frac{\mathcal{B}_{t+1}(b_j)}{B_j^t}\right],$$

$\mathcal{B}_t(\cdot)$ полиномы Бернулли степени t порядка 1. В качестве приложений рассматриваются новые интегральные представления для функции Фокса и отношения гамма функций.

[1] A. A. Kilbas, M. Saigo, *H-transforms and applications, Analytical Methods and Special Functions,* **9**, Chapman & Hall/CRC, 2004.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ФРЕНЕЛЕВСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

И. В. Прохоров *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*,
А. А. Сущенко *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*

Вопросы существования, единственности и гладкости решений краевых задач для стационарных и нестационарных линейных уравнений переноса излучения с традиционными условиями сопряжения на границах раздела сред типа непрерывной склейки в основном были решены во второй половине прошлого века. Теория краевых задач для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границах раздела сред еще не завершена и в настоящее время достаточно интенсивно развивается. Обобщенные условия сопряжения позволяют описывать различные физические эффекты на границах раздела, не учтенные в самом уравнении. В частности, френелевские условия сопряжения моделируют зеркальное отражение и преломление по закону Снеллиуса потока излучения на поверхности раздела двух сред.

В докладе будут представлены результаты недавней работы [1], которая является продолжением исследований [2, 3] и посвящена изучению краевых задач для нестационарного уравнения переноса. В [2, 3] доказана разрешимость уравнения излучения в среде с плоско-параллельной симметрией и с оператором сопряжения достаточно общего вида. Причем, благодаря специфической геометрии области основной результат получен без ограничения типа «сжатия» на оператор сопряжения.

В общем случае существует пример неединственности решения задачи для стационарного уравнения переноса излучения в чисто поглощающей трехмерной области с нестрого сжимающим оператором сопряжения, что в общем случае приводит к неединственности решения нестационарного уравнения. Однако, для широко известных операторов сопряжения, к которым можно отнести френелевский оператор, единственность стационарного решения имеет место при традиционных ограничениях на коэффициенты уравнения. Последнее обстоятельство позволяет показать корректность задачи Коши для нестационарного уравнения переноса с френелевскими условиями сопряжения [1]. Доказательство основного утверждения строится на сведении исходной начально-краевой задачи к абстрактной задаче Коши для эволюционного уравнения. Используя теорему Хилле-Иосиды, показано существование единственной сильно непрерывной полугруппы разрешающих операторов и получены условия стабилизации нестационарного решения.

[1] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “О корректности задачи Коши для уравнения переноса излучения с френелевскими условиями сопряжения”, *Сибирский математический журнал,* **56**:3 (2015).

[2] И. В. Прохоров, “О разрешимости начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения”, *Сибирский математический журнал,* **53**:2 (2012), 377–387.

[3] И. В. Прохоров, “Задача Коши для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения”, *Журнал вычислительной математики и математической физики,* **53**:5 (2013), 753–766.

О НЕРАВЕНСТВЕ ИЕНСЕНА

В. Я. Прудников *(ТОГУ, Хабаровск)*

В работах [1, 2] доказано неравенство Иенсена в идеальных пространствах, причем подынтегральная функция является полунепрерывной снизу. В данной статье неравенство Иенсена приведено с меньшими ограничениями на подынтегральную функцию.

Пусть D — некотрое множество пространства $\mathbb{R}^n$, Σ — σ-алгебра подмножеств D, ν — полная σ-конечная мера на Σ. Обозначим через $S(D,\ \Sigma,\ \nu)$ пространство всех вещественнозначных ν-измеримых п.в. конечных функций с обычным отождествлением эквивалентных функций.

Идеальным прстранством называется линейное многообразие $Y \subset S(D,\ \Sigma,\ \nu)$ такое, что из $v \in Y,\ u \in S,\ |u| \leq |v|$ следует $u \in Y$ [3].

Норма $\| \bullet \|$ на идеальном пространстве Y называется монотонной, если из $u,\ v \in Y,\ |u| \leq |v|$ следует $\|u\| \leq \|v\|$.

Банаховым идеальным пространством называется идеальное пространство, полное по монотонной норме.

Норма в нормированном идеальном пространстве Y называется порядково непрерывной, если для любой последовательности $\{u_m\} \subset Y$ такой, что $u_m \downarrow 0$ следует $\|u_m\| \to 0$.

Теорема 1. *Пусть $Y \subset S(D,\ \Sigma,\ \nu)$ — идеальное пространство с порядково непрерывной нормой, для открытого множества $E \subset \mathbb{R}^d$ мера μ такова, что $\mu(E) = 1$.*

Если неотрицательная функция $g(x,\ y)$ измерима по мере

$\mu \times \nu$, *а элементы*

$$y \to g(x,\ y),\ \ y \to \int\limits_E g(x,\ y) d\mu_x$$

принадлежат Y, *то для полунепрерывного снизу выпуклого функционала* $F : Y \to (-\infty,\ +\infty]$ *выполнено нервавенство*

$$F\left(\int\limits_E g(x,\ \bullet) d\mu_x\right) \leq \int\limits_E F\left(g(x,\ \bullet)\right) d\mu_x.$$

Доказательтво. Известно [3], что в банаховом идеальном пространстве с порядково непрерывной нормой любой линейный непрерывный функционал u^* имеет интегральное представаление, а т.к. элемент

$$y \to \int\limits_E g(x,\ y) d\mu_x$$

принадлежит пространству Y, то

$$\left\langle u^*,\ \int\limits_E g(x,\ \bullet) d\mu_x \right\rangle = \int_D u(y) d\nu_y \int_E g(x,\ y) d\mu_x =$$

$$= \int_D u_+(y) d\nu_y \int\limits_E g(x,\ y) d\mu_x - \int\limits_D u_-(y) d\nu_y \int_E g(x,\ y) d\mu_x, \qquad (1)$$

где $u \in Y^*$.

Из этого представления следует ν-суммируемость функций

$$y \to u_+(y) \int\limits_E g(x,\ y) d\mu_x,\ \ y \to u_-(y) \int\limits_E g(x,\ y) d\mu_x.$$

Согласно теореме Тонелли функции $u_+(y)g(x,\ y)$, $u_-(y)g(x,\ y)$ $\mu \times \nu$-суммируемы, поэтому, используя теорему Фубини, из (1) получим:

$$\left\langle u^*,\ \int\limits_E g(x,\ \bullet) d\mu_x \right\rangle = \int\limits_E \left\langle u^*,\ g(x,\ \bullet)\right\rangle d\mu_x. \tag{2}$$

Т.к. F полунепрерывный снизу выпуклый функционал, то по теореме Фенхеля – Моро [4]

$$F(u) = \sup \left\{ l(u) :\ l \leq F \right\},$$

где $l(u) = \langle u^*,\ u\rangle + a$ – аффинная функция.

Если $F\left(\int_E g(x,\ \bullet) d\mu_x\right) < +\infty$, то для данного $\varepsilon > 0$ существует функция l_ε такая, что

$$F\left(\int\limits_E g(x,\ \bullet) d\mu_x\right) < l_\varepsilon\left(\int\limits_E g(x,\ \bullet) d\mu_x\right) + \varepsilon,$$

причем $l_\varepsilon \leq F$ в Y. Поэтому, используя (2), получим требуемое неравенство.

Аналогично показываем, что если

$$F\left(\int\limits_E g(x,\ \bullet) d\mu_x\right) = +\infty,$$

то

$$\int\limits_E F\left(g(x,\ \bullet)\right) d\mu_x = +\infty.$$

Замечание. Если функционал F положительно однороден, то мера может быть σ-конечной. Покажем это.

Пусть $0 < \mu(E) < \infty$, тогда согласно теореме 1

$$F\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E g(x,\ \bullet)d\mu_x\right) \leq \frac{1}{\mu(E)}\int\limits_E F\left(g(x,\ \bullet)\right)d\mu_x,$$

поэтому

$$F\left(\int\limits_E g(x,\ \bullet)d\mu_x\right) \leq \int\limits_E F\left(g(x,\ \bullet)\right)d\mu_x. \qquad (3)$$

Если $\mu(E) = +\infty$, то существует последовательность $\{E_i\}$ множеств $E_i \subset \Sigma$ таких, что $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$, $\mu(E_i) < \infty$. Поэтому из (3) следует неравенство

$$F\left(\int\limits_{\bigcup_{i=1}^m E_i} g(x,\ \bullet)d\mu_x\right) \leq \int\limits_{\bigcup_{i=1}^m E_i} F\left(g(x,\ \bullet)\right)d\mu_x,$$

но тогда, т.к. F полунепрерывен снизу, то

$$F\left(\int\limits_E g(x,\ \bullet)d\mu_x\right) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} F\left(\int\limits_{\bigcup_{i=1}^m E_i} g(x,\ \bullet)d\mu_x\right) \leq$$
$$\leq \lim_{m\to\infty}\int\limits_{\bigcup_{i=1}^m E_i} F\left(g(x,\ \bullet)\right)d\mu_x = \int\limits_E F\left(g(x,\ \bullet)\right)d\mu_x.$$

[1] В. Я. Прудников, “Неравенство Иенсена в идеальном пространстве”, *Сиб. журнал инд. математики,* **10**:2 (2007), 119–127.

[2] В. Я. Прудников, “Неравенство Иенсена в произвольном идеальном пространстве”, *Вестник ТОГУ,* **4**:11 (2008), 55–62.

[3] Л. В. Канторович, Г. П. Акимов, *Функциональный анализ,* М.: Наука, 1977, 744 с.

[4] Ж.-П. Обен, *Нелинейный анализ и его экономические приложения,* М.: Мир, 1988, 264 с.

ПОЛИГОНЫ НАД МОНОИДАМИ ЛЕВЫХ НУЛЕЙ С (P,1)-СТАБИЛЬНОЙ ТЕОРИЕЙ

Д. О. Птахов *(ДВФУ, Владивосток)*

В данной работе рассматриваются полигоны над моноидом левых нулей с $(P,1)$-стабильной теорией. Понятие $(P,1)$-стабильной теории было введено в [1]. Это понятие является обобщением понятия стабильности теории. В [2] приводится характеризация $(P,1)$-стабильных теорий как класса теорий, определимо интерпретируемых в какой-либо теории языка, состоящего только из одноместных предикатов.

Моноид S называется моноидом левых нулей, если для любых $a, b \in S$ выполняется $ab = a$. Под левым полигоном ${}_SA$ над моноидом S или просто полигоном понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причем единица действует на A тождественно. Пусть T — теория языка L, язык L_P получается из языка L добавлением одноместного предикатного символа P, Δ — некоторое множество предложений языка L_P. Теория T называется P_Δ-стабильной в мощности λ, если для любого множества X мощности $\leq \lambda$ в теории T множество

$$T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$$

имеет не более λ пополнений в языке $(L(X))_P$, где $L(X)$ — язык, получаемый из языка L добавлением множества X в качестве множества новых констант. Теория T называется P_Δ-стабильной, если она является P_Δ-стабильной в некоторой бесконечной мощности λ. Теория T называется $(P,1)$-стабильной, если она P_Δ-стабильна для $\Delta = \varnothing$. Полигон ${}_SA$ называется P_Δ-стабильным, если теория $Th({}_SA)$ этого полигона P_Δ-стабильна.

Теорема. *Пусть S — моноид левых нулей. Полигон ${}_SA$ является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда число неодноэлементных компонент связности этого полигона конечно.*

[1] Е. А. Палютин, “$E*$-стабильные теории”, *Алгебра и Логика,* **42**:2 (2000), 194–210.

[2] М. А. Русалеев, “Характеризация $(P,1)$-стабильных теорий”, *Алгебра и Логика,* **46**:2 (2007), 346–359.

МНОЖЕСТВА С ДЕЙСТВИЕМ ПОЛУГРУППЫ, КАК КАТЕГОРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Е. Е. Скурихин *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*

В тезисах к (не состоявшемуся) докладу Е. Е. Скурихина на Международной конференции Торическая топология и автоморфные функции, Хабаровск, 5 – 10 сентября 2011 года, анонсировался результат о связи сложности по В. И. Арнольду, определяемой в контексте понятия монады, то есть конечного множества с фиксированным отображением этого множества в себя, с размерностью лебеговского типа категорного топологического пространства, ассоциированного с монадой с помощью конструкции Чу. При этом сложность характеризовалась, как размерность лебеговского типа и как когомологическая размерность соответствующего категорного топологического пространства.

Как прямо следует из определений, монада может быть отождествлена с множеством, на котором действует аддитивная полугруппа неотрицательных целых чисел, так что результаты о сложности, упомянутые выше, могут быть увязаны с более общими результатами о действиях полугрупп с единицей на множествах.

В докладе предполагается дать описание эквивалентности категории A-множеств, то есть множеств, на которых действует слева полугруппа A с единицей, с категорией пучков множеств и тем самым естественным образом отождествить каждое A-множество с категорным топологическим пространством. С другой стороны, каждому A-множеству сопоставляется пространство Чу. Топологические характеристики этих категорных топологических пространств и пространств Чу, их размерности, в том числе и когомологические, связываются с характеристиками исходных A-множеств, в частности со сложностями монад.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ – РЕАКЦИИ

О. В. Соболева *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

В работе исследуется задача идентификации коэффициента в параболическом нелинейном уравнении диффузии – реакции рассмотренном в ограниченной области при условии Дирихле на границе, используя дополнительную информацию о решении начальной краевой задачи.

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^d, d = 1, 2$ с липшицевой границей Γ задачу нахождения функции φ из соотношений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}) - k\varphi + f,\ x \in (a,b),\ t \in [0,T],$$

$$\varphi(x,0) = \psi(x),\ \varphi(a,t) = \xi_1(t),\ \varphi(b,t) = \xi_2(t). \qquad (1)$$

Здесь $\lambda \equiv \lambda(\mathbf{x}) > 0$ — переменный коэффициент диффузии, $k = const \geq 0$ — величина, характеризующая распад вещества за счет химических реакций, $f = f(x,t)$ — плотность объемных источников, $\psi(x)$ — функция заданная в начальный момент времени, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ — функции заданные при $x = a$ и $x = b$.

Обратная задача заключается в нахождении неизвестного коэффициента λ, который требуется определелить вместе с решением φ по дополнительной информации о состоянии среды в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. Указанная задача формулируется как задача минимизации соответствующего функционала на решениях исходной краевой задачи. Исследование поставленной коэффициентной обратной задачи сводится к исследованию соответствующей экстремальной задачи [1].

В работе разрабатывается алгоритм численного решения обратной экстремальной задачи основанный на методе сопряженных градиентов и развивается программный комплекс для численного решения поставленной коэффициентной обратной задачи. Анализ результатов численных экспериментов, показал эффективность алгоритма и программного комплекса для численного решения коэффициентной обратной для модели массопереноса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00313-а).

[1] Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко, *Анализ и оптимизация в гидроди-*

намике вязкой жидкости, Владивосток: Дальнаука, 2008, 365 с.
[2] V. A. Timorin, “An analogue of the Hodge–Riemann relations for simple convex polytopes”, *Russian Math. Surveys,* **54**:2 (1999), 381–426.

ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РОД ТОДДА И ТОРИЧЕСКИЕ РАЗРЕШЕНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ

Г. Д. Соломадин *(МГУ им. Ломоносова, Москва)*,
Ю. М. Устиновский *(Princeton University, New Jersey, USA)*,
В. М. Бухштабер *(Математический Институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва)*

Двупараметрический ряд Тодда $Td_{a,b}$ ([1]) является обобщением известного χ_y-рода Хирцебруха ([2]). В работе [3] была поставлена задача определения рода Хирцебруха ϕ, задаваемого условием совпадения на классических флопах проективных алгебраических многообразий. Одним из следствий результатов [4] и последней работы является доказательство $\phi = Ell$, где Ell есть род Кричевера. В настоящей работе дается элементарное доказательство этого факта, не использующее методов [4]. В частности, показывается, что для произвольной фиксированной последовательности $\{X^n\}$ особых проективных торических многообразий ($dim\ X^n = n$) условие совпадения ϕ на классических флопах над X^n эквивалентно $\phi = Ell$. Известно, что классические флопы над данным многообразием X (если определены) имеют одинаковые числа Бетти. В этой связи также показывается, что условие совпадения ϕ на разрешениях особенностей особых проективных пространств X^n (последовательность $\{X^n\}$ фиксирована) с одинаковыми числами Бетти в торической категории эквивалентно $\phi = Td_{a,b}$. Выводятся некоторые следствия.

Ставится задача: для фиксированной последовательности комбинаторных типов $\{\Pi^n\}$ многогранников найти род Хирцебруха ϕ, для каждого $n \in \mathbb{N}$ совпадающий на всех торических многообразиях над реализацией Π^n. Показывается, что если для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют торические многообразия X_1^n, X_2^n над реализациями Π^n, имеющие различные числа Тома-Милнора, то тогда $\phi = Td_{a,b}$. Также изучаются частные случаи этой задачи для серий замечательных многогранников (граф-ассоциэдров).

[1] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften,* 131, Springer, Berlin [et al.], ISBN 0-387-03525-7.

[2] В. М. Бухштабер, “f-полиномы простых многогранников и двупараметрический ряд Тодда”, *УМН,* **63**:6 (2008), 153–154.

[3] B. Totaro, “Chern Numbers for Singular Varieties and Elliptic Homology”, *Ann. of Math.,* **151**:2 (2000), 757–791.

[4] L. Borisov, L. Libgober, *Elliptic Genera of Singular Varieties,* arXiv:math/0007108.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИМПЕДАНСНОЙ МАСКИРОВКИ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

В. В. Соснов *(ДВФУ, Владивосток)*

В настоящее время активно исследуются задачи, связанные с созданием средств маскировки материальных тел от акустической или электромагнитной локации [1, 2]. Недостатком многих из предложенных к настоящему времени способов маскировки является трудность их технической реализации. Одним из возможных решений данной проблемы является замена задач построения точных маскировочных оболочек задачами построения приближенных маскировочных оболочек. Эти задачи могут быть сведены к обратным экстремальным задачам. Данный подход основан на введении функционала качества, адекватно отвечающего рассматриваемой задаче, и нахождении его минимума [3]. Эти экстремальные задачи могут быть решены приближенно с использованием различных методов оптимизации.

В работе рассматриваются задачи управления для двумерного уравнения Гельмгольца в неограниченной области с импедансным граничным условием. Импедансное граничное условие моделирует свойства специальных материалов, покрывающих границу рассеивателя. Это граничное условие связывает звуковое давление и нормальную компоненту колебательной скорости через граничный коэффициент, называемый поверхностным импедансом.

Обсуждаются результаты численных экспериментов, основанных на разных алгоритмах оптимизации.

[1] А. Е. Дубинов, Л. А. Мытарева, “Маскировка материальных тел методом волнового обтекания”, *Успехи физических наук,* **53** (2010), 455–479.

[2] A. Alu, N. Engheta, “Plasmonic and Metamaterial Cloaking: Physical Mechanisms and Potentials”, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics,* **10**:9 (2008), 093002.

[3] G. V. Alekseev, “Cloaking via impedance boundary condition for the 2-D Helmholtz equation”, *Appl. Anal.,* **93** (2014), 254–268.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ В 2D ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧЕ МАСКИРОВКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЛОИСТОЙ ОБОЛОЧКИ

Ю. Э. Спивак *(ДВФУ, Владивосток)*

В настоящее время невидимость и маскировка широко обсуждаются в научных кругах, об этом можно судить по количеству публикаций на указанную тему. Так, например, в статье [1] рассматривается подход к достижению наилучшей маскировки, основанный на комбинации приближенной маскировки совместно с дискретизацией маскирующего вещества. Такая комбинация позволяет избежать сингулярностей параметров компонентов тензоров (диэлектрической и магнитной проницаемостей ε, μ) на внутренней границе для цилиндрической оболочки: компоненты ε_ϕ, μ_ϕ бесконечны, тогда как $\varepsilon_\rho, \mu_\rho, \varepsilon_z, \mu_z$ равны нулю. Приближенная маскировка заключается в том, чтобы преобразовать скрываемое тело в объект, величина которого описывается малым параметром c. Указанный метод приводит к некоторому рассеянию, так как скрываемое тело преобразуется в небольшой объект, тем не менее рассеяние уменьшается по мере уменьшения c.

Важной характеристикой при анализе свойств и поведения рассматриваемого метода маскировки является ширина рассеяния $\sigma(\varphi)$, определяемая по формуле

$$\sigma(\varphi) = \lim_{\rho\to\infty} 2\pi\rho \frac{\left|E^S(\varphi)\right|^2}{\left|E^{inc}\right|^2} = \lim_{\rho\to\infty} 2\pi\rho \frac{\left|H^S(\varphi)\right|^2}{\left|H^{inc}\right|^2},$$

где $\varphi \in [0; 2\pi]$, E^S и H^S — рассеянные поля, E^{inc} и H^{inc} — падающие поля для TE_z и TM_z-поляризаций, соответственно.

Для случая TE_z-поляризации развивается численный алгоритм решения рассматриваемой задачи маскировки, исследуются его свойства, разрабатывается комплекст программ, реализующих этот алгоритм, на основе которого проводятся вычислительные эксперименты, и обсуждаются результаты проведенных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00313-а).

[1] H. M. Zamel, E. El-Diwany, H. El-Hennawy, "Approximate electromagnetic cloaking of a conducting cylinder using homogeneous isotropic multi-layered materials", *Journal of Electrical Systems and Information Technology,* **1** (2014), 82–83.

СИЛЬНО ТОЧНЫЕ ПОЛИГОНЫ С ЛИНЕЙНЫМИ РЕШЕТКАМИ КОНГРУЭНЦИЙ

А. А. Степанова *(ДВФУ, Владивосток)*,
Д. Б. Прокопьева *(ДВФУ, Владивосток)*

В работе рассмотрены сильно точные полигоны над коммутативным моноидом, решетки конгруэнций которых линейны. Пусть S — моноид. Левым S-*полигоном* (или, полигоном над S, или, просто, *полигоном*) ${}_SA$ называется множество A, на котором определено действие моноида S слева, причем единица S действует на A тождественно. Полигоны можно рассматривать как унарные алгебры. В [1] дана характеризация унарных алгебр с дистрибутивными и модулярными решетками конгруэнций. Строение несвязных полигонов с дистрибутивными и модулярными решетками конгруэнций изучено в [2].

Напомним некоторые определения. Полигон ${}_SA$ называется *сильно точным*, если для любых $a \in A, s, t \in S$ из равенства

$sa = ta$ следует $s = t$. Полигон $_SA$ называется *линейно упорядоченным*, если $Sa \subseteq Sb$ или $Sb \subseteq Sa$ для любых $a, b \in A$. Отношение эквивалентности θ на множестве A называется *конгруэнцией* полигона $_SA$, если соотношение $a\theta b$ влечет $sa\,\theta\,sb$ для любых $a, b \in A, s \in S$. Заметим, что совокупность всех конгруэнций полигона $_SA$ образует решетку относительно следующих операций: $\theta \wedge \eta = \theta \cap \eta$, $\theta \vee \eta$ – наименьшая конгруэнция полигона $_SA$, содержащая θ и η, где θ, η – конгруэнции полигона $_SA$. Решетку конгруэнций полигона $_SA$ обозначим через $Con(_SA)$. Решетка $(L; \leq)$ называется *линейной*, если $(L; \leq)$ является линейно упорядоченным множеством.

Утверждение. Если S — группа и решетка конгруэнций $Con(_SS)$ полигона $_SS$ линейна, то S — циклическая группа, порядок которой является степенью простого числа, или квазициклическая группа.

Теорема. Пусть S — коммутативный моноид, $_SA$ — сильно точный полигон. Решетка конгруэнций $Con(_SA)$ полигона $_SA$ является линейной тогда и только тогда, когда $_SA$ линейно упорядоченный полигон и решетка конгруэнций $Con(_SS)$ полигона $_SS$ линейна.

[1] Д. П. Егорова, Л. А. Скорняков, “О структуре конгруэнций унарной алгебры”, *Межвузовский научный сборник,* (1977), 28–40.

[2] Д. О. Птахов, А. А. Степанова, “Решетки конгруэнций полигонов”, *Дальневосточный математический журнал,* **13**:1 (2013), 107–116.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Д. А. Терешко *(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Задачи создания течения с требуемым полем скорости либо температуры имеют важное прикладное значение. Указанные задачи формулируются как задачи управления, для решения которых необходимо разрабатывать специальные численные алгоритмы. Чаще всего такие алгоритмы основаны на использовании системы оптимальности, описывающей необходимые условия экстремума первого порядка (см., например, [1] для стационарного случая). Переход к нестационарному случаю вносит дополнительные сложности, связанные с разнонаправленностью по времени прямой и сопряженной задачи. Численное решение системы оптимальности на больших временных интервалах сопряжено с существенными трудностями, поэтому возникает необходимость создания нового алгоритма решения экстремальных задач без использования системы оптимальности. В основу алгоритма была положена идея конечномерной минимизации из работы [2], обобщенная на случай нестационарных уравнений тепловой конвекции.

Главным преимуществом этого алгоритма является экономичность, так как его реализация не требует многократного поочередного решения прямых и сопряженных задач. Управление, роль которого может играть граничное значение скорости, температуры либо потока тепла, находится вместе с решением прямой задачи за один проход временного интервала. В алгоритме нет итерационного процесса, сходимость которого обычно гарантируется специальным выбором параметров. Для проверки работоспособности предложенного алгоритма была проведена серия вычислительных экспериментов, в ходе которых определялось влияние различных факторов на точность решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00313-а).

[1] Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко, *Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости,* Владивосток: Дальнаука, 2008, 365 с.

[2] G. V. Alekseev, V. V. Malikin, "Numerical analysis of optimal boundary control problems for Navier-Stokes equations", *Comp. Fluid Dynamics J.,* **3** (1994), 1–26.

СХОДИМОСТЬ К ПРЕДЕЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ В МОДЕЛЯХ РАСТУЩИХ СЛУЧАЙНЫХ СЕТЕЙ

Г. Ш. Цициашвили *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*,
М. А. Осипова *(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток)*

1. Рассматривается модель экспоненциальной растущей сети, в которой вновь появляющаяся вершина соединяется с любой из уже существующих вершин с равной вероятностью. Пусть на шаге 1 имеется вершина 1 и ребро, соединяющее эту вершину с собой (петля). На шаге 2 появляется вершина 2 и ребро с вероятностью 1 соединенное с вершиной 1. На шаге $t+1$ появляется вершина $t+1$, которая с вероятностью $1/t$ соединяется с одной из вершин $1, \ldots, t$. Обозначим $p(k,s,t)$ вероятность того, что на шаге $t \geq 1$ с вершиной s, $1 \leq s \leq t$, соединено k ребер неориентированного графа экспоненциальной сети, что называется степенью вершины s и положим

$$P(k,t)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}p(k,s,t), \qquad f_k(t)=P(k,t+1)-\Pi(k),$$
$$\Pi(k)=2^{-k}\ k\geq 1.$$

Т е о р е м а 1. *При $t\to\infty$ выполняются соотношения*

$$f_1(t)\equiv f_2(t)\equiv 0, \qquad f_3(t)\sim-\frac{1}{4t^2,},$$
$$f_k(t)\sim-\frac{C_k\ln^{k-3}t}{t^2}, \qquad C_k=\frac{1}{4(k-3)!}, \qquad k\geq 3.$$

2. Рассматривается модель растущей сети Барабаши [1], в которой вновь появляющаяся вершина соединяется с любой из уже существующих вершин с вероятностью, пропорциональной степени этой вершины. Обозначим $p(k,s,t)$ вероятность того, что на шаге $t\geq 1$ с вершиной s, $1\leq s\leq t$, соединено k ребер неориентированного графа сети Барабаши. Обозначим

$$f_k(t)=P(k,t+1)-\Pi(k), \qquad \Pi(k)=\frac{4}{k(k+1)(k+2)}, \qquad k\geq 1.$$

Т е о р е м а 2. *При $t\to\infty$ и $k\geq 1$ выполняются соотношения $f_k(t)\sim t^{-3/2}/3\sqrt{\pi}$.*

3. Рассмотривается модель растущей сети Дороговцева, в которой из вновь появляющейся вершины направляется в существующие вершины ориентированное ребро с вероятностью, пропорциональной степени этой вершины плюс a. Здесь $a>0$ является параметром модели. Обозначим $p(k,s,t)$ вероятность того, что на шаге $t\geq 1$ с вершиной s, $1\leq s\leq t$, соединено k ребер ориентированного графа, что является в этой модели степенью вершины s. Обозначим $A_k = (k+a)/(a+1),\ k \geq 0,$

$$\Pi(k) = (1+a)\frac{\Gamma(1+2a)\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)\Gamma(k+2+2a)},\ f_k(t) = P(k,t+1) - \Pi(k),\ k \geq 0.$$

Теорема 3. *Выполняются соотношения*

$$f_k(t) \sim C_k t^{-1-A_0}, \quad t \to \infty, \quad k \geq 0,$$
$$C_0 = \frac{1}{(1+A_0)^2\Gamma(-1-A_0)}, \quad \frac{C_{k-1}(k-1+a)}{(a+1)(A_k - A_0)} = C_k, \quad k > 0.$$

[1] L. A. Barabasi, R. Albert, "Emergence of scaling in random networks", *Science,* **286** (1999), 509–512 .

АНАЛИЗ СТОЙКОСТИ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОТОКОЛОВ АУТЕНТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИК

С. Г. Чеканов *(ДВФУ, Владивосток)*,
А. А. Тарасенко *(ДВФУ, Владивосток)*

При создании криптографических примитивов и протоколов наиболее трудной и важной является задача оценки стойкости алгоритмов. Существуют различные подходы для решения этой проблемы. Один из таких подходов – использование логических исчислений, адаптированных для анализа протоколов. Широкое распространение получила BAN-логика и многочисленные расширения и модификации указанной логики.

Актуальность указанной проблемы объясняется тем, что даже в протоколах, которые используются уже много лет, обнаруживаются уязвимости и недостатки. Например, протокол Нидхема – Шрѷдера с ассиметричной системой шифрования был предложен в 1978 году, и только 17 лет спустя, в 1995, Гэвин Лоу привел атаку на этот протокол [2].

Известно, что BAN-логика является разрешимой, что позволяет реализовать алгоритм, выясняющий доказуемость утверждений относительно свойств безопасности протоколов. На основе результатов работы [3] такой алгоритм разработан и программно реализован.

В ходе работы были проанализированы такие известные протоколы как Нидхема – Шредера с симметричным ключом, Кербероса, Wide Mouth Frog, Ву-Лама. Кроме того, результаты анализа протоколов были проверены с помощью пакета программ AVISPA.

Следует заметить, что модель, основанная на логических исчислениях, позволяет обнаружить слабости протоколов, но не позволяет построить атаку на протокол. Для построения атак с использованием обнаруженных слабостей необходимо использовать дополнительные модели.

[1] J. Schiller, *Strong Security Requirements for Internet Engineering Task Force Standard Protocols,* Massachusetts Institute of Technology, 2002 .

[2] G. Lowe, “An attack on the Needham-Schroeder public key authentication protocol”, *Information Processing Letters,* **56**:3 (1995), 131–136.

[3] D. Kindred, J.M. Wing, “Fast, Automatic Checking of Security Protocols”, *In Second USENIX Workshop on Electronic Commerce,* November 1996, 105–121.

СПИСОК УЧАСТНИКОВ

Ayzenberg Anton Andreyevich	Osaka City University, Osaka	ayzenberga@gmail.com
Chebotarev Alexander Yu.	IAM FEB RAS, Vladivostok	cheb@iam.dvo.ru
Frolenkov Dmitrii	Steklov Mathematical institute, Moscow	frolenkov_adv@mail.ru
Grbic Jelena	University of Southampton, Southampton	j.grbic@soton.ac.uk
Husainov Ahmet Aksanovich	KnASTU, Komsomolsk-on-Amur	husainov51@yandex.ru
Khovanskii Askold G.	University of Toronto, Toronto	askold@math.toronto.edu
Konstantinou-Rizos Sotiris	Chechen State University, Grozny	skonstantin84@gmail.com
Kuroki Shintaro	Graduate School of Sciences The University of Tokyo, Tokyo	kuroki@ms.u-tokyo.ac.jp
Kustarev Andrey	Higher School of Economics, Moscow	kustarev@gmail.com
Kovtanyuk Andrey Egorovich	IAM FEB RAS, Vladivostok	kovtanyuk.ae@dvfu.ru
Kuwata Hideya	Osaka City University, Osaka-city	hideya0813@gmail.com
Laurincikas Antanas	Vilnius University, Vilnius	antanas.laurincikas@mif.vu.lt
Limonchenko Ivan	Moscow State University, Moscow	ilimonchenko@gmail.com

Lu Zhi	Fudan University, Shanghai	zlu@fudan.edu.cn
Masuda Mikiya	Osaka City University, Osaka	masuda@sci.osaka-cu.ac.jp
Mikhailov Alexander	University of Leeds, Leeds	sashamik@maths.leeds.ac.uk
Mironov Andrey	Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk	mironov@math.nsc.ru
Novitskii Igor M.	IAM FEB RAS, Khabarovsk Division, Khabarovsk, Russia	novim@iam.khv.ru
Panov Taras	Moscow State University, Moscow	tpanov@mech.math.msu.su
Ratiu Tudor Stefan	Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausanne	tudor.ratiu@epfl.ch
Sazegar Hashem	Azad Mashhad University, Mashhad	h.sazegar@gmail.com
Suh Dong Youp	Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon	dysuh@kaist.ac.kr
Sukhonos Andrey Gregoryevich	IAM FEB RAS, Vladivostok	agsukh@mail.ru
Ustinov Alexey	IAM FEB RAS, Khabarovsk Division, Khabarovsk	ustinov.alexey@gmail.com
Woo Gyungsoo	Changwon National University, Changwon	gswoo@changwon.ac.kr
Авдеева Мария Олеговна	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	avdeeva@iam.khv.ru
Агапова Елена	ТОГУ, Хабаровск	elenagapov@yandex.ru
Агафонцев Валерий Васильевич	Псковский государственный университет, Псков	fon-valery-ag@yandex.ru

Алексеев Геннадий Валентинович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	alekseev@iam.dvo.ru
Алёшин Максим Сергеевич	ТОГУ, Хабаровск	aleshin.m.s@pnu.edu.ru
Алипченко Антон	ТОГУ, Хабаровск	antoxa261296@mail.ru
Амосова Елена Владимировна	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	leb@iam.dvo.ru
Аносов Вячеслав Дмитриевич	в/ч 43753, Москва	AnosovVD@yandex.ru
Аносова Лариса Романовна	РУДН, Москва	AnosovVD@yandex.ru
Астраханцева Алена Алексеевна	ДВФУ, Владивосток	astro4ka_93@mail.ru
Ахунжанов Ренат Камилевич	Астраханский государственный университет, Астрахань	akhunzha@mail.ru
Берник Василий Иванович	Институт Математики НАН Беларуси, Минск	bernik.vasili@mail.ru
Богоутдинова Юлия Геннадьевна	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	prosyanik@mail.ru
Болотов Дмитрий	ФТИНТ НАНУ, Харьков	d.v.bolotoff@gmail.com
Бризицкий Роман Викторович	ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток	mlnwizard@mail.ru
Брюно Александр Дмитриевич	Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва	abruno@keldysh.ru

Бударина Наталья Викторовна	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	buda77@mail.ru
Бунькова Елена Юрьевна	МИ РАН им. Стеклова, Москва	bunkova@mi.ras.ru
Буртыка Филипп Борисович	Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону	bbfilipp@ya.ru
Бухштабер Виктор Матвеевич	МИ РАН им. Стеклова, Москва	buchstab@mi.ras.ru
Бушина Виктория Эдгаровна	ТОГУ, Хабаровск	Dei00@mail.ru
Быковский Виктор Алексеевич	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	vab@iam.khv.ru
Быковская Елена Владиленовна	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	elena@iam.khv.ru
Вербицкий Виктор Александрович	ХГАЭП, Хабаровск	VAVerbitskiy@mail.ru
Верёвкин Яков Александрович	МГУ им. Ломоносова, Москва	verevkin_j.a@mail.ru
Вихтенко Эллина Михайловна	ТОГУ, Хабаровск	vikht.el@gmail.com
Головчанский Владимир Васильевич	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	gsm@iam.khv.ru
Гореликов Евгений Юрьевич	НГУ, Новосибирск	ge-519@ngs.ru
Гореликова Анастасия	НГУ, Новосибирск	gorelikova.a@gmail.com

Гребенюк Яна Алексеевна	ДВФУ, Владивосток	ya.grebenyuk@gmail.com
Гренкин Глеб Владимирович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	glebgrenkin@gmail.com
Гринблат Андрей Давидович	РН-Комсомольский НПЗ, Комсомольск на Амуре	expandrey@mail.ru
Гудименко Алексей Иванович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	gudimenko@iam.dvo.ru
Гузев Михаил Александрович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	guzev@iam.dvo.ru
Дмитриев Александр Алексеевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	dmitriev@iam.dvo.ru
Добровинская Маргарита Семеновна	ТОГУ, Хабаровск	dianeira@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович	ТГПУ им. Л. Н. Толстого, Тула	dobrovol@tspu.tula.ru
Добровольский Николай Николаевич	МБОУСОШ №56, Тула	nikolai.dobrovolsky@outlook.com
Долбилин Николай Петрович	МИ РАН им. Стеклова, Москва	dolbilin@mi.ras.ru
Дубинин Владимир Николаевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	dubinin@iam.dvo.ru
Дорофеев Яков Константинович	ТОГУ, Хабаровск	Yasha3026@yandex.ru
Дымченко Юрий Викторович	ДВФУ, Владивосток	dymch@mail.ru

Ероховец Николай Юрьевич	МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва	erochovetsn@hotmail.com
Жильцов Александр Владимирович	ДВГУПС, Хабаровск	egrevid@gmail.com
Жукова Татьяна Витальевна	ТОГУ, Хабаровск	tzhukova@mail.khstu.ru
Жуплев Антон Сергеевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	zhuplev@gmail.com
Зиньков Семен Юрьевич	ДВФУ, Владивосток	zinjkov.su@gmail.com
Илларионов Андрей Анатольевич	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	illar_a@list.ru
Илларионова Любовь Викторовна	ВЦ ДВО РАН, Хабаровск	illarionova_l@list.ru
Казак Михаил Сергеевич	ДВФУ, Владивосток	bohes@list.ru
Казинец Виктор Алексеевич	ДВГГУ, Хабаровск	matan@khspu.ru
Калмыков Сергей Иванович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	sergeykalmykov@inbox.ru
Кан Владимир Алексеевич	ДВФУ, Владивосток	mi-vova@inbox.ru
Карачанская Елена Викторовна	ТОГУ, Хабаровск	ekarachanskaya@mail.khstu.ru
Карманов Дмитрий Александрович	ТОГУ, Хабаровск	zenbudd@mail.ru
Карп Дмитрий Борисович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	dmkrp@yandex.ru

Ким Светлана Дмитриевна	ТОГУ, Хабаровск	wilhelmstrytch@gmail.com
Кириллова Дина Александровна	ПГУ им. Шолом-Алейхема, Биробиджан	dina_kir_03@mail.ru
Коваленко Евгений Олегович	ДВФУ, Владивосток	kovalenkoq@gmail.com
Козлов Алексей Владимирович	ТОГУ, Хабаровск	000511@pnu.edu.ru
Коношко Ксения	ТОГУ, Хабаровск	ksushka393@mail.ru
Кудряшова Полина Павловна	ДВФУ, ВЛАДИВОСТОК	polina.kudriashova@gmail.com
Кузьмина Ольга Владимировна	ТОГУ, Хабаровск	agcat@yandex.ru
Лобанов Алексей Викторович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	alekslobanov1@mail.ru
Лосев Александр Сергеевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	alexax@bk.ru
Ломакина Елена Николаевна	ХГАЭП, Хабаровск	lomakina.as@mail.ru
Лукина Элина Эдуардовна	ТОГУ, Хабаровск	yaoi-foreve@yandex.ru
Мазенкина Надежда Викторовна	ТОГУ, Хабаровск	moniquenadine@mail.ru
Маркова Наталья Владимировна	ТОГУ, Хабаровск	nata_mark@mail.ru
Машков Денис Валериевич	Дальрыбвтуз, Владивосток	mashkvdenis@yandex.ru

Мендель Василий Викторович	ДВГГУ, Хабаровск	mendel_ww@mail.ru
Мишуров Михаил Игоревич	ТОГУ, Хабаровск	darknesstriumph@mail.ru
Младова Ирина Александровна	МАОУ СОШ №10, Кандалакша	iriina-mladova@ya.ru
Монахова Анна Сергеевна	ДВФУ, Владивосток	maska1406@mail.ru
Монина Мария Дмитривна	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	monina@iam.khv.ru
Мощевитин Николай Германович	МГУ, Москва	moshchevitin@gmail.com
Назаров Василий Геннадиевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	naz@iam.dvo.ru
Намм Роберт Викторович	ВЦ ДВО РАН, Хабаровск	rnamm@yandex.ru
Насыров Вячеслав Вячеславович	ТОГУ, Хабаровск	nassl@mail.ru
Насырова Мария Георгиевна	ВЦ ДВО РАН, Хабаровск	nassm@mail.ru
Нефедев Константин Валентинович	ДВФУ, Владивосток	nefedev.kv@dvfu.ru
Осипова Марина Анатольевна	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	mao1975@list.ru
Павлов Никита Александрович	ДВФУ, Владивосток	npavlov@pochta.ru
Парусников Владимир Игоревич	ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва	polar2004@list.ru

Пархоменко Игорь Сергеевич	ТОГУ, Хабаровск	IgParhom@mail.ru
Пассар-Коваль Павел Александрович	ТОГУ, Хабаровск	nanai1996@gmail.com
Пестрецова Вероника Владимировна	ДВФУ, Владивосток	Nika02061994@mail.ru
Подгаев Александр Григорьевич	ТОГУ, Хабаровск	pvu1707@mail.ru
Подсыпанин Евгений Владимирович	Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого, Санкт-Петербург	podsypanin@mail.ru
Попова Татьяна Михайловна	ТОГУ, Хабаровск	000511@pnu.edu.ru
Прилепкина Елена Гумаровна	ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Владивосток	pril-elena@yandex.ru
Прокопьева Дина Борисовна	ДВФУ, Владивосток	prokopievad@yandex.ru
Прохоров Игорь Васильевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	prokhorov@iam.dvo.ru
Прудников Виталий Яковлевич	ТОГУ, Хабаровск	prudnickov.vit@yandex.ru
Птахов Денис Олегович	ДВФУ, Владивосток	ptaxov@mail.ru
Пятецкая Наталья Васильевна	Администрация г. Хабаровска, Хабаровск	frea05@mail.ru
Ратушненко Владимир Викторович	ДВФУ, Владивосток	ratushnenkov@gmail.com

Романов Марк Анатольевич	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	romanov@iam.khv.ru
Сарицкая Жанна Юрьевна	ДВФУ, Владивосток	zhsar@icloud.com
Сатаев Иван Александрович	ТОГУ, Хабаровск	kruto.hero.lob27@mail.ru
Святуха Владимир Андреевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	admin@iam.dvo.ru
Синьков Денис Сергеевич	ТОГУ, Хабаровск	denissinkov@mail.ru
Скурихин Евгений Евгеньевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	eeskur@gmail.com
Смирнов Евгений Юрьевич	Высшая школа экономики, Москва	esmirnov@hse.ru
Смотров Михаил Николаевич	ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск	gsm@iam.khv.ru
Соболева Ольга Владимировна	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	soboleva22@mail.ru
Соколов Андрей Андреевич	Imperial College, Лондон	aasokolov@gmx.com
Соломадин Григорий Дмитриевич	МГУ им. Ломоносова, Москва	blastbeatscythe@gmail.com
Соседова Надежда	ТОГУ, Хабаровск	umochkanadushka@mail.ru
Соснов Валерий Владимирович	ДВФУ, Владивосток	megachuhancer@gmail.com
Спивак Юлия Эдуардовна	ШЕН ДВФУ, Владивосток	u3l3i3y3a3@mail.ru
Степанова Алена Андреевна	ДВФУ, Владивосток	stepltd@mail.ru

Сущенко Андрей Андреевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	sushchenko.aa@dvfu.ru
Тайманов Искандер Асанович	Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск	taimanov@math.nsc.ru
Талько Анастасия Сергеевна	ТОГУ, Хабаровск	fllay@mail.ru
Тарасенко Александр Александрович	ДВФУ, Владивосток	alexander.tarasenko93@gmail.com
Терешко Дмитрий Анатольевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	ter@iam.dvo.ru
Трепачева Алина Викторовна	Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону	alina1989malina@ya.ru
Тусикова Ангелина Александровна	ТОГУ, Хабаровск	alice.tus@mail.ru
Уленгов Андрей Вениаминович	ТОГУ, Хабаровск	vikht@mail.khstu.ru
Ушаков Андрей Андреевич	ТОГУ, Хабаровск	andrew_ushakov@inbox.ru
Харченко Юрий Николаевич	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	har@iam.dvo.ru
Цирулик Мария Юрьевна	ТОГУ, Хабаровск	nebel94@gmail.com
Цициашвили Гурами Шалвович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	guram@iam.dvo.ru
Чеканов Сергей Геннадьевич	ДВФУ, Владивосток	stepltd@mail.ru
Чепурко Сергей Александрович	ТОГУ, Хабаровск	prostomongol2040@mail.ru

Черемисин Анатолий Александрович	ТОГУ, Хабаровск	tuxych@gmail.com
Чернов Сергей Сергеевич	ДВФУ, Владивосток	chernov.net@yandex.ru
Шевкун Дарья Владимировна	ТОГУ, Хабаровск	donechka-1994@mail.ru
Шлык Владимир Алексеевич	ДВФУ, Владивосток	Shlykva@yandex.ru
Эйрих Надежда Владимировна	ПГУ им. Шолом-Алейхема, Биробиджан	nadya_eyrikh@mail.ru
Яровенко Иван Петрович	ИПМ ДВО РАН, Владивосток	yarovenko@iam.dvo.ru

Содержание

Авторский указатель **6**

Тезисы докладов **8**

Ayzenberg A. A. Volume polynomial of a multi-fan and corresponding duality algebra 8

Buchstaber V. M. Toric Topology and carbon structures (fullerenes and grafenes) 9

Budarina N. V., Bernik V. I., Götze F. Effective estimates of the measure of the sets of real numbers with the given approximation property by algebraic numbers of bounded height and degree 10

Bunkova E. Yu. Formal group for elliptic function of level 3 12

Bykovskii V., Ustinov A. Double Somos-4 14

Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E. Analysis of the solvability in the complex heat transfer problems 15

Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E. Boundary optimal control problem for complex heat transfer model 16

Cho Y., Kim M. K., Suh D. Y. Existence of compact Lie group actions on symplectic manifolds 18

Dolbilin N. P. The Minkowski theorem on parallelohedra and its recent development 21

Gudimenko A. I., Guzev M. A. Fiber bundle theory and invariant form of conservation laws in continuum mechanics 22

Guzev M. A., Dmitriev A. A. Critical points of coupled pendulums 23

Grinblat A. Parallelization of Petri nets via polynomials . . 24
Husainov A. A. The category of toric sets 25
Khovanskii A.G. Irreducible components of generic complete intersections 27
Konstantinou-Rizos S. Integrability properties of NLS type Equations via Darboux transformations, and related Yang-Baxter maps 31
Kuroki S. On a maximal torus which acts on a GKM-manifold 33
Kustarev A. Projective embeddings of quasitoric manifolds 37
Kuwata H. On the space of sections of a line bundle on a topological toric manifold 41
Laurinčikas A. Universality of zeta-functions 41
Limonchenko I. Yu. Topology of some polyhedral products arising from minimally non-Golod complexes 42
Masuda M. The root systems of torus manifolds 43
Mauleshova G. S., Mironov A. E. Commuting difference Krichever – Novikov operators 44
Mikhailov A. Differential-difference and finite-difference integrable systems associated with Kac-Moody algebras . 48
Namm R. V., Vikhtenko E. M., Woo G. Sensitivity functionals in contact problems of elasticity theory 49
Novitskii I. M. On computing the resolvent kernels for Carleman integral operators 50
Panov T. E. On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings 51
Sukhonos A. G. Cohomological dimensions of pointed Chu spaces 53
Агапова Е. Г. Приближенное решение третьей краевой задачи для параболического уравнения 54
Алексеев Г. В., Кукина Т. М., Ларькина О. С. Методы оптимизации в задачах маскировки материальных тел на основе волнового обтекания 56
Амосова Е. В. Конечномерная стабилизация с заданной скоростью двумерным потоком вязкого газа 57

Ахунжанов Р. К. О многомерных спектрах Лагранжа и Дирихле 59
Берник В. И. Метрическая теория трансцендентных чисел и распределение алгебраических чисел, дискриминантов и результантов 60
Болотов Д. В. Макроскопическая размерность PSC-многообразий с виртуально абелевой фундаментальной группой 64
Бризицкий Р. В. Краевые и экстремальные задачи для стационарных уравнений МГД при смешанных граничных условиях для магнитного поля 66
Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю. Краевые и экстремальные задачи для нелинейного уравнения конвекции – диффузии – реакции 67
Брюно А. Д., Соколов А. А. Глобальное обобщение алгоритма цепной дроби 68
Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю. Торическая топология фуллеренов 69
Вербицкий В. А. Об одном классе мультипликаторов интегралов Фурье 71
Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю. Граничное оптимальное управление в модели сложного теплообмена 72
Демшин И. Н., Шлык В. А. Равенство емкости и модуля обобщенного поликонденсатора 73
Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Приведенные иррациональности чисто вещественных алгебраических полей 75
Дорофеев Я. К. Метод численного решения системы параболических уравнений с перекрестной диффузией 76
Дубинин В. Н. Новые приложения круговой симметризации в теории многолистных функций 78
Дымченко Ю. В. Равенство емкости и модуля в субфинслеровых пространствах 79

Жильцов А. В., Намм Р. В. Метод множителей Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной 80
Казак М. С. Решетки конгруэнций циклических полигонов над моноидом $(\mathcal{N}; max)$ 81
Казинец В. А. Свойства симметрической группы заданной генетическим кодом 82
Карачанская Е. В. Управляемая с вероятностью 1 вращательная диффузия в мутной среде 84
Ковтанюк А. Е., Пестрецова В. В., Чеботарев А. Ю. Моделирование радиационно-кондуктивного теплообмена в слое 85
Лобанов А. В., Дьяконова О. Е. Численное исследование двумерной задачи маскировки на основе волнового обтекания 87
Ломакина Е. Н. Оценки аппроксимативных чисел оператора Харди в пространствах Лоренца 88
Машков Д. В. Численное решение задач идентификации для стационарной модели конвекции-диффузии . . 89
Мендель В. В. Копредставление симметрической группы и инверсии 91
Мощевитин Н. Г. О некоторых нерешенных задачах теории диофантовых приближений 92
Павлов Н. А. Теорема искажения для голоморфных однолистных функций 94
Подгаев А. Г., Лисенков К. В. Проекционные методы и методы компактности в краевых задачах для квазилинейных параболических уравнений в областях с немонотонной нецилиндрической границей 95
Попова Т. М., Козлов А. В. Численное решение квазилинейного уравнения с разрывными граничными условиями 99
Прилепкина Е. Г. Преобразование Меллина от H-функции Фокса 100

Прохоров И. В., Сущенко А. А. Об однозначной разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения переноса с френелевскими условиями сопряжения 102
Прудников В. Я. О неравенстве Иенсена 104
Птахов Д. О. Полигоны над моноидами левых нулей с (P,1)-стабильной теорией 108
Скурихин Е. Е. Множества с действием полугруппы, как категорные топологические пространства 109
Соболева О. В. Исследование обратной экстремальной задачи для параболического нелинейного уравнения диффузии – реакции 110
Соломадин Г. Д., Устиновский Ю. М., Бухштабер В. М. Двупараметрический род Тодда и торические разрешения особенностей 112
Соснов В. В. Приближенное решение задачи импедансной маскировки в двумерном случае с использованием методов оптимизации 113
Спивак Ю. Э. Численный анализ в 2D приближенной задаче маскировки с использованием слоистой оболочки 115
Степанова А. А., Прокопьева Д. Б. Сильно точные полигоны с линейными решетками конгруенций 116
Терешко Д. А. Численный анализ задач управления для нестационарных уравнений вязкой теплопроводной жидкости 118
Growth Цициашвили Г. Ш., Осипова М. А. Сходимость к предельным распределениям в моделях растущих случайных сетей 119
Чеканов С. Г., Тарасенко А. А. Анализ стойкости криптографических протоколов аутентификации на основе неклассических логик 121

Список участников 123

Научное издание

ТОРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
Материалы Международной конференции

Отпечатано с оригинал-макета, изготовленного в Хабаровском отделении
Института прикладной математики ДВО РАН

Ответственный за выпуск *А.З. Син*
Оператор компьютерной верстки *М.О. Авдеева*

Подписано в печать 10.08.15. Формат 60×84/16. Бумага писчая. Гарнитура «Таймс».
Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,2. Тираж 150 экз. Заказ № 256.

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136

Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136